

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Заметим, что $9261 = (21)^3$, т.е. число может быть составлено из следующих 2-ух наборов цифр:

1) 3 3 3 7 7 7 1 1

Кол-во чисел, составленных из этого набора равно $C_8^3 \cdot C_5^3 = 560$.

2) 9 3 7 7 7 1 1 1.

Кол-во чисел равно: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = 2 \cdot 560$

Итоговое кол-во чисел равно: $560 + 2 \cdot 560 = 3 \cdot 560 = 1680$.

Других наборов быть не могло, иначе какая-то цифра равна одной из произведений: $9 \cdot 3 = 27 > 9$, $7 \cdot 3 = 21 > 9$, $7 \cdot 7 = 49 > 9$, число быть не может.

Ответ: 1680.

№3.

$$\begin{cases} (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(y x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} \\ (y - 2x)(y + x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x} \\ y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-2\ln^2 x} = e^{\ln^2 y - 3\ln x \ln y} \\ y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\ln x = \ln^2 y - 3\ln x \ln y \\ \begin{cases} y=2x \\ y=4-x \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\ln y - \ln x)(\ln y - 2\ln x) = 0 \\ \begin{cases} y=2x \\ y=4-x \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y=x \\ y=x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2x \\ y=4-x \end{cases} \end{cases}$$

$$1) y=x, y=2x \Rightarrow y=0, x=0$$

$$2) y=x, y=4-x \Rightarrow y=2, x=2$$

$$3) y=x^2, y=2x \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$4) y=x^2, y=4-x \Rightarrow x^2+x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

С учетом ОДЗ получаем следующие решения:

$$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (2; 4), \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$$

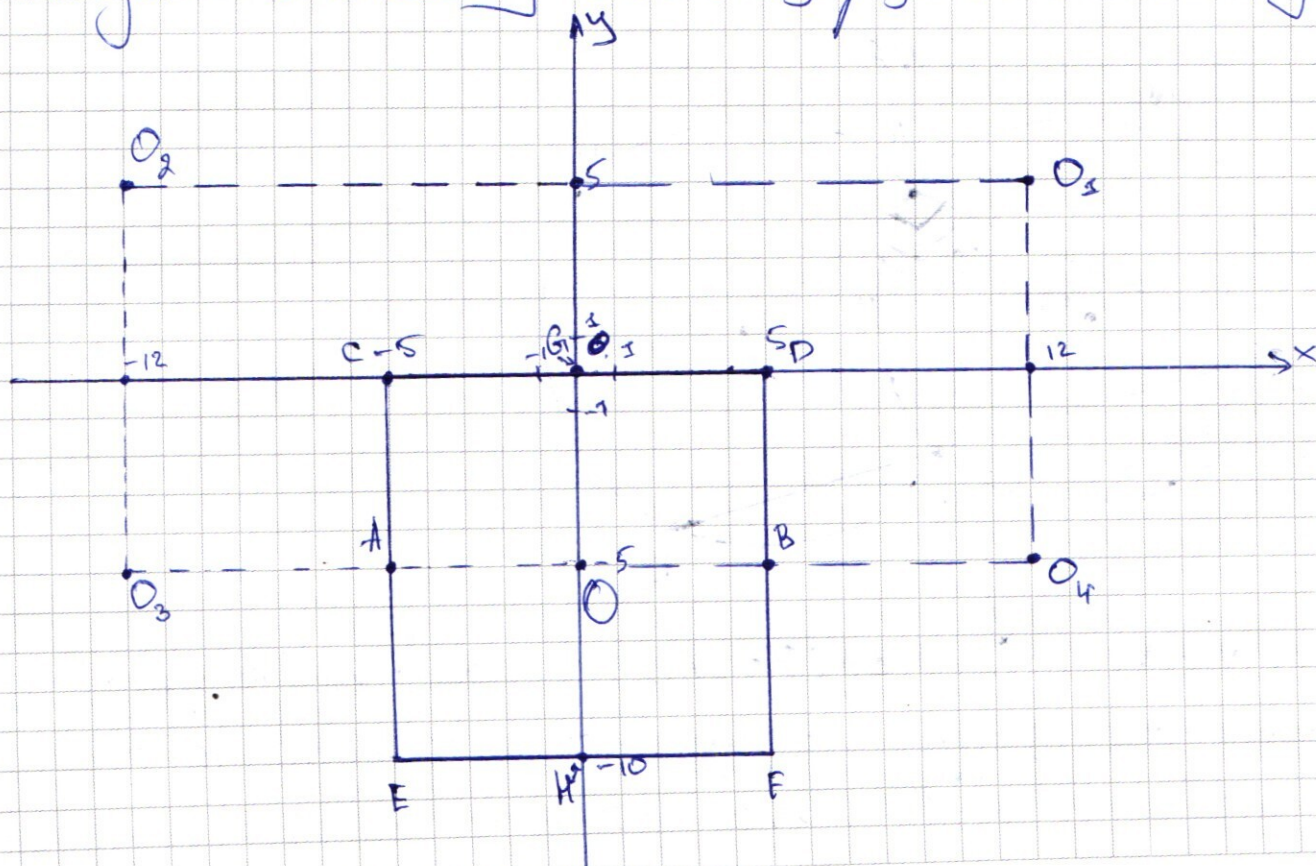
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ [(x|-12)^2 + (y|-5)^2] = a & (2) \end{cases}$$

Раскрывая модуль в первом уравнении получили, что уравнение (1) описывает на плоскости квадрат с центром в точке $(0; -5)$, стороны равной 10, где каждая сторона параллельна оси Ox или Oy .

Если $a > 0$, то уравнение описывает график части окружности в первой четверти с центром $(12, 5)$ и симметричных ей частей в других четвертях.

Тогда всю систему можно изобразить на плоскости xOy :



Заметим, что, если ~~радиус~~ радиус окружности (т.е. $\sqrt{a}$) равен O_1G ($O_1G = O_3G = O_4G$), то все окружности будут иметь с квадратом ровно две точки пересечения (в точках G и H).
 Такие две точки пересечения будут, если $r = O_3A$ ($O_3A = O_4A$), т.е. окружности касаются квадрата. В любом другом случае:

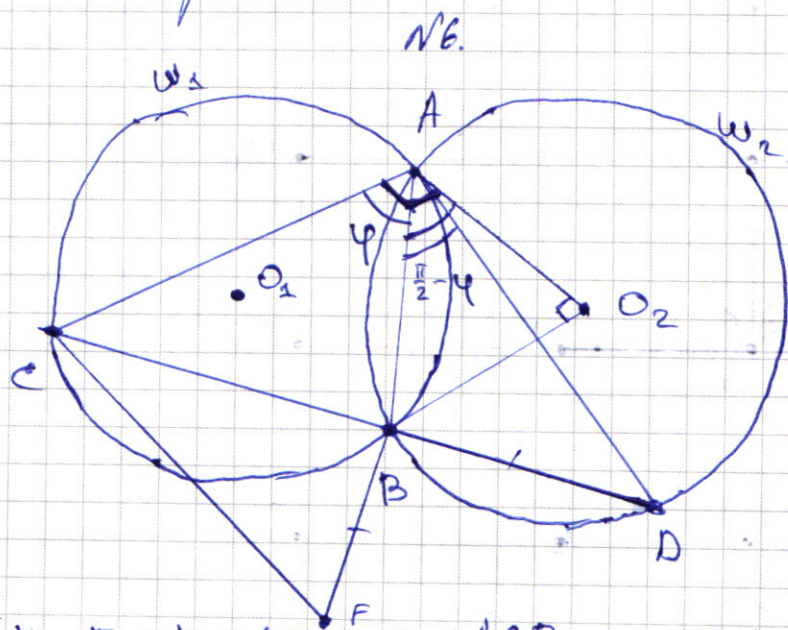
1) ~~$r > O_1G \Rightarrow$~~ графики не имеют ни одной точки пересечения
 ~~$r < O_3A \Rightarrow$~~

2) $O_3A < r < O_1G \Rightarrow$ если $r > O_3A$ и $r \leq O_3C$, то графики имеют 4 общие точки на сторонах EC и DF ; если $O_3A < r < O_1G \Rightarrow$ графики имеют 4 общие точки со сторонами CD и EF .
 Тогда $Q = r^2$:

$$1) r^2 = O_1G^2 = AC^2 + O_3O^2 = 25 + 144 = 169$$

$$2) r^2 = O_3A^2 = 25$$

Ответ: при $a = 25$ или $a = 169$.



Т.к. $r_1 = r_2 = 10$, то $\angle ACB = \angle ADB$ (т.к. они опираются на одну хорду в окружностях одинакового радиуса) $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \angle AO_2B = 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{2} AO_2 = \sqrt{2} R = \sqrt{2} \cdot 10$. Т.к. $\angle ACD = \angle ADC$, то $AC = AD$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $\angle CAB = \varphi \Rightarrow \angle BAD = \frac{\pi}{2} - \varphi$. По т. косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \varphi AC \cdot AB$$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) AD \cdot AB = AD^2 + AB^2 - 2 \sin \varphi AD \cdot AB$$

Т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то $CD^2 = BC^2 + BD^2$ $CD = \sqrt{2} AC$ (м.к. $AC = AD$) (2)

$$CF^2 = CB^2 + FB^2 = CB^2 + BD^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cos \varphi AC \cdot AB + AD^2 + AB^2 - 2 \sin \varphi \cdot$$

$$\cdot AD \cdot AB = 2AB^2 + CD^2 - 2AB(AC \cdot \cos \varphi + AD \sin \varphi) =$$

$$= 2AB^2 + CD^2 - 2ABAC \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \quad (3)$$

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cos \angle AOC \cdot OA \cdot OC = 2R^2 - 2R^2 \cos \angle AOC =$$

$$= 2R^2 - 2R^2 \cos(\angle ABC \cdot 2) = 2R^2 - 2R^2 \cos(180^\circ - 45^\circ - \varphi) =$$

$$= 2R^2 - 2R^2 \cos(270^\circ - 2\varphi) = 2R^2 + 2R^2 \sin(2\varphi) = 2R^2 + 2R^2$$

$$= 2R^2(1 + \sin 2\varphi) = 2R^2(1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2\varphi)) = 2R^2 \cdot 2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \varphi) =$$

$$= 4R^2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4})$$

Из (2) и (3) имеем:

$$CF^2 = 2AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot AC \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = 4R^2 + 2 \cdot 4R^2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{4}) -$$

$$- 2 \cdot \sqrt{2} R \cdot 2R \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) = 4R^2 \Rightarrow CF = 2R, \text{ т.е. } CF = 20.$$

Пусть $\angle BCF = \varepsilon$. Тогда $\sin \angle FCA = \sin(\angle FCB + 45^\circ) = \sin(\varepsilon + 45^\circ) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \varepsilon + \cos \varepsilon) \quad (*)$$

Т.к. $CB = 12$, то $FB = \sqrt{CF^2 - CB^2} = 16 \Rightarrow BD = BF = 16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow CD = 16 + 12 = 28 \Rightarrow AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{28}{\sqrt{2}}.$$

$$\sin \varepsilon = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}, \quad \cos \varepsilon = \frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Из (*): $\sin \angle FCA = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}) = \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{2 \cdot 5}$

$$\text{Тогда } S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle FCA \cdot AC \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} \cdot 20 =$$

$$= 7 \cdot 28 = 196$$

Ответ: а) 20 б) 196

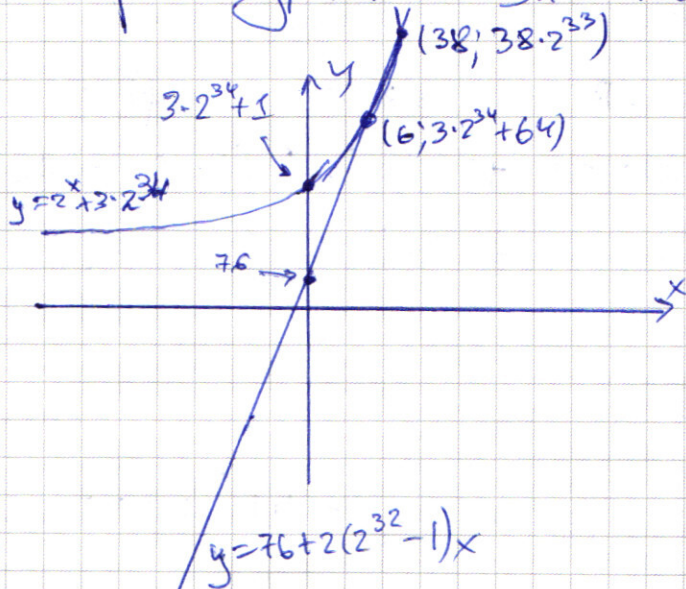
№ 7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} y = 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y = 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

График первого уравнения - экспонента, второго - прямая:



~~Тогда~~ Тогда, всего есть 2 точки пересечения:
 $(6; 3 \cdot 2^{34} + 64)$ и $(38; 38 \cdot 2^{33})$.

Итак целочисленными решениями системы (1) будут являться решения с $x \in [7; 37]$. При этом для каждого такого x кол-во y удовлетворяющих системе (1) равно: $76 + 2(2^{32} - 1)x - 3 \cdot 2^{34} - 2^x$.
 Тогда всего решений будет:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sum_{x=7}^{37} (76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^{24} \cdot 3 - 2^x) =$$

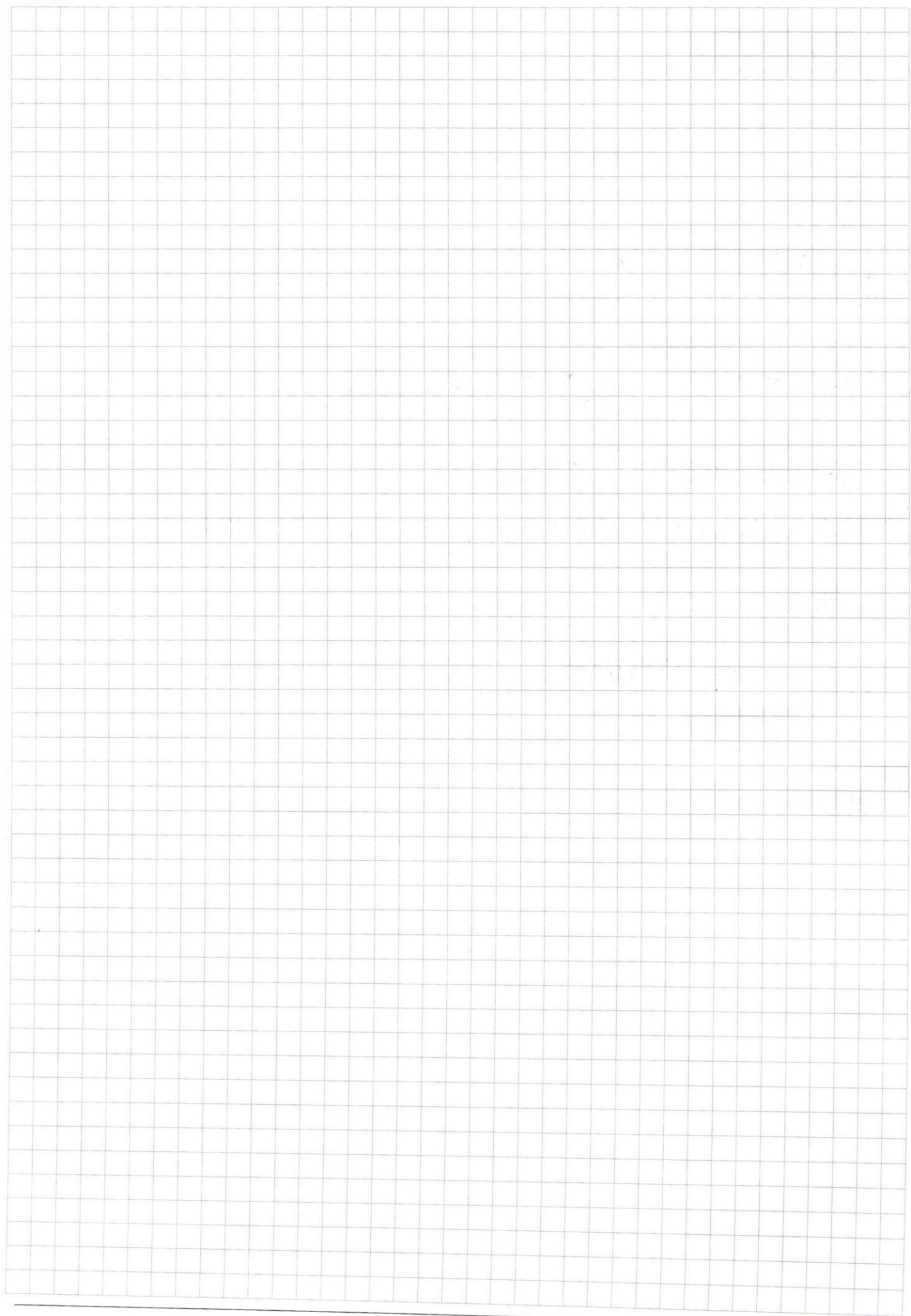
$$= \sum_{x=7}^{37} 76 + 2(2^{32} - 1) \sum_{x=7}^{37} x - \sum_{x=7}^{37} 3 \cdot 2^{24} - \sum_{x=7}^{37} 2^x =$$

$$= 76 \cdot 31 + 2(2^{32} - 1)(37 \cdot 19 - 21) - 3 \cdot 2^{24} \cdot 31 - (2^{38} - 2^7) =$$

$$= 2351 + 1364 \cdot 2^{32} - 1364 - 327 \cdot 2^{32} - 64 \cdot 2^{32} + 128 =$$

$$= 973 \cdot 2^{32} + 115$$

Ответ: $973 \cdot 2^{32} + 115$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 123456789 & \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$$

$$(25)^3$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ + 42 \\ \hline 441 \\ \times 21 \\ \hline 441 \\ + 882 \\ \hline 3261 \end{array}$$

$$33377711$$

$$93777111$$

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3$$

$$8 \cdot 7 \cdot 20$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_7^2$$

$$\frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 8 \cdot 2}$$

$$8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$$

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!}$$

$$\frac{8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$56 \cdot 30 = 1680$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin t + \cos t = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin t - \cos t = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \left[\frac{9x + 5x}{2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$2 \sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\cos 2x$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos^2 2x - \cos^2 2x - 2 \sin 7x \sin 2x + \sin^2 2x = 0$$

$$(x^2 y^4)^{\ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$$

$$(y - 2x)(y + x - 4)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$xy - 2xy - 4y$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x(x-4) = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 - 2x^2 + 8x - 8 - xy + 4 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 + 8x(x-4) =$$

$$32 - 8 = 24$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$-2x + 8$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 =$$

$$2 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= (3x - 4)^2$$

$$\frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$(y - 3x + 4)(y + 3x - 4) = 0$$

$$2x$$

$$-x + 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^{\frac{37}{x=7}} (76 + 2(2^{32} - 1)x - 3 \cdot 2^{34} - 2^x)$$

$$31 \cdot 76 + 2(37 \cdot 19 - 21)(2^{32} - 1) - 31 \cdot 3 \cdot 2^{34} - 2^{38} + 2^7$$

$$+ 2^1 + \dots + 2^7 + \dots + 2^{37} = 2^{38} - 1 - (2^7 - 1) = 2^{38} - 2^7$$

$$7 + \dots + 37$$

$$\frac{37 \cdot 38}{2} = 37 \cdot 19 - 21$$

$$2351 + 1364 \cdot 2^{32} - 1364 - 372 \cdot 2^{32} - 64 \cdot 2^{32} + 128$$

$$973 \cdot 2^{32} + 1115$$

$$\begin{array}{r} -1364 \\ -391 \\ \hline 973 \end{array}$$

$$2351 - 1364 + 128$$

$$\begin{array}{r} 2351 \\ -1364 \\ \hline 987 \\ +128 \\ \hline 1115 \end{array}$$

$$2200 - 6482 = 181$$

$$2 \cdot 682 = 1200 + 160 + 4 =$$

$$= 1364$$

$$93 \cdot 4 \cdot 2^{32}$$

$$93 \cdot 4$$

$$37 \cdot 19 - 21$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$AC=AD$$

$$AB^2 = 2PR$$

$$= \sin 2\theta$$

$$2AB^2 + CD^2 - 2AB(AC \cos \varphi + AD \sin \varphi)$$

$$2AB^2 + CD^2 - 2AB \cdot AC \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})$$

ABV

$$\alpha = \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$x = 211 - 29 - \frac{11}{2}$$

$$eF^2 = 4R^2 + 4R^2 + 4R^2 \sin^2 \theta - 4R \cdot AC \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 8R^2 + 4R^2 + 4R^2 \sin^2 \varphi - 8R^2 \sin^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= 8R^2 + 4R^2 (\sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right)) = 8R^2 - 4R^2 = 4R^2 \quad \text{AC}^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{2} - 2\varphi \right) = \\
 &= 2R^2 - 2R^2 \sin(2\varphi - \pi) =
 \end{aligned}$$

$$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2R^2 \sin(24^\circ - \pi) = 2R^2 - 2R^2 \sin(24^\circ - \pi) =$$

$$\frac{1}{2} 2R^2 + 2R^2 \sin 2\varphi$$

$$AD^2 = 2AC^2$$

$$\sin 2\varphi - 2\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$2\cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \right)^2 = \sin^2 \varphi + \sin 2\varphi$$

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + \cos(\pi - 2\varphi)$$

$$CD^2 = 2AC^2 =$$

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{1}{2} + \sin \theta \cos \theta\right)$$

$$= \sqrt{r^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}$$

$$u_{A,2} \sin(\phi + \frac{\pi}{4})$$

$$-8R^2 \sin^2(\varphi, \pi)$$

$$9x = a$$

$$5x = b$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

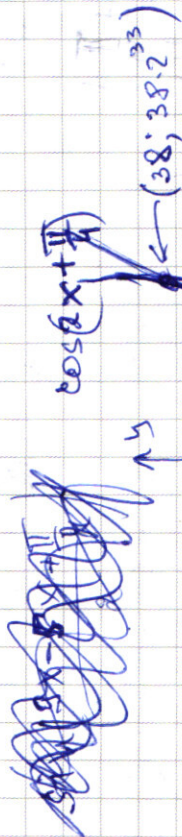
$$\cos a - \cos b - \sqrt{2} \cos(a-b) + \sin a + \sin b = 0$$

$$\cos a - \cos b - \sqrt{2} \cos a \cos b + \sin a \sin b + \sin a \sin b$$

$$\sin(3x + \frac{\pi}{6}) + \sin(5x + \frac{\pi}{6}) - \cos 4x = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{6}) - \cos 4x = 0$$



$$(38, 38.2)$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{6})$$

$$x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2x(2^{32} - 1)$$

$$y < 76 + 2 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\frac{4}{3}$$

$$x \in [7; 37]$$

$$x = 2$$

$$2^x < 64 + 2(x - 6)(2^{32} - 1)$$

$$2^x + 12 \cdot 2^{32} - 12 < 64 + 2x(2^{32} - 1)$$

$$32 + 6$$

$$38 \cdot 2^{33}$$

$$x = 38 \Rightarrow 2^{38} + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$35$$

$$19$$

$$f'(0)$$

$$(2^x)' = 2^x \ln 2$$

$$2(2^{32} - 1)x + 76$$

$$x = 36$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33}x + 76 - 2x$$

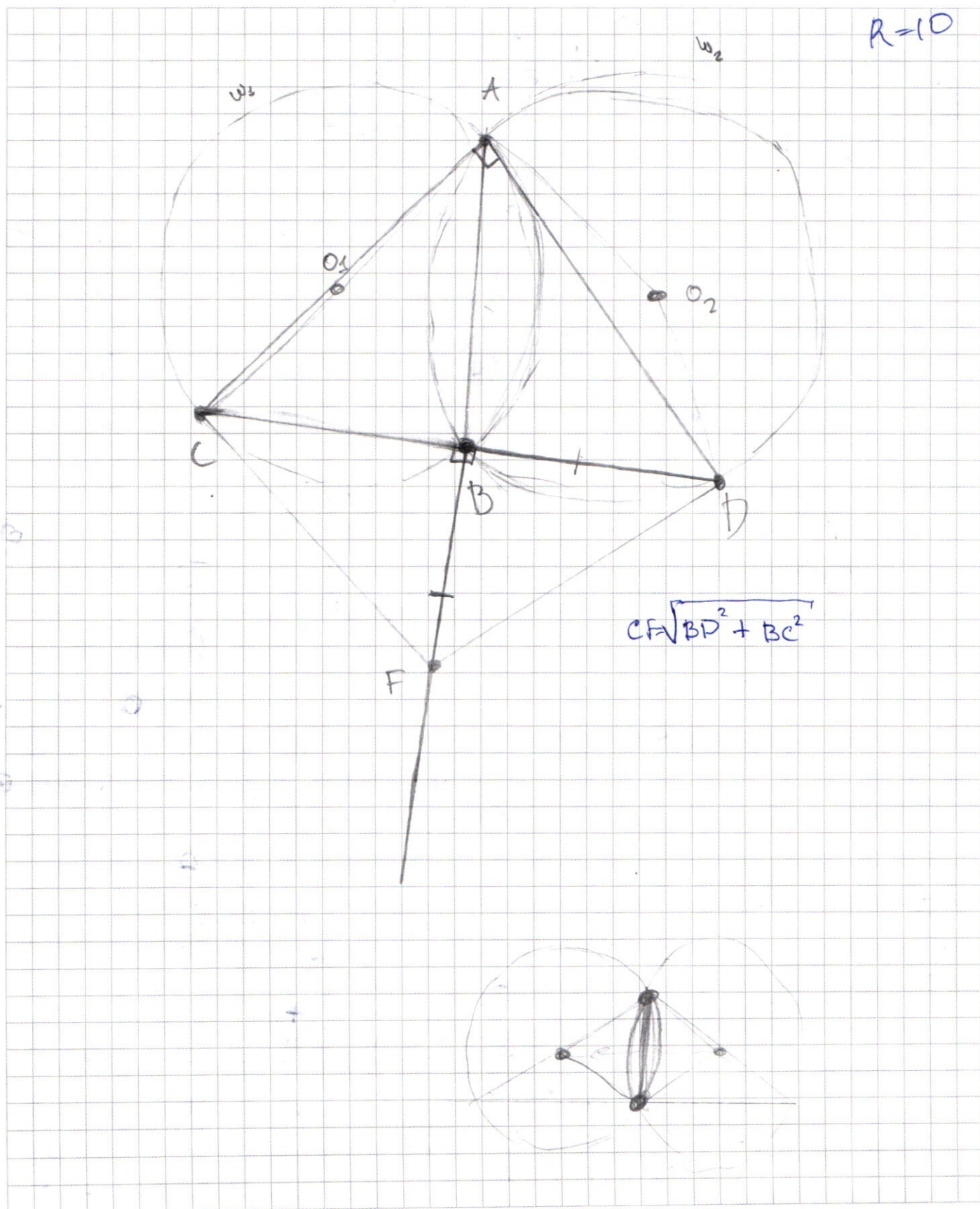
$$x = 6 \quad 64 = 2^6 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33}x$$

$$3 \cdot 2^{34}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\beta = \gamma = 2\alpha$$

$$AC = AD$$

$$CD^2 = 8R^2 \sin^2 \alpha$$

$$CP^2 = 4R^2 - 4R^2 \cos 2\alpha$$

$$AB = \sqrt{2}R$$

$$CB^2 + BD^2 = ?$$

$$BD = d$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$AB^2 + CD^2$$

$$\gamma = 2\alpha$$

$$\pi - \alpha = \pi - \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

$$\beta = \gamma = 2\alpha$$

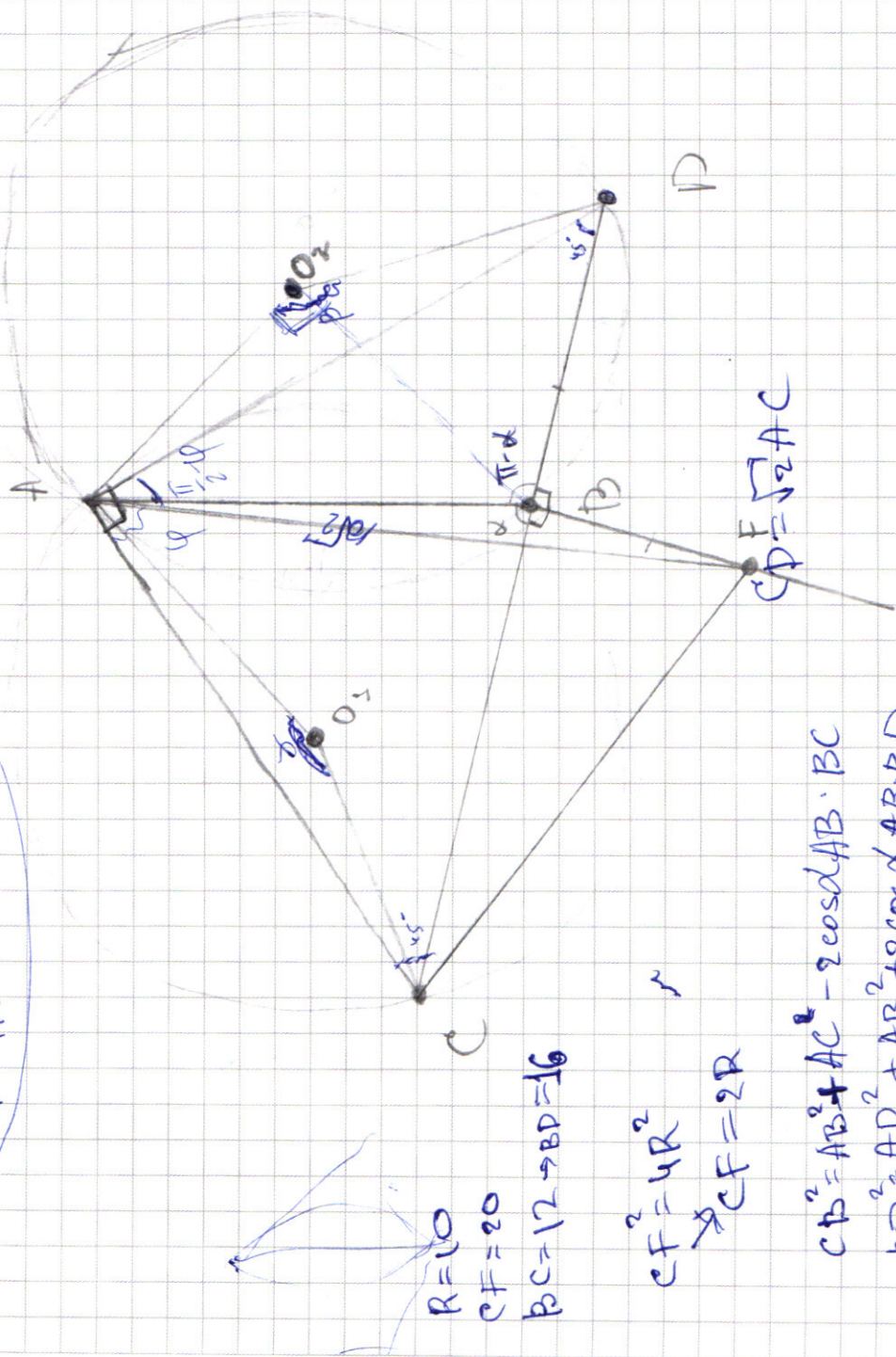
$$AC = AD$$

$$AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \beta$$

$$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha$$

$$CD^2 = 4R^2 - 2R^2 (\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$2AB(AB + \cos \alpha (BD - BC))$$



$$R = 10$$

$$CF = 20$$

$$BC = 12 \rightarrow BD = 16$$

$$CF^2 = 4R^2$$

$$CF = 2R$$

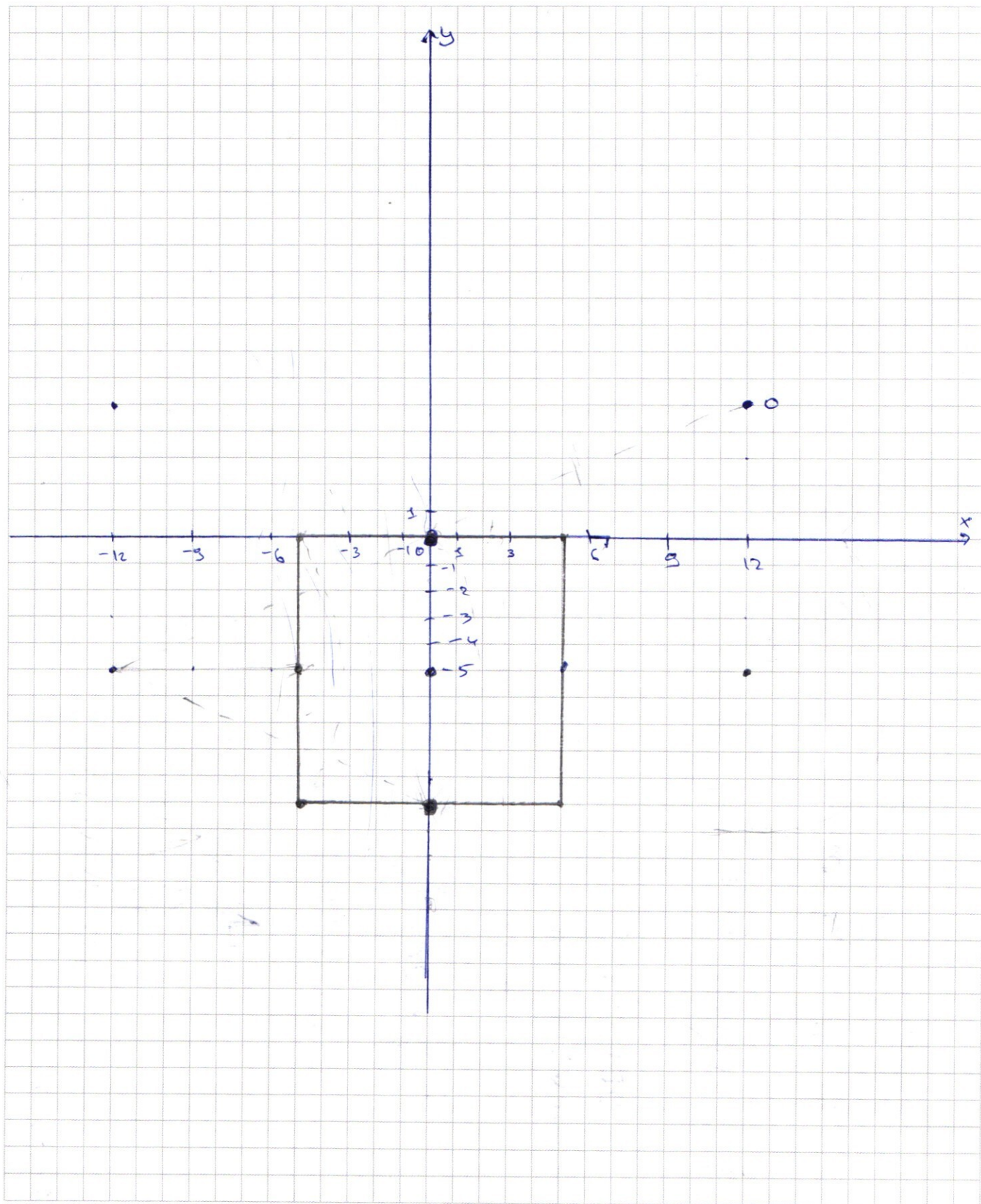
$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos \alpha \cdot AB \cdot BC$$

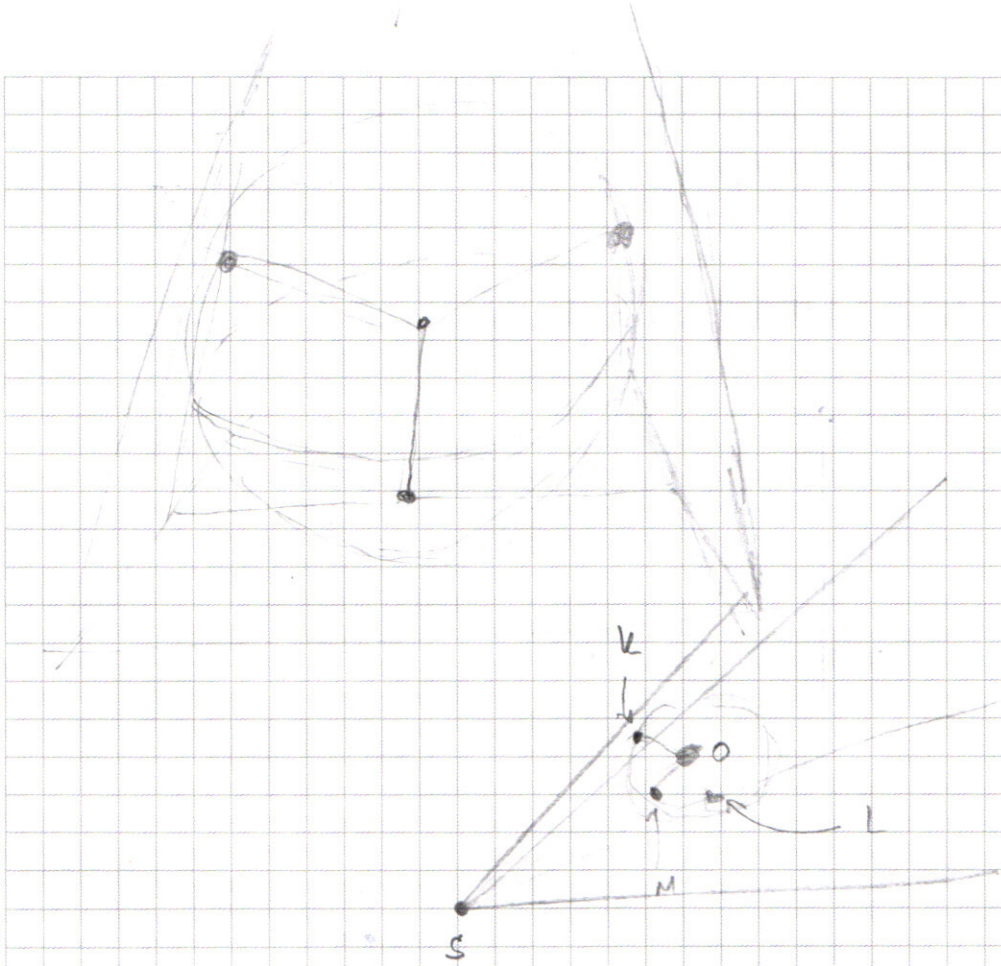
$$BD^2 = AD^2 + AB^2 + 2\cos \alpha \cdot AB \cdot BD$$

$$CB^2 + BD^2 = 2AB^2 + CD^2 + 2\cos \alpha \cdot AB(BD - BC)$$

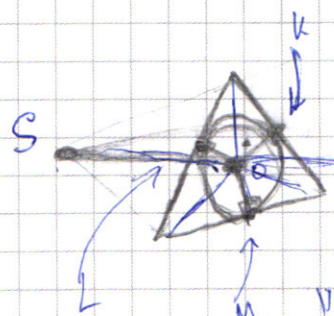
$$BC^2 + BD^2 = CF^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$S = \phi R$$



$$CD = \sqrt{2} AC$$

$$12 + 16 = 28$$

$$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}}$$

$$AC = \frac{28}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin ACF \cdot CF \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{8} =$$

$$28 \cdot 7 =$$

$$= 4 \cdot 49 = 160 + 36 =$$

$$(2 \cdot 7)^2 = 196$$

$$\sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \omega + \cos \omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

$$\sin \omega = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \omega = \frac{CB}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x - 4 \ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$x^{-\ln x^2}$$

$$e^{-\ln x^2 \cdot \ln x} = e^{\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y}$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \ln y$$

$$-2a^2 = b^2 - 3ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$b^2 - ab - 2ab + 2a^2 = 0$$

$$b(b-a) - 2a(b-a) = 0$$

$$(b-a)(b-2a) = 0$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\ln x = a$$

$$\ln y = b$$

$$(x-1)(x+2)$$

$$\frac{x}{x^2} = \frac{4-x}{x^2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{8+1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{8+1-\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{17}+2\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\ln y = \ln x \rightarrow y = x$$

$$\ln y = 2 \ln x \rightarrow y = x^2$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x \end{cases} \\ y = 0 \quad x = 0$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x \end{cases} \\ y = 2 \quad x = 2$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \\ y = 4 \quad x = 2$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\sin 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad | \quad \sin 9x - \cos 5x =$$

$$= \sin 9x - \sin(\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$= \sin 9x - \sin(\frac{\pi}{2} - 5x) =$$

$$= 2 \sin(9x - \frac{\pi}{4}) \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$a \geq 0$$

$$a = 7^2$$

$$a = 13^2$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+y+5+y-x+5 &= 10 & -2y &= 10 \\ x+y-5-y+x-5 &= 10 & 2x &= 10 \end{aligned}$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

