

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$9261 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

~~343 = 7^3~~

uuuuuuuu

$$343 = ?$$

$$1) 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 11$$

$$2) 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ - 28 \\ \hline 63 \\ - 63 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$\frac{87.6}{3.2} = 8.7 = 56$$

$n > k$

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$1) 56 \cdot 56$$

$$2) 56 \cdot 56 / 2$$

$$\text{Ответ: } 56^3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ - 26 \\ \hline 21 \\ - 20 \\ \hline 1 \\ - 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 384 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 0 \\ - 8 \\ \hline 6 \\ - 6 \\ \hline 0 \\ - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$129/3 = 43$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 27} \\ - 81 \\ \hline 116 \\ - 108 \\ \hline 81 \\ - 81 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 343 \\ \hline 27 \\ + 2401 \\ \hline 686 \\ + 9261 \end{array}$$

$$2. \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - 2\sqrt{2} \sin 2x \cos 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

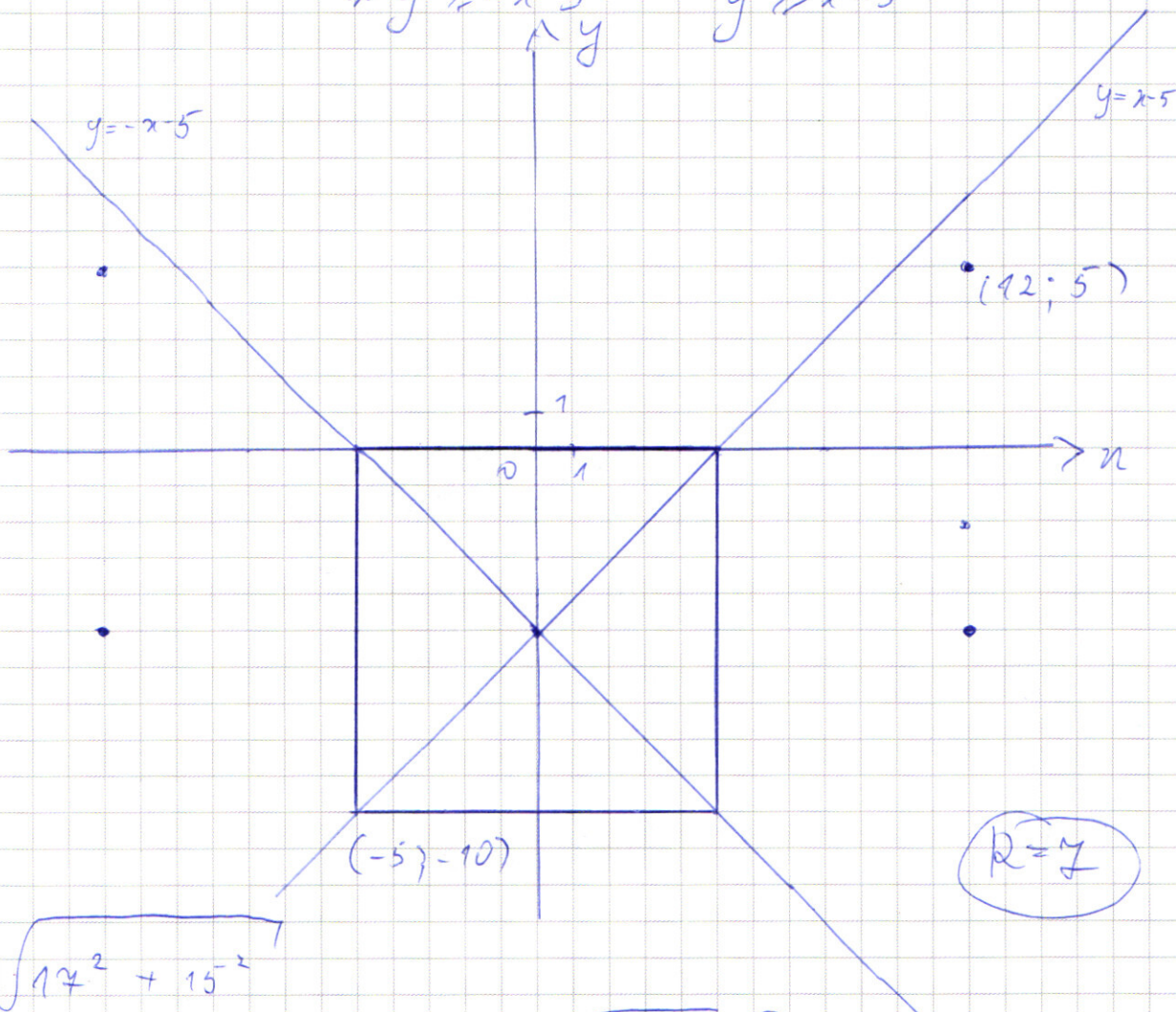
$$-\frac{1}{2} \sin 7x \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$1) \frac{1}{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \cos 2x$$

$$2) \sin 2x (\frac{1}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{№5. 1) } \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$1) \quad \begin{aligned} x+y+5 &\geq 0 & y-x+5 &\geq 0 \\ y &\geq -x-5 & y &\geq x-5 \end{aligned}$$



$$\sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$\sqrt{x^2 + 5^2} = \sqrt{x^2} > \sqrt{x^2}$$

$$1) \quad \begin{aligned} x+y+5 + y-x+5 &= 10 \\ 2y &= 0; y=0 \end{aligned}$$

$$2) \quad \begin{aligned} x+y+5 - y+x-5 &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{aligned} -x-y-5 - y+x-5 &= 10 \\ -2y &= 20 \\ y &= -10 \end{aligned}$$

$$1) \quad \begin{aligned} \cancel{x+y+5} - \cancel{y-x-5} &= 10 \\ -x-y-5 + y-x-5 &= 10 \\ -2x-10 &= 10 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$R=7?$$

~~scribbles~~

~~scribbles~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(yx^3)} \quad \text{ОДЗ} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln(yx^3)}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} / y^{\ln x^3}$$

$$x^{-2\ln x} / y^{\ln x} = y^{\ln y} / y^{\ln x^3}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x} = y^{\ln y}$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad + y^2; -14x^2$$

~~анализ~~

$$2y^2 - xy - 16x^2 + 8x - 4y = y^2 - 14x^2$$

~~применяем~~

$$4y^2 - 2xy - 36x^2$$

$$2y^2 - 2xy - 4x^2 + 16x - 8y = 0$$

$$(y-x)^2 + y^2 - 5x^2 + 16x - 8y = 0$$

$$(y-x)^2 + (y-4)^2 - 5x^2 + 16x - 16 = 0$$

$$(y-x)^2 + (y-4)^2 = 5x^2 - 16x + 16$$

$$y^2 - y(x+4) + (8x-2x^2) = 0$$

$$\Delta = (x+4)^2 - 4(8x-2x^2) = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$\frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$\frac{4x}{2}$$

$$\frac{-2x+8}{2}$$

$$\frac{x+4 \pm (-3x+4)}{2}$$

$$\frac{-2x+8}{2}$$

$$\frac{4x}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.
Дано: $R=10$, $\angle CAD=90^\circ$, $BF=BD$,
 $\angle BAC=12$

Найти: а) CF — ?
б) S_{ACF} = ?

Решение: окружности с центрами

очевидно, что $\angle AO_1B = \angle BO_2A = 2\angle$

AO_1BO_2 — ромб ($O_1A=AO_2=O_2B=BO_1$)

$\angle ACP$ и $\angle APD$ как внеш. углы равны $\angle$
то пр. $\triangle ACP$ — р.б и по опр. $AC=AP$

$CB=BD$ (AB — мед. выс. и бисс.)

$\triangle CAD$ — п/у, зн. $2\angle = 90^\circ$; $\angle = 45^\circ$

$\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$

$\triangle DBF = \triangle CBF$ ($CB=BD=BF$, $\angle FBD = \angle CBF$)

$\angle BCF = \angle BFC = \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

В $\triangle AO_1B$: ~~AB~~ $AB = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$

В $\triangle CAD$: $\angle CAD=90^\circ$ и $AC=AD \rightarrow$ зн. AB мед.

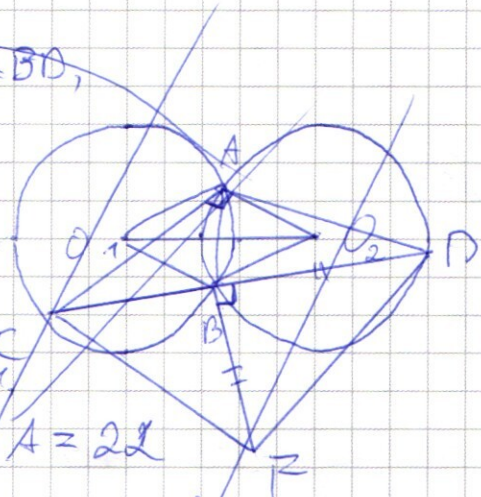
в п/у $\triangle$ и $AB=CB=BD$, то AB — бисс., зн.

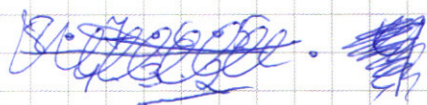
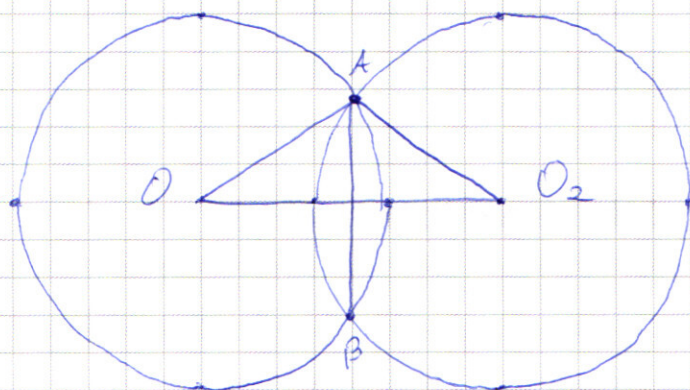
$\angle CAB = \angle DAB = 45^\circ$

$\angle CAB = 45^\circ$

$\angle CO_1B = 90^\circ$; $CB=AB=BD=BF = 10\sqrt{2}$

Из $\triangle CBF$. $CB=BF = 10\sqrt{2}$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = \cos 4x$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin\left(\frac{9x+5x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{9x-5x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 4x$$

$$2 \sin(7x) \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin(7x) \left(\cos 2x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\text{I} \quad \cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \text{II} \quad \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

I случай

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = 0$$

$$(\cos(\frac{\pi}{4} + 2x)) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

II случай

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

~~$$\sin\left(\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$~~

$$2\sin\left(\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{12}\pi + \frac{2}{9}\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Значит ответ будет таков:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{2}\pi n \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n \\ x = \frac{1}{12}\pi + \frac{2}{9}\pi n \end{cases} ; n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{2}\pi n; \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n; \frac{1}{12}\pi + \frac{2}{9}\pi n; n \in \mathbb{Z}$.
✓✓

□ □ □ □ □ □ □ □

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Значит произведение цифр числа равно $3^3 \cdot 7^3$. Этого можно добиться, если

- а) в числе три 3, три 7, а ост. единицы
 - б) в числе одна 3 одна 9, три 7, а ост. единицы
- (“6” не подсчитываем, т.к. “2”)

Если “посчитать” кол-во способов для а) и б), а потом сложить, мы получим ответ

а) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 10 = 560$ способов

б) $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} \cdot 2 = 560 \cdot 2$ способов

$$560 + 560 \cdot 2 = 560 \cdot 3 = 1680$$

Ответ: 1680.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2) \int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\sqrt{3} \ln(y/x^2)}$$

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(1) y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2x^2 + 8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm \sqrt{(3x-4)^2}}{2} = \frac{x+4 \pm |3x-4|}{2}$$

При любом раскрытии модуля у равен

$$1) y = \frac{4x}{2} = 2x \quad \text{или} \quad 2) y = \frac{-2x+8}{2} = -x+4$$

Подставим во (2):

$$\begin{aligned} I \quad & \begin{cases} y=2x \\ (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \end{cases} \\ & (x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2x/x^2)} \end{aligned}$$

логарифмируем по осн. e:

$$\ln(16x^6) \cdot (-\ln x) = \ln(2x) \ln(2/x^6)$$

$$(4\ln 2 + 6\ln x) \cdot (-\ln x) = (\ln 2 + \ln x)(\ln 2 - 6\ln x)$$

Пусть $\ln x = t$;

$$((4\ln 2) + 6t)(-t) = (\ln 2 + t)(\ln 2 - 6t)$$

$$-4\ln 2 \cdot t + 6t \cdot (-t) = 2\ln 2 + (\ln 2) \cdot t - 6t(\ln 2) - t^2$$

$$2\ln 2 = \text{сокращено на } \ln 2$$

$$-4t = 2 + t - 6t$$

$$-4t = 2 - 5t$$

$$t = 2$$

$$\ln x = 2$$

$$\begin{cases} x = e^2 \\ y = 2e^2 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(yx^7)} \end{cases} \quad ODB_2 \quad x < 4$$

$$(x^2 \cdot (4-x)^4)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln(1-x+4/x^7)}$$

Логарифмирую по осн. e:

$$\ln(x^2 \cdot (4-x)^4) \cdot (-\ln x) = \ln(-x+4) \ln\left(\frac{-x+4}{x^7}\right)$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 \cdot (4-x)^4) = (\ln(4-x) + 7\ln x) \ln(4-x)$$

$$-2(\ln x)^2 - 4\ln x(\ln(4-x)) = (\ln(4-x))^2 + 7\ln x \ln(4-x)$$

$$2(\ln x)^2 = 3\ln x \ln(4-x) + (\ln(4-x))^2 = 0$$

$$D = 9(\ln(4-x))^2 - 8\ln^2(4-x) = (\ln(4-x))^2$$

$$\ln x_{1,2} = \frac{3 \ln(4-x) \pm \ln(4-x)}{4}$$

$$\ln x_1 = \ln(4-x) \Rightarrow x_1 = 2 \quad y_1 = 2$$

$$\ln x_2 = \frac{1}{2} \ln(4-x) \Rightarrow x = \sqrt{4-x}$$

$$(1) \begin{cases} \sqrt{4-x} = x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$(1) 4-x = x^2 \quad ; \quad x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 4-x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $\begin{cases} x = e^2 \\ y = 2e^2 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$(1) \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

(1) Это уравнение даёт четыре случая, если нарисовать графики функций этих случаев, получится квадрат

$$1) x+y+5+y-x+5=10$$

$$y=0$$

$$2) x+y+5-y+x-5=10$$

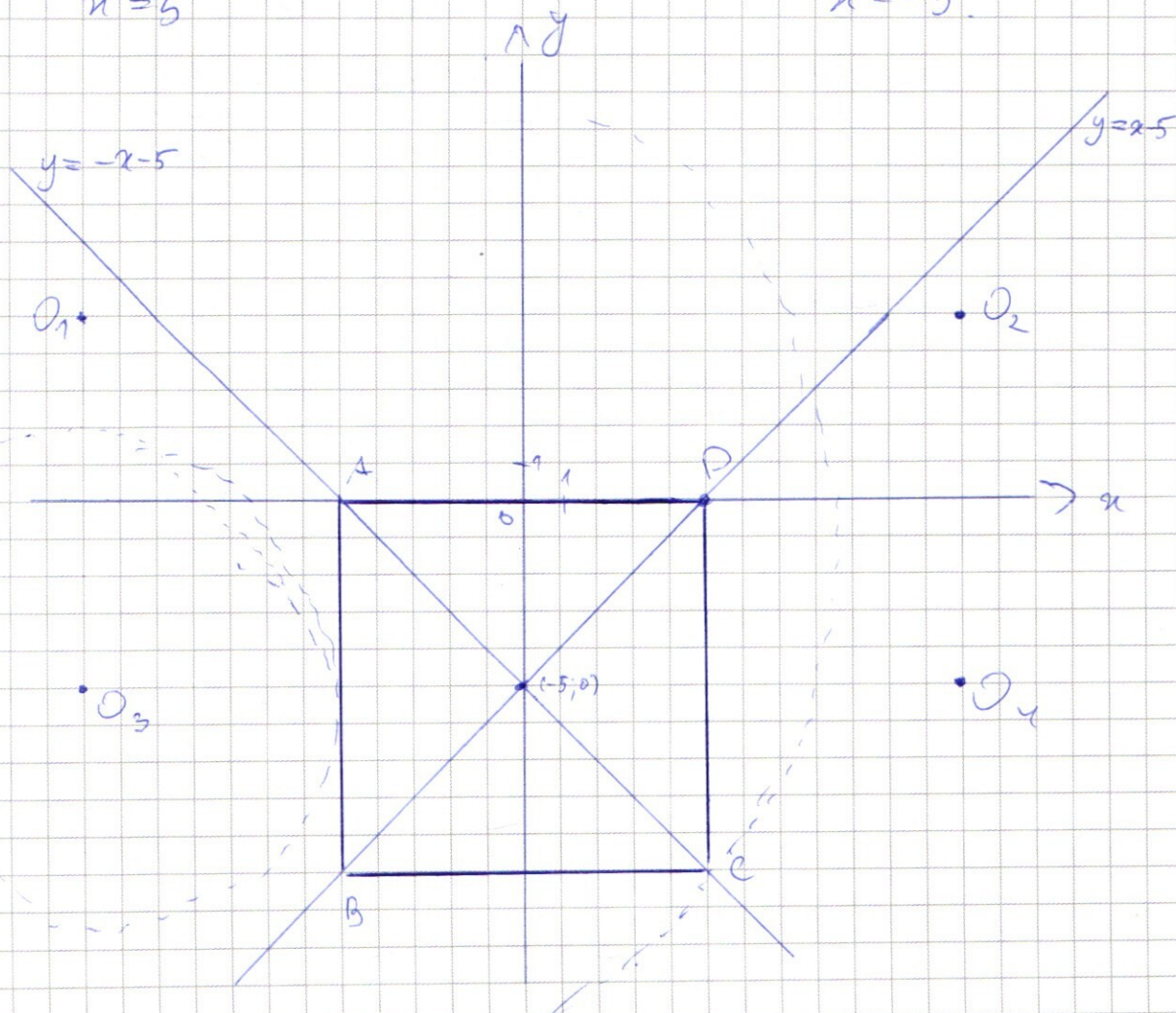
$$x=5$$

$$3) -x-y-5-y+x-5=10$$

$$y=-10$$

$$4) -x-y-5+y-x+5=10$$

$$x=-5$$



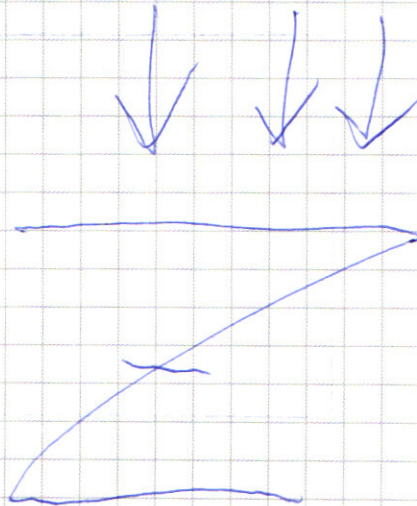
12) уравнение даёт четыре окружности в своих
 четвертях четверных, ~~при этом радиусы~~
~~они одинаковы~~. Их центры это
 т. $(-12; -5), (-12; 5), (12; -5), (12; 5)$. Их радиус
 это $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$).

Очевидный случай, когда окр. с ц. $(-12; -5)$ и
 $(12; -5)$ касаются квадрата (при этом расстояния
 от центров верхних окружностей до квадрата
 больше их радиусов, $\sqrt{4^2+5^2} > \sqrt{a}$). При этом
 $R \geq 7$, а $a = 49$.

И затем два решения будет только если
 окр. с ц. O_1 и O_2 будут проходить через
 т. C и B соответственно. Посчитано
 радиус, как расстояние м. т. O_1 и C :
 $R = \sqrt{(-12-5)^2 + (5-10)^2} = \sqrt{17^2 + 15^2}$, и $a = 17^2 + 15^2$
 $= 289 + 225 = 514$.

Ответ: $a = 49; 514$.

6 номер на след. месте!



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 9. В окружности с радиусом 10. Прямая с концами~~
N 6

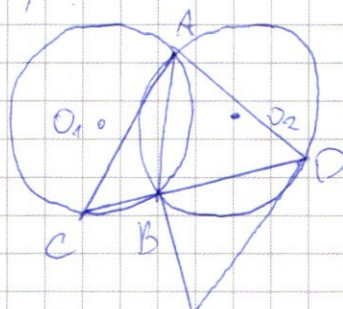
Дано: $R = 10$, $\angle CAD = 90^\circ$

$BF = FD$

1) $BC = 12$

Найти: а) CF - ?

б) S_{ACF} - ?



Решение: Пусть $\angle CAB = \alpha$,

тогда $\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. т.к. $\triangle ACB$ впис. в окр.,

то $10 = R = \frac{BC}{2 \sin \alpha}$, $BC = 2R \cdot \sin \alpha$

Аналогично из $\triangle ABD$ $BD = 2R \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$

$BF = FD = R \cos \alpha$

Из п/у $\triangle BCD$ по т. Пиф.: $CF^2 = BC^2 + BD^2 -$
 $4R^2 \sin^2 \alpha + 4R^2 \cos^2 \alpha = 4R^2$

$$CF = 2R = 20$$

б) Если $BC = 12$, то $2R \sin \alpha = 12$;

$$\sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \cos \alpha = 0,8$$

из п/у $\triangle BCF$: $\cos \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = 0,6 =$
 $= \sin \alpha$, а из пункта а):

$$CD = 2R (\sin \alpha + \cos \alpha) = 2 \cdot 10 \cdot (0,6 + 0,8) =$$

 $= 20 \cdot 1,4 = 28$

т.к. окружности одинаковы и $\angle ACB = \angle ADB$

(на осн. перпен. опр.) но известно
~~тоже~~ что $\angle ACD = 45^\circ$ $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$
 $AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 20 = 10\sqrt{2}$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 20 = 100\sqrt{2}$$

Ответ: а) 20 б) $100\sqrt{2}$.

