

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$9261 = 3^3 \cdot 4^3 \Rightarrow$ в восьмизначном числе должно быть три семерки и либо три тройки, либо тройка и девятка, остальные единицы. Рассмотрим первый случай:

кол-во вариантов выбрать места для троек C_8^3 , для каждого из этих вариантов выбрать места для семерок $C_{8-3}^3 = C_5^3$, места для единиц зададутся однозначно $\Rightarrow$ в этом случае кол-во чисел $C_8^3 \cdot C_5^3 = 560$.

Рассмотрим второй случай: кол-во способов выбрать место для тройки 8, для каждого из этих способов есть 4 способа выбрать место для девятки, и для каждого из этих способов есть C_6^3 способов выбрать места для трёх семерок ~~и~~, места для единиц зададутся однозначно $\Rightarrow$ в этом случае кол-во чисел $8 \cdot 4 \cdot C_6^3 = 1120 \Rightarrow$ всего чисел

$$560 + 1120 = 1680.$$

Ответ: 1680.

N 3.

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

Слева в степени $-\ln x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x^7 > 0 \Rightarrow y > 0$.

Логарифмируем обе части по основанию e .

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(\frac{y}{x^7}) \cdot \ln y$$

$$-\ln x \cdot (\ln x^2 + \ln y^4) = (\ln y - \ln x^7) \cdot \ln y$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 7\ln x \cdot \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \cdot \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - \ln x^2) = 0$$

$$\ln y = \ln x$$

$$y = x$$

$$\ln y = \ln x^2$$

$$y = x^2$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$$

$$y = \frac{x+4-3x+4}{2} = -x+4$$

Если $y = x$ и $y = 2x$, то $x = 0$ — не подходит.

Если $y = x^2$ и $y = 2x$, то $x = 0, x = 2$; подходит

$$x = 2, y = 4.$$

Если $y = x$ и $y = -x+4$, то $x = 2, y = 2$

Если $y = x^2$ и $y = -x+4$, то $x^2 + x - 4 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \text{ подходит только } x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $x = 2, y = 2$

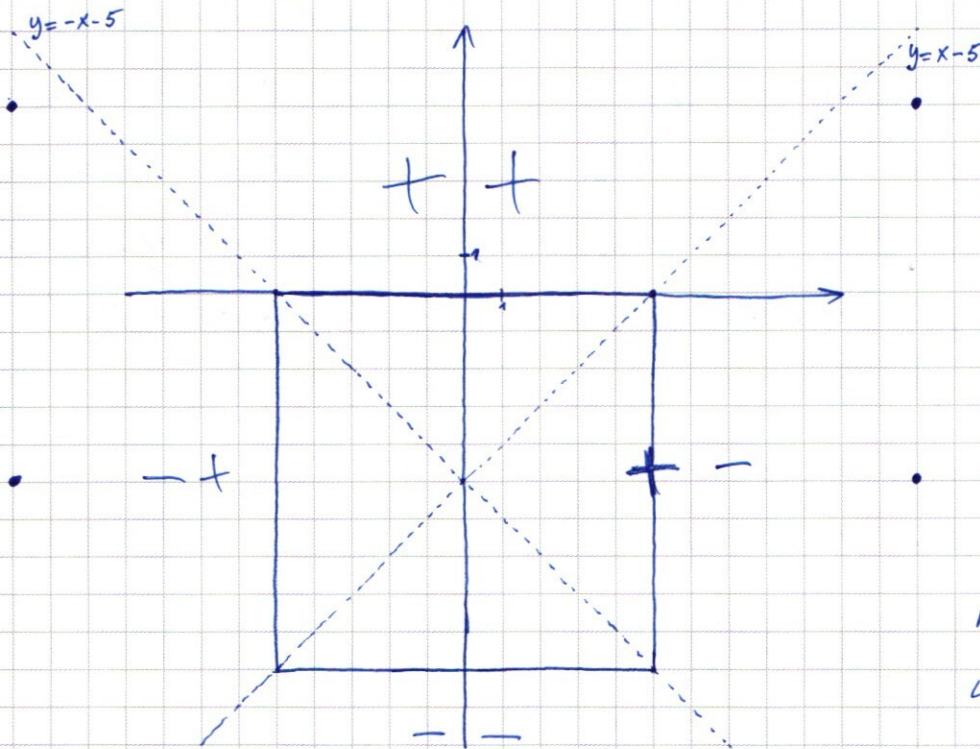
$$x = 2, y = 4$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ ((x|-12)^2 + (y|-5)^2 = a \quad a \geq 0 \end{cases}$$



Чтобы понять,
как раскрыть
модули, пос-
смотрим прямые
 $y = x - 5$ и $y = -x - 5$,
они разобьют
плоскость на
4 зоны.

$$++: x+y+5+y-x+5=10$$

$$y=0$$

$$+-: x+y+5-y+x-5=10$$

$$x=5$$

$$-+: -x-y-5+y-x+5=10$$

$$x=-5$$

$$--: -x-y-5-y+x-5=10$$

$$y=-10$$

Графиком

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

является квадрат со
сторонами 10, центр в $(0; -5)$.

Графиком $((x|-12)^2 + (y|-5)^2 = a$

являются 4 окружности
радиуса $\sqrt{a}$ с центрами
в $(12; 5), (-12; 5), (12; -5), (-12; -5)$.

При $5a = 49$ будет 2 решения: окружности с центрами $(12; -5)$ и $(-12; -5)$ касаются квадрата $\Rightarrow a = 49$ подходит. При $a < 49$ решений нет. При увеличении a окружности с этими центрами будут пересекать квадрат в 4 точках (когда точки пересечения окружностей лягут на стороны квадрата, то квадрат пересекнет окружности с другими центрами), затем окружности с центрами $(12; 5)$ и $(-12; 5)$ будут пересекать окружность в 4 точки, пока окружности не дойдут до нижних вершин квадрата $(12; -5)$ и $(-12; -5)$. Тогда будет 2 решения и $a = 15^2 + 17^2 = 514$.

Ответ: $a = 49; 514$.

N2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = \cos 4x$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \left(\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \quad 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = \cos 4x$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \left(\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \sin \frac{\frac{3\pi}{4} - x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + x}{4} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - x}{4} = 0$$

$$\sin \frac{10x}{4} \cdot \cos \frac{8x + \frac{\pi}{2}}{4} = 0$$

$$\sin \frac{10x}{4} = 0$$

$$\frac{10x}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{10x = \pi + 4\pi n}$$

$$\cancel{10x = \pi + 4\pi n}$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \frac{8x + \frac{\pi}{2}}{4} = 0$$

$$\frac{8x + \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$8x + \frac{\pi}{2} = 2\pi + 4\pi m$$

$$8x = \frac{3\pi}{2} + 4\pi m$$

$$x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}.$

$$x = \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

№ 6.

Пусть $BF \cap AC = E$. $\angle EBD = \angle EAD = 90^\circ \Rightarrow AECD$ — вписанный $\Rightarrow E$ лежит на внешней окружности. Окружности равны $\Rightarrow$ дуги AB в обеих окружностях равны $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 27 \cdot 343 = 27 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$33377711$$

$$39777111$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} +$$

$$+ 56 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8}{8} \cdot \frac{24 \cdot 5}{8} + 56 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 8}{8} = 560 + 56 \cdot 20 =$$

$$= 56 \cdot 30 = 1680$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$e^{-2} \cdot y^{-4\ln x} = e^{\ln y - \ln x^2}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{2\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(\frac{y}{x^2}) \cdot \ln y$$

$$-\ln x \cdot (\ln x^2 + \ln y^4) = (\ln y - \ln x^2) \cdot \ln y$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 7\ln x \cdot \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \cdot \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - 2\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\ln y = \ln x^2$$

$$y = x^2$$

$$\ln y = \ln x$$

$$y = x$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ + 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$x > 0, y > 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy + 0,25x^2 - 0,25x^2 - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x+4) = 0$$

$$y^2 - (x+4)(y+2x) = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$$

$$y = \frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{-2x+8}{2} = -x+4$$

$$x^2 = 2x \quad x = 2, y = 4$$

$$x = 2x \quad x = 0$$

$$x = -x+4 \quad x = 2, y = 2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, y =$$

$$(4 \cdot 16)^{-\ln 2} = 2^{\ln(\frac{1}{64})} \quad \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{1+17-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$(4 \cdot 256)^{-\ln 2} = 4^{\ln \frac{1}{32}} \quad \frac{\sqrt{17}-1}{2} + 4 = \frac{\sqrt{17}-7}{2}$$

$$1024^{-\ln 2} = 2^{\ln \frac{1}{1024}}$$

$$\sqrt{17}-7 \quad \sqrt{9-\sqrt{17}}$$

$$2\sqrt{17} \quad \sqrt{16} \quad y = -x-5$$

$$y = x-5$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$y = -x-5 \quad y = x-5$$

$$x=1: |y+6| + |y+4| = 10$$

$$225 + 49 = 274$$

$$y=1: |x+6| + |x-6| = 10$$

$$\sqrt{15^2 + 17^2} =$$

$$y=-1: |x+4| + |x-4| = 10$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x$$

$$++ \quad x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$+- \quad x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$x=5 \quad y=0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$-+ \quad -x-y-5 + y-x-5 = 10$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

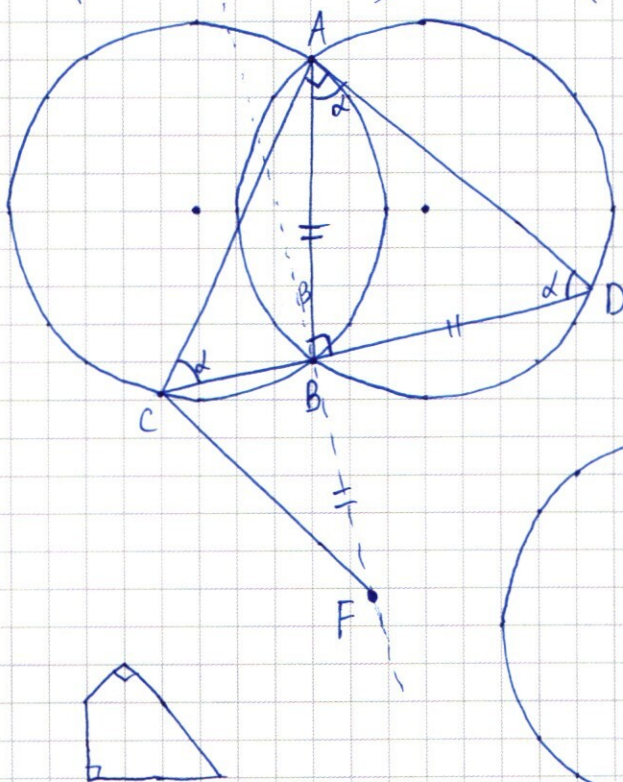
$$x = -5$$

$$-- \quad -x-y-5 - y+x-5 = 10$$

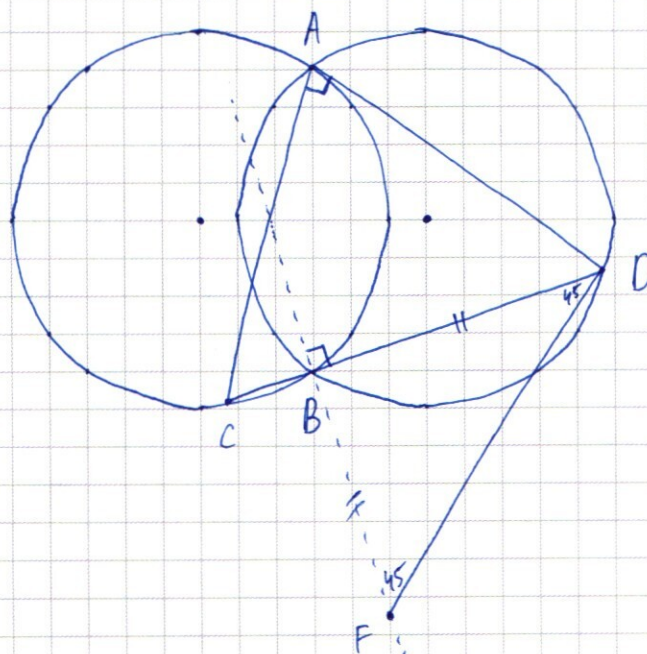
$$y = -10 \quad |x-5| + |x+5| = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

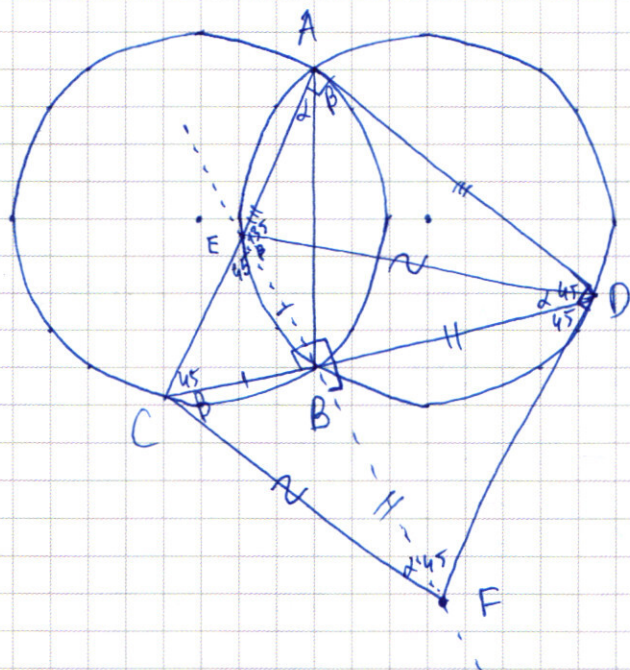
$$\begin{aligned}
 & 4\cos^3 3x - 3\cos 3x - \cos(3x+2x) + 3\sin 3x - 4\sin^3 3x + \sin(3x+2x) = \sqrt{2}\cos 4x \\
 & 4(\cos 3x - \sin 3x)(\cos^2 3x + \sin 3x \cdot \cos 3x + \sin^2 3x) - 3(\cos 3x - \sin 3x) \\
 & (\cos 3x - \sin 3x)(\sin 3x \cdot \cos 3x + 1) - \cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin 2x + \\
 & + \sin 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x = \sqrt{2}\cos 4x \\
 & \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 5x \cdot \cos 4x + \cos 5x \cdot \sin 4x + \sin 5x \\
 & \cos 5x(\cos 4x - 1 + \sin 4x) - \sin 5x(\sin 4x + \cos 4x - 1) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x \\
 & (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 4x + \sin 4x - 1) = \sqrt{2}\cos 4x \\
 & -\cos 3x(\cos 2x - \sin 2x) + \sin 3x(\cos 2x + \sin 2x)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & AD^2 = BD \cdot CD \\
 & 180 - 2\alpha = 90 - \beta \\
 & 2\alpha + \beta = 90 \\
 & \alpha + 90 - \beta
 \end{aligned}$$



$y \leq$



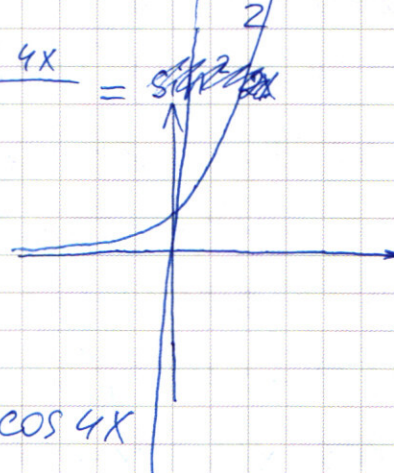
$$r = \frac{2a+h}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{(2a+h) \cdot a^2 \sqrt{2}}{8} = 10$$

$$180 - 45$$

$$\cos^2 \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1 + \cos(4x + \frac{\pi}{2})}{2} =$$

$$= \frac{1 - \sin 4x}{2} = \sin^2 2x$$



$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = \cos 4x$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = \cos 4x$$

$$\sin 9x + \sin(\frac{\pi}{2} - 9x) + \sin 5x - \sin(\frac{\pi}{2} - 5x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos 2x + 2 \sin \frac{2}{2} x \cdot \cos(\pi - 14x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos 2x + 2 \sin 2x \cdot \cos 14x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) + \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \cos 7x \cdot \cos \frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} = \cos 4x$$

$$2 \cdot \cos 7x \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$2 \cdot \cos 7x \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x) = \cos 4x$$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x - \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 4x + \cos 5x \cdot \sin 4x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x(\cos 5x - \sin 5x) + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) + (\sin 4x - 1)(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) + (\sin 4x - 1)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$