

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

Таими образом число может быть двух типов:

- 1) Состоит из ~~трех~~ трех троек, трех семерок и двух единиц

~~Число может быть~~

Тройки мы можем разместить C_8^3 способами, семерки на оставшихся мест C_5^3 способами, единицы на оставшиеся два места $C_2^2 = 1$ способом.

Всего чисел первого типа $C_8^3 \cdot C_5^3$

- 2) Из одного девяти, одной тройки, трех семерок, и трех единиц.

Три семерки на 8 мест C_8^3 способов

Три единицы на оставшихся мест C_5^3 см.

Девятку и тройку на 2 ост. места 2 см.

Всего чисел 2-го типа $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$

Всего чисел 1-го и 2-го типов $C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 =$

$$= 3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = 3 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 3 \cdot \frac{8!}{6^2 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 6} =$$

~~Всего чисел~~

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 1680.$$

Ответ: 1680.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

Р-м отделимо по y р-е (1):

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \Leftrightarrow \left((e^{\ln x})^2 (e^{\ln y})^4 \right)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln(x^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{(2\ln x + 4\ln y) \cdot (-\ln x)} = e^{\ln y \cdot (\ln y - 2\ln x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\ln^2 x - 4\ln x \ln y = \ln^2 y - 2\ln x \ln y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln^2 y - 2\ln x \ln y - \ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\ln y - \ln x)(\ln y - 2\ln x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y - \ln x = 0 \\ \ln y - 2\ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, & (3) \\ y = x^2, & (4) \end{cases}$$

Подставим (3) в (2), получим:

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ не подходит по ОДЗ.

или $x = 2$ $y = 2$. пара $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ является решением системы.

Подставим (4) в (2) получим:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{не подходит по ОДЗ} \\ x = 2 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ также не подходит по ОДЗ}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x=2$: $y=2^2=4$; пара $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ - решение

при $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0$: $y = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

пара $\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ - решение.

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

5.

$$\begin{cases} |x+y-5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-2)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

при $a < 0$ решений нет, ~~при $a = 0$~~ Г.Ч.

Сумма ~~двух~~ квадратов ≥ 0

решим ур-е (1):

$$|x+y-5| + |y-x+5| = 10$$

а) ~~$|x+y-5| \geq 0$~~ $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$

$$(x+y+5) + (y-x+5) = 10 \Leftrightarrow y = 0$$

б) $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$

ур-е (1) $\Leftrightarrow x = -5$

в) $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$

ур-е (1) $\Leftrightarrow y = -10$

г) $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$

ур-е (1) $\Leftrightarrow x = 5$

Решить ур-е (2)
 $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$

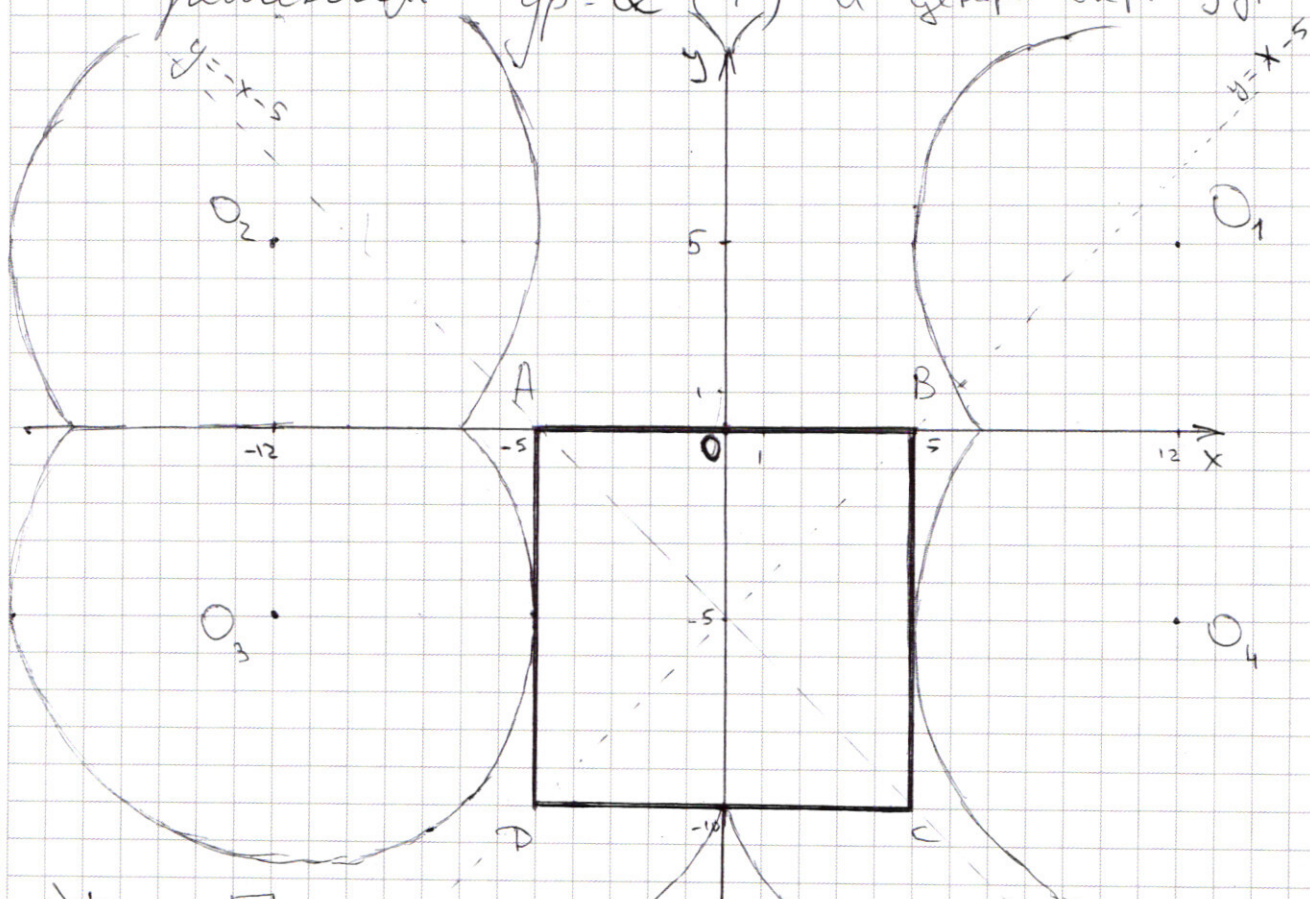
а) при $x, y \geq 0$: $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ - окр., ограниченная
 I четвертью, центр $(12; 5)$, радиус $\sqrt{a}$

б) $\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$: $(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$ - окр., окр.
 II четвертью, центр $(-12; 5)$, радиус $\sqrt{a}$

в) $x, y \leq 0$: $(x+12)^2 + (y+5)^2 = a$ - окр., окр.
 III четвертью, центр $(-12; -5)$, радиус $\sqrt{a}$

г) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$: $(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$ - окр., окр.
 IV четвертью, центр $(12; -5)$, радиус $\sqrt{a}$

Изобразим на плоскости xOy ин-во
 решений ур-я (1) и центры окр. из ур-я (2)



1) При $\sqrt{a} < 7$ ~~решений нет~~ (т.е. $\rho(O_3; AD) = \rho(O_4; BC) = 7$); т.е. при $a \leq 49$ решений нет.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) При $\sqrt{a} = 7$, т.е. $a = 49$: «Окружности» с центрами O_3 и O_4 касаются AD и BC соответственно, а «Окружности» с центрами O_1 и O_2 не пересекают квадрат $ABCD$. Получаем 2 решения

3) При $49 < a < 169$ каждая из «Окружностей» с центрами O_3 и O_4 пересекает квадрат $ABCD$ в 2х точках, поэтому ~~у системы~~ система имеет более 2 решений.

~~4) При~~ При $a > 169$ «Окружности» 3 и 4 пересекают квадрат $ABCD$.

$$\bullet AO_2 = BO_1 = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74} < 13$$

$$\bullet OO_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

4) При $a = 169$: ~~первая~~ «Окружности» 1 и 2 пересекают квадрат $ABCD$ в точке $O(0;0)$ «Окружности» ~~2~~ 3 и 4 пересекают квадрат в точках $O(0;0)$ и $(0;-10)$.

Таким образом у системы 2 решения.

5) При $a > 169$ все «Окружности» не пересекают квадрат.

Таким образом у системы 2 решения
или $a = 49$; $a = 169$

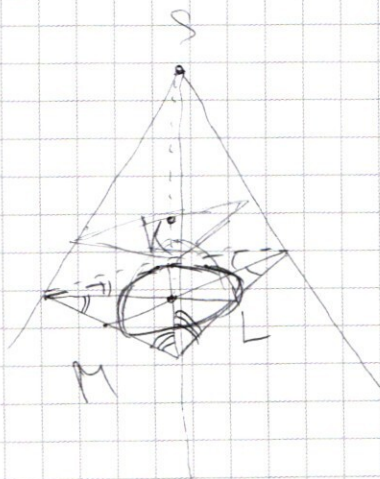
Ответ: 49; 169.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

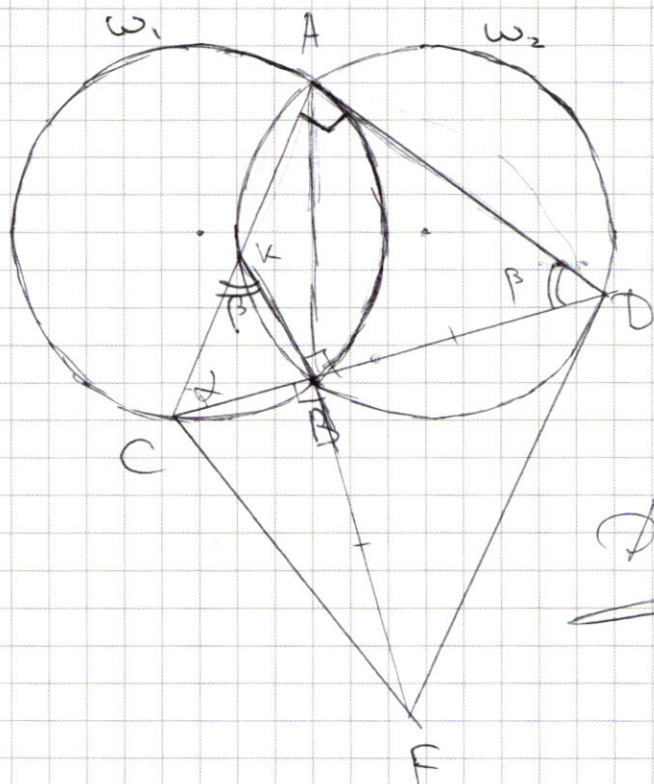
$$\begin{aligned} \ln^2 y - 2 \ln y \ln x + 2 \ln^2 x &= 0 \\ \ln^2 y - 2 \ln y \ln x - \ln y \ln x + 2 \ln^2 x &= 0 \\ \ln y (\ln y - 2 \ln x) - \ln x (\ln y - 2 \ln x) &= 0 \\ (\ln y - \ln x) (\ln y - 2 \ln x) &= 0 \\ \begin{cases} \ln y = \ln x \\ \ln y = 2 \ln x \end{cases} &\quad \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 6x + 8 &= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 4x + 8 \\ &= x^2(x-2) + x(x-2) - 4(x-2) = \\ &= (x-2)(x^2 + x - 4) \end{aligned}$$

$\Delta = 1 + 16 = 17$



2 сукка?



$$R_1 = R_2 = 10$$

$$B \cdot d = BF$$

$$\angle CAD = \angle DBF = 90^\circ$$

CFD

ФК - Диаметр

$$CF^2 = \cancel{B}C^2 + BF^2 = (CD - BD)^2 + BF^2 =$$

$$= CD^2 - 2CD \cdot BD + 2B\cancel{D}F^2$$

~~AC~~ $AC^2 + AD^2 = CD^2$

$$AK^2 + AB^2 = DK^2 = 400 = 20^2$$

$$AC \cdot CK = CD \cdot BC = \deg C \text{ or } \omega_2$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{AC}{CA} = \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\frac{AB}{\sin B} = \frac{AB \cdot CD}{AC} = 20$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3^2 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7^3 \\ 1 & \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

В числе должно быть 3 семёрки

1) 3 семёрки, 3 шестёрки, ос. единицы

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \quad \text{способа}$$

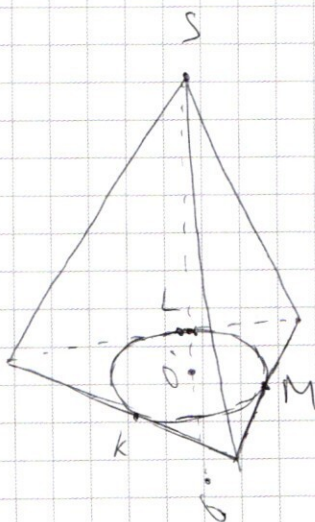
2) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ способа

всего: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2$

~~$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$~~
~~$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$~~
~~$$\cos \alpha \cos \beta$$~~

$$\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$



$\angle KSO = ?$

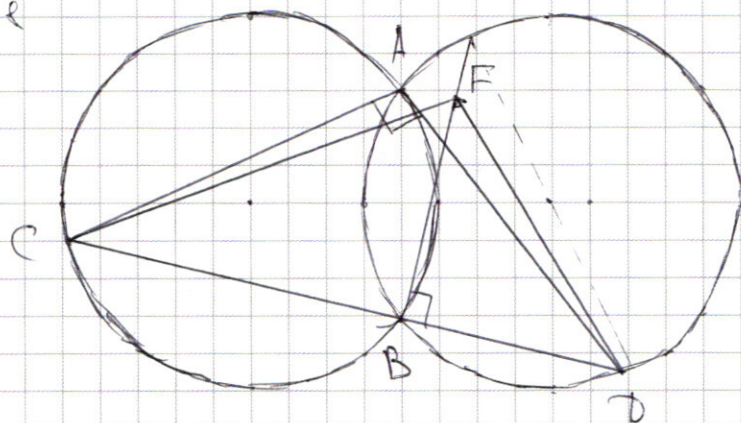
$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\cos 9x = \cos(4x+5x) = \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

$$R_1 = R_2 = 10$$



$$CF = ?$$

$$\begin{aligned} y &= e^{\ln y} \\ x &= e^{\ln x} \end{aligned}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \\ + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x (\sin 5x + \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + \\ + \sin 5x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(x^7)} & \text{ODЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = y^2 - 2xy + xy + x^2 - 3x^2 + 8x - 4y :$$

$$\cancel{x^2 - y^2}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$\begin{aligned} (e^{\ln x})^2 (e^{\ln y})^4)^{-\ln x} &= e^{\ln^2 y - 7 \ln y \ln x} \\ e^{(2 \ln x + 4 \ln y) \cdot (-\ln x)} &= e^{\ln^2 y - 7 \ln y \ln x} \end{aligned}$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln y \ln x + 2 \ln^2 x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10;$$

~~Д: $x \geq 0, y \geq 0$!~~

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10 \Leftrightarrow y = 0$$

$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$-x-y+5 + y-x+5 = 10 \Rightarrow x = -5$$

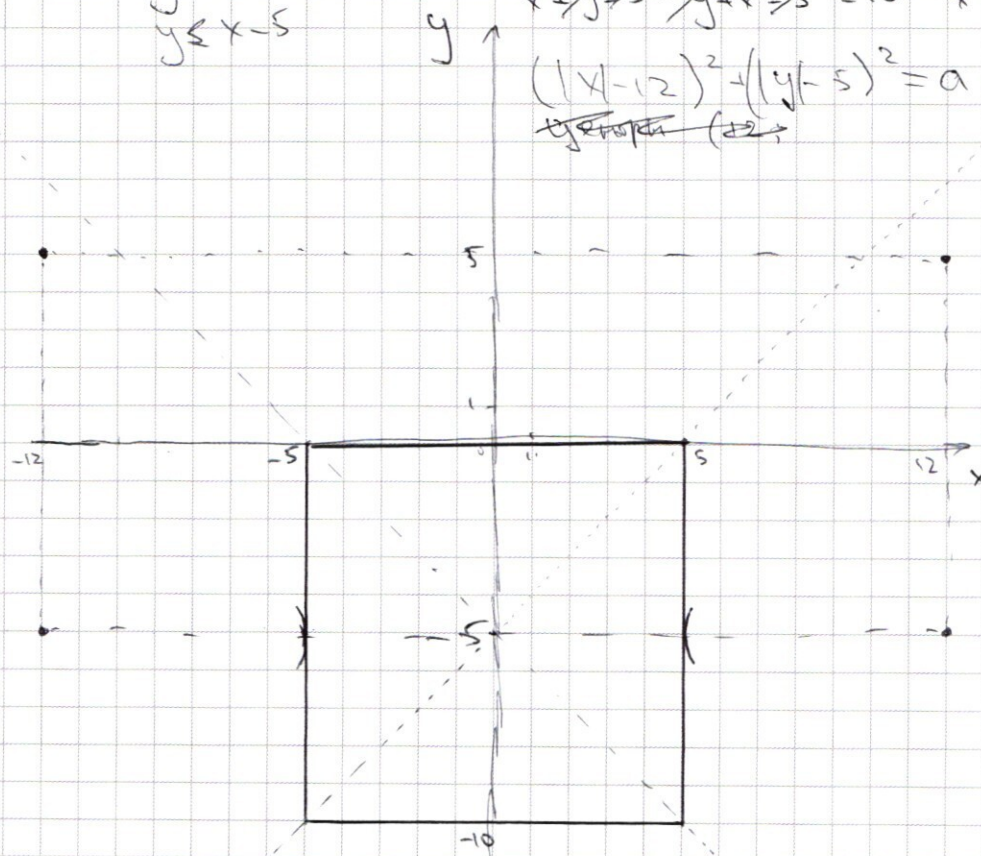
$$\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$$

$$x-y-5 - y+x-5 = 10 \Rightarrow y = -10$$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$$

$$x+y+5 - y+x-5 = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$



$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a \quad a \geq 0$$

$x, y \geq 0$:

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a \quad \text{— центр } (12; 5) \text{ радиус } \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = a \quad \text{— } (-12; 5) \text{ радиус } \sqrt{a}$$

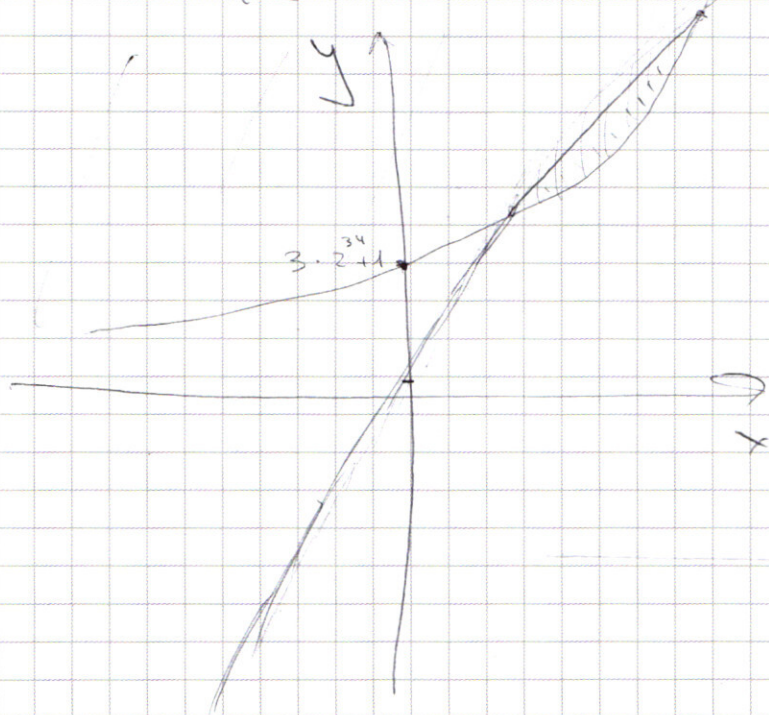
$$x, y \leq 0$$

$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = a \quad \text{— } (-12; -5) \text{ радиус } \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} y \leq 0, \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a \quad \text{— } (12; -5) \text{ радиус } \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x \end{cases}$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x$$