

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Разложим число 9261 на простые множители:

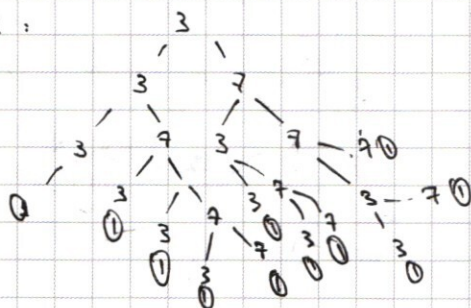
$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Т.к. это число должно получиться из произв. цифр числа, ^{Значит.}
то 3 цифры это числа - тройки, 3 - семерки, а оставшиеся две
цифры - единицы.

Теперь посчитаем кол-во таких комбинаций:

Сначала посчитаем кол-во ~~разных~~ расстановок двух единиц в
восьми позициях: $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ расстановок

Далее считаем кол-во расстановок трех троек и трех семерок
в шести позициях: $10 \cdot 2 = 20$ расстановок



Т.к. это расстановки независимые, то перемножим их: $20 \cdot 28 = 560$ -
всего расстановок.

Ответ: 560 чисел.

№2 $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$(\sin 9x + \cos 9x) - (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x \right) = 0$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2 \cdot \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - 2 \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \left(\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$$

$$0 + 2\pi a \leq \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \leq \pi + 2\pi a, a \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi a \leq \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi a$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi a \leq \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi a$$

$$\frac{3\pi}{8} + 2\pi a \leq \frac{9x}{2} \leq \frac{5\pi}{2} + 2\pi a$$

$$\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi a}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi a}{3}$$

$$\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi a}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi a}{3}, a \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(9x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

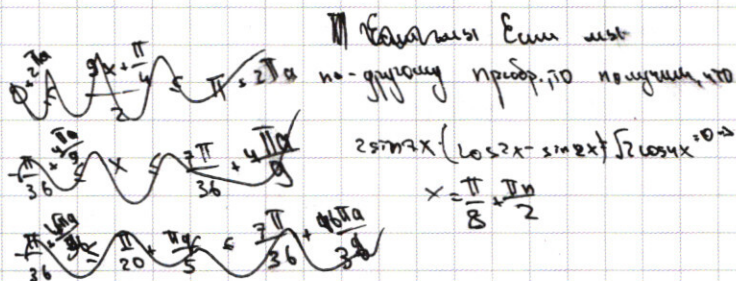
$$2 \cos(5x + \frac{\pi}{4}) \cos 4x = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi q, q \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi q}{5}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$$



$$\text{Orbit: } \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \frac{\pi}{20} + \frac{\pi q}{5}, n, q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{№3 } \begin{cases} (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$2x^2 + x(y-8) - y^2 + 4y = 0$$

$$D = y^2 - 16y + 64 + 8y^2 - 32y = (3y-8)^2$$

$$x = \frac{8-y \pm (3y-8)}{4}$$

$$x = y/2, \quad x = 4-y$$

Решения 2 ур-ие:

$$x, y > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2 y} \right)^{\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{x^{2 \ln x}} \Rightarrow \frac{2 \ln x}{x^2 y^{\ln y}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln y}} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{x^{2 \ln x}} = \frac{y}{y^{\ln y}} \Rightarrow \frac{x}{x^{2 \ln x}} = \frac{y}{y^{\ln y}} \Rightarrow$$

$$2 \ln x \cdot (\ln y - \ln x) = \ln y \cdot (\ln y - \ln x) \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\ln y - \ln x)(2 \ln x - \ln y) = 0$$

$$\ln y = \ln x$$

или

$$2 \ln x = \ln y$$

$$U_3 \text{ и } y = x \text{ или } y = 2x \text{ или } y = 4 - x \rightarrow$$

$$y = 2x: \ln 2x = \ln x$$

$\emptyset$

$$2 \ln x = \ln 2x$$

$$x^2 = 2x$$

$$x = 0$$

$\emptyset$

$$x = 2 \text{ - подходит}$$

$$y = 4$$

$$y = 4 - x \rightarrow$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$2 \ln x = \ln 4 - x$$

$$4 - x = x$$

$$x = 2 \text{ - подходит}$$

$$y = 2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \emptyset$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0$$

Подходит

$$\text{Отв: } (2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$N^{\circ} 5 \quad \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 = 0 \end{cases} \quad 2 \text{ реш}$$

Заметим, что в первом уравнении если x заменить на $-x$,

то ничего не поменяется, т.е. если подходит пара $(a; b)$, то будет

подходить пара $(-a; b)$. Однако, у $|y|$ будет только 5 в максимуме будет

минимум 2 решения, которые будут симметричны относительно точки $(-5; 5)$

Таким образом x может быть равен только нулю $\Rightarrow 2|y+5| = 10; |y+5| = 5$
 $y = 0, y = -10$

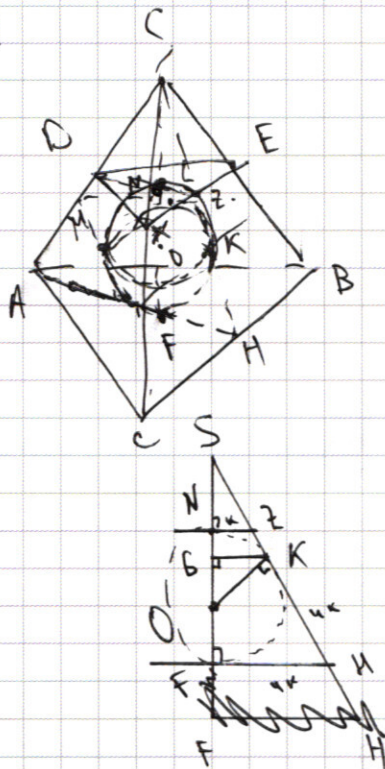
Подставим во второе ур-ие:

$$144 + 25 = a \Rightarrow a = 169 - \text{площадь}$$

Площадь: $169 = (144 + 25) = 169$

Ответ: 169

№4



Пусть точки N и F — точки касания
внешней с окр.

$$S_{ABC} = 16, S_{DEF} = 1, \text{ эти треугольники подобны } \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{16}{1} \Rightarrow k = 4 \quad (\text{коэф. подобия})$$

Т.к. треуго. DEF и ABC подобны, то

~~DEF и ABC~~ также будут подобны треуго.

и XNZ и CFH с таким же коэф. подобия

$$NZ : FH = 1 : 4$$

Нам и Найдём планиметр. чертеж:

По св-ву впис. окр. в угол: $NZ = ZK, KH = FH$

$$NZ = k, FH = 4k \Rightarrow ZH = 5k$$

$$\triangle SNZ \sim \triangle FSH \Rightarrow (SZ = x) \quad \frac{SZ}{SH} = \frac{NZ}{FH} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+5k} = \frac{k}{4} \Rightarrow 4x = x + 5k \Rightarrow x = \frac{5k}{3}$$

$$\triangle SNZ: \sin \angle NSZ = \frac{NZ}{SZ} = \frac{k}{\frac{5k}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle NSZ = \arcsin \frac{3}{5} = \angle KSO$$

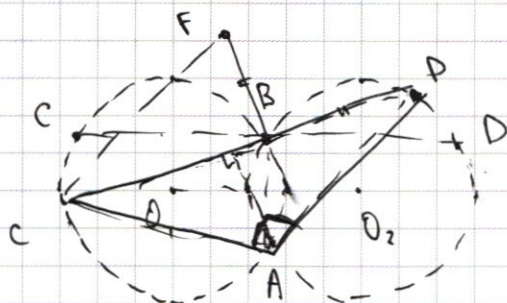
4 точки найти $S_{\text{пл.пл. (KLM)}}$ Найдём коэф. подобия этого треуго. с ABC

$$\triangle GSK \sim \triangle FSH \Rightarrow k = \frac{SK}{SH} = \frac{\frac{5k}{3} + k}{5k} = \frac{8k/3}{5k} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{S_{\text{пл.пл. (KLM)}}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{64}{225} \Rightarrow$$

$$S = \frac{64}{225} \cdot 16 = \frac{64}{25} = 2,56$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$; $S = 2,56$

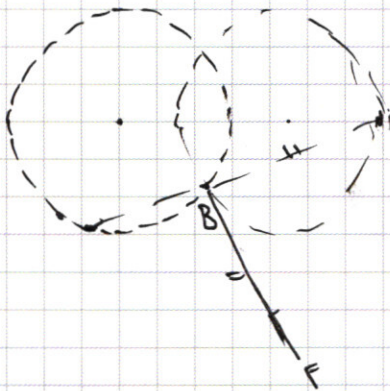
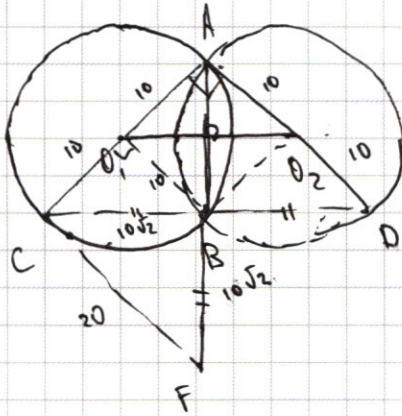
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Рассмотрим сначала случай, когда $CD \perp AB$.

Тут все просто и все находится из чертежа, т.е. $CF = 20$

Но II для пункта 5 в этом случае не выполняется



$$\sqrt{2} \left(\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x \right) = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{-26} \\ 18 \\ \underline{-81} \end{array}$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$2(\sin 7x (-\sin 2x + \cos 2x)) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$2 \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 9} \\ \underline{-8} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{-28} \\ 63 \end{array}$$

$$T.K. \text{ группы, то кампусу}$$

$$LH-Ab \quad \text{sg}$$

$$333 \dots 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \dots$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$$

$$abcdefxy$$

$$33377711$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$11000$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$6!$$

$$11 \dots 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$333777$$

$$110010$$

$$110001$$

$$101100$$

$$100110$$

$$100011$$

$$101010$$

$$101001$$

$$100101$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x \right) = 0$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos 4x \right) = 0$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - 2 \cos \dots = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \left(\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi + 2\pi k$$

$$9x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos 9x + \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos x + \frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$\cos \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cos 5x + \frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x = 0$$

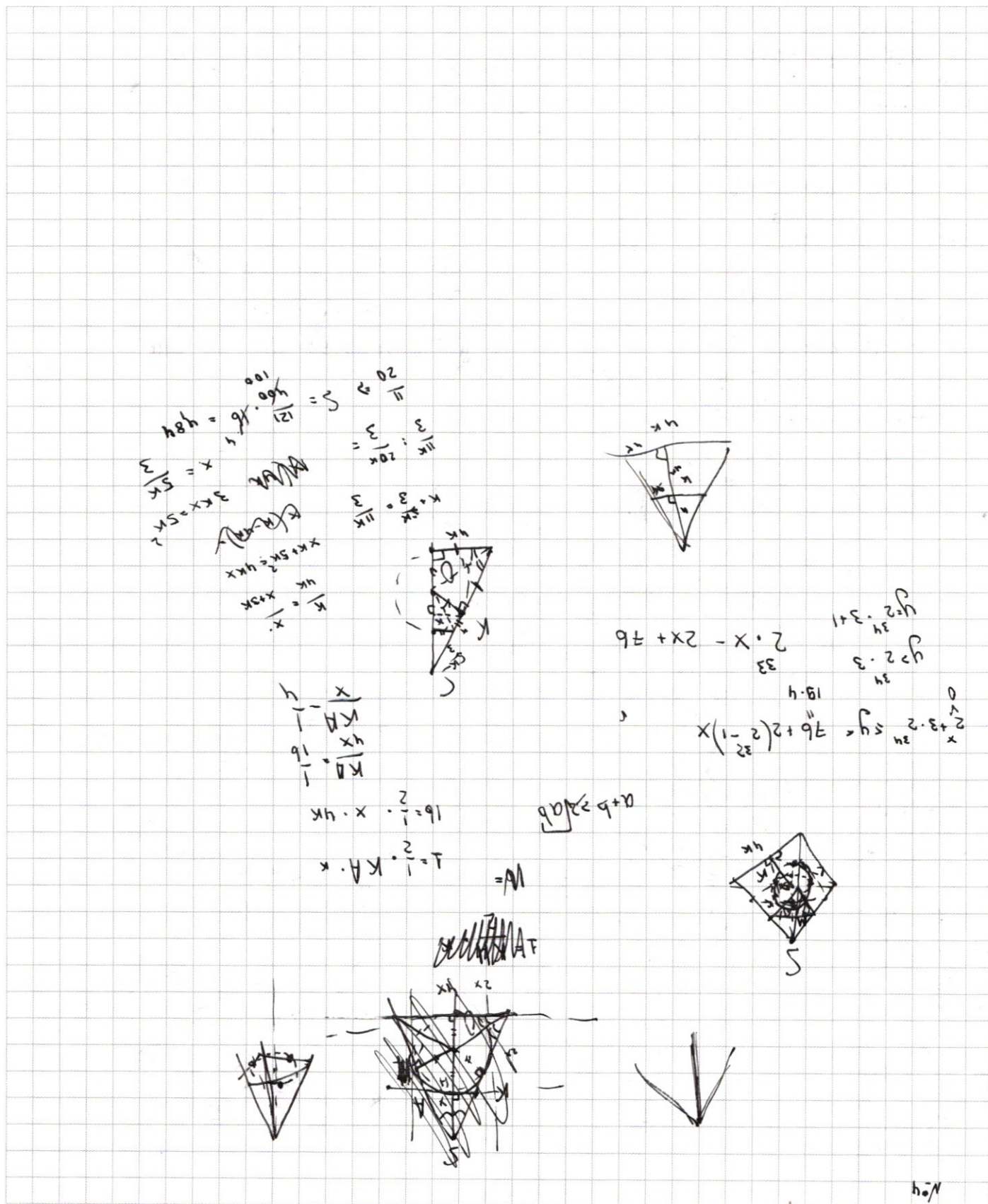
$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y+5 < 0 \quad y-x+5 < 0$$

$$\max x - 2y = 20$$

$$y = -10$$

$$x < 5 \quad x > -5$$

$$|x-5| + |-x-5| = 10$$

$$-x+5 + x+5 = 10$$

$$x \in (-5; 5)$$

$$y = -10 \quad x \in (-5; 5)$$

$$x+y+5 > 0 \quad y-x+5 < 0$$

$$y > -10 \quad y < 0$$

$$x+y+5 - y-x-5 = 10$$

$$x = 5 \quad y \in (-10; 0)$$

$$x+y+5 < 0 \quad y-x+5 > 0$$

$$-x-y-5 + y-x+5 = 10$$

$$x = -5 \quad y \in (-10; 0)$$

$$x+y+5 > 0 \quad y-x+5 > 0$$

$$2y+10=10 \quad y=0 \quad x \in (-5; 5)$$

$x; y; \quad x; -y; \quad -x; y; \quad -x; -y$
 $x=0$ - обязательно
 $x=a$, если $x=-a$ и $y \neq x$
 но при этом $y \neq 0$
 $x=0 \Rightarrow 2|y+5| = 10$
 $|y+5| = 5$
 $y = 0, \quad y = -10$

$$a = 169$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

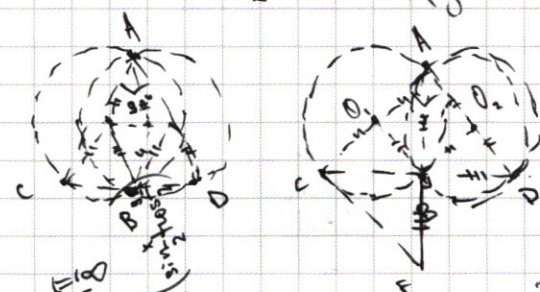
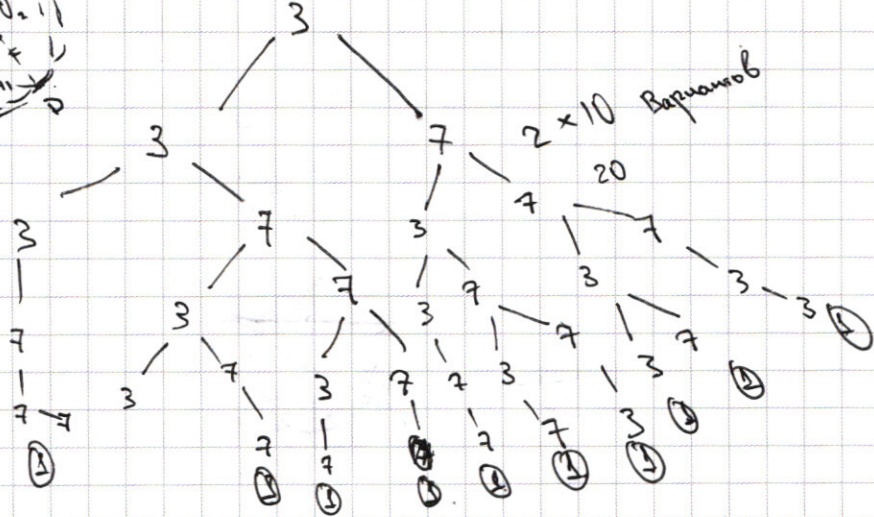
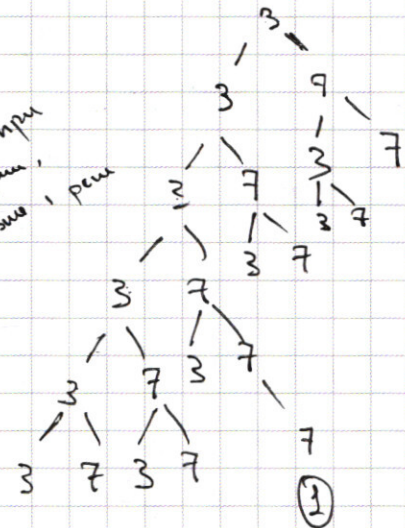
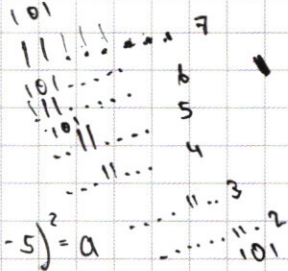
$$x=5 \Rightarrow 7^2 + (|y|-5)^2 = a$$

$$y=0 \Rightarrow a = 7^2 + 5^2 = 74$$

При $x \in (-5; 5)$ где $x \rightarrow$

$$8+8+8+4 = 28 \cdot 20 = 560$$

$$7+6+5+4+3+2+1$$



$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$$