

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Разобейте число 9261 на делители

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Значит искомое восьмизначное число может состоять из 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1 или 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1 цифр.

В первом случае вариантов

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 2} = 9$$

во втором

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 3} = 14$$

Всего $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 6720$ способов

Ответ 6720

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ 2 \sin 7x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}; k \in \mathbb{Z}$

3) $\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

Решим 2-ое уравнение

$$y^2 - y(x+4) + 8x - 2x^2 = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4(8x - 2x^2) = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ 4-x \end{cases}$$

в 1-ом случае

$$16x^6 \cdot \ln x = 2x^{-\ln x} \cdot x^{6 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$8x^{-6 \ln x} = x^{-\ln \frac{1}{2}}, x^{-6 \ln x}$$

$$8 = x^{-\ln \frac{1}{2}}$$

$$x = \ln \sqrt{\frac{1}{8}}$$

во 2-ом случае

$$(x^2(4-x)^2)^{-\ln x} = e \cdot (4-x)^{-\ln x}$$

$$x^2(4-x)^2 = e(4-x)^2 \quad \text{A 3}$$

$$e = \left(\frac{x^2}{(4-x)^2}\right)^{-\ln x}$$

$\left(\frac{(4-x)^3}{x^2}\right)^{\ln x}$ что невозможно, так как при $x \in (0; e)$ $\ln x < 0$, а при $x \in (e; 4)$ $\ln x > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

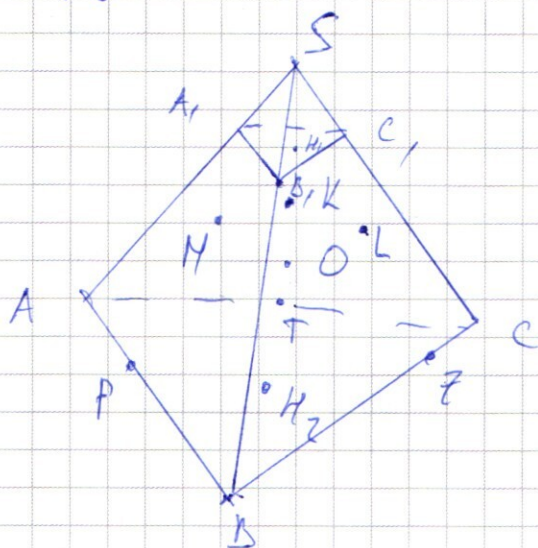
4) Дано Ответ: $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 16$$

$\angle KSO = ?$

$S_3 = ?$



$$S_{A,B,C} = S_1 = 1$$

S, H_1, O, H_2 лежат
на одной прямой

$$S_{ABC} = S_2 = 16$$

$A, B, C, \parallel ABC$, т.к. касаются сферы и $\perp SO$

а углы SH_1, SH_2 , как $\sqrt{S_1} : \sqrt{S_2}$

$$SH_1 : SH_2 = 1 : 4$$

$H_1, H_2 = 2R$, т.к. O, H_1 и H_2 лежат
на прямой и $OK = R$ и $OL = R$

$$SO = SH_2 - OH_2 = SH_2 - R$$

$$SH_2 = 2R + SH_1 = 2R + \frac{1}{4} SH_1$$

$$SH_2 = \frac{8}{3} R$$

$$SO = \frac{8}{3} R - R = \frac{5}{3} R$$

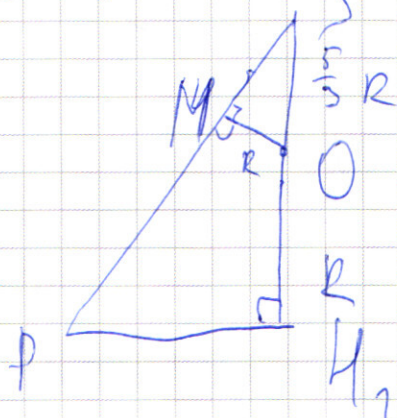
$$OK = R$$

$$\angle KSO = \arccos \frac{R}{\frac{5}{3} R} = \arccos \frac{3}{5}$$

~~Задача~~ 7. Если проведены SM, SL и SK до пересечения
с AB, BC и AC соответственно получим
точки пересечения P, T, Z

$\triangle SH_2Z = \triangle SH_2T = \triangle SH_2P$ по
общему катету и углу $\angle KSO = \angle HSO =$
 $= \angle LSO$ значит $ST = SZ = SP$ и т.к.

$SM = SL = SK$, то $KLM \parallel ABC \parallel A, B, C$,
 $S_{KLM} = \left(\frac{SM}{SP}\right)^2 \cdot S_{ABC} =$



$$SM = \frac{4}{3}R = \sqrt{SO^2 - MO^2}$$

$$\frac{\frac{4}{3}R}{\frac{2}{3}R} = \frac{SO}{SP}$$

$$SP = 2SO = \frac{10}{3}R$$

$$\frac{SM}{SP} = \frac{\frac{4}{3}R}{\frac{10}{3}R} = \frac{2}{5}$$

$$S_{KLM} = \frac{4}{10} \cdot 16 = 6,4$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arccos \frac{3}{5}, S_{KLM} = 6,4$$

$$5) \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-1)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим 4 случая для 1-ого уравнения

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y \in [-10; 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 < 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y \in [-10; 0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 < 0 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-5; 5] \\ y = -10 \end{cases}$$

Значит 2 решения найдем при

$$y \in (10; 0) \text{ и } x = \pm 5$$

либо

$$x \in (-5; 5) \text{ и } y = 0; y = -10 \text{ для этого случая рассматриваем, только } x=0$$

Посмотрим макс. и мин. зног. а при этих условиях

$$1. \quad 7^2 + 0 = a_{\min}$$

$$\text{до } 7^2 + 5^2 = a_{\max}$$

$$2. \text{ от } 7^2 + 12^2 = a_{\min}$$

$$7^2 + 12^2 = a_{\max}$$

$$a \in [49; 169) \cup \{193\}$$

$$1. \quad 7^2 + 0 = a_{\min}$$

$$\text{до } 7^2 + 5^2 = a_{\max}$$

$$2. \quad x = 0$$

т.к. в этом направлении можно двигаться криво $x=0$, найдем x , который будет равен $|-x|=|x|$

$$7^2 + 12^2 = 193$$

$$\text{Ответ } a \in [49; 169) \cup \{193\}$$

$O_1 A O_2 B$ - ромб
 $\angle A O_2 B = \angle A O_1 B =$

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ; AC = AD$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos 45^\circ$$

$$2AB^2 = 2AC^2 + CB^2 + DB^2 - \sqrt{2}AC(CB + BD)$$

$$2AB^2 = 2AC^2 + CB^2 + DB^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot AC \cdot AC'$$

$$CB^2 + DB^2 = 2AB^2$$

$$DB = BF$$

$$CB^2 + BF^2 = CF^2$$

$$CF^2 = 2AB^2$$

$$CF = \sqrt{2} AB = 20$$

$$2. \quad BC = 12 \quad CF = 20 \Rightarrow FB = BD = 16$$

$$CD=28 \Rightarrow AC = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$$

$$\angle FCB = \arcsin \frac{16}{20} = \arcsin \frac{4}{5}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5}) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} \right) = 7\sqrt{2} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} =$$
$$= 196$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7) \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{37} - 1)x \end{cases}$$

При ~~целом~~ $x \geq 38$

$$76 + 2(2^{37} - 1)x < 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

т.к. 2^x возрастает с большей скоростью чем $x \cdot 2^{37}$

и при целом $x < 6$

$$76 + 2(2^{37} - 1)x < 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

а при $x = 6$ они равны,

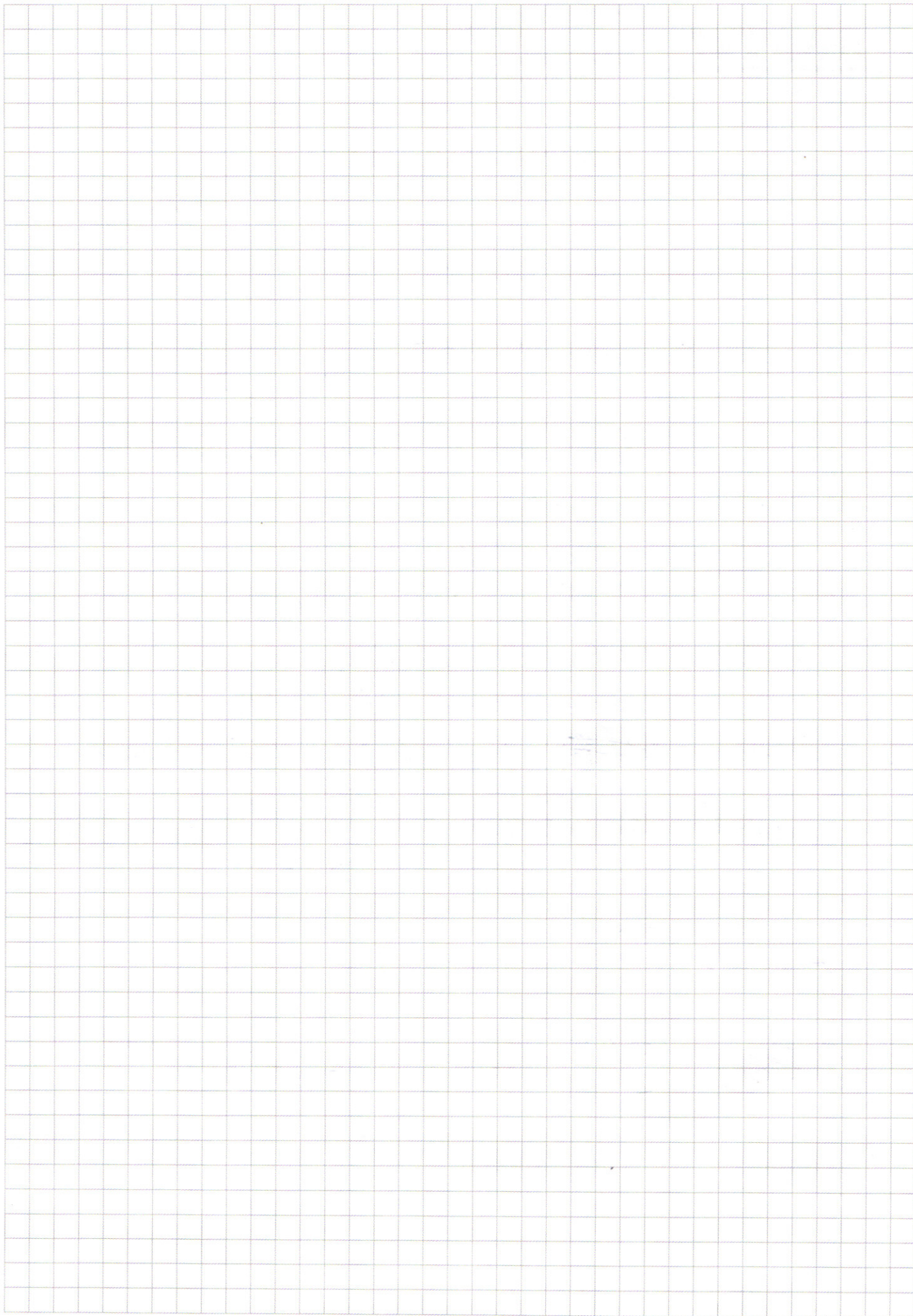
но по условию они не должны быть равны.

Значит ~~$x \in [7; 38]$~~ $x \in [7; 38]$ все целые

$$\text{Кол-во пар решений} = \sum_{x=7}^{x=38} (76 + 2(2^{37} - 1)x) -$$

$$- (2^x + 3 \cdot 2^{34})$$

$$\text{Ответ: } \sum_{x=7}^{x=38} (76 + 2(2^{37} - 1)x) - (2^x + 3 \cdot 2^{34})$$



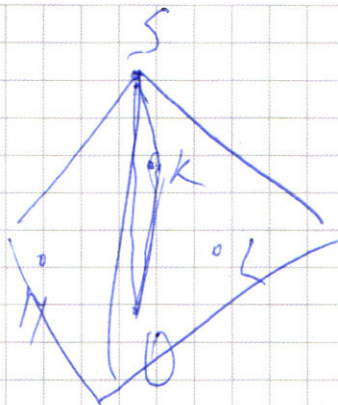
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

4)



SO

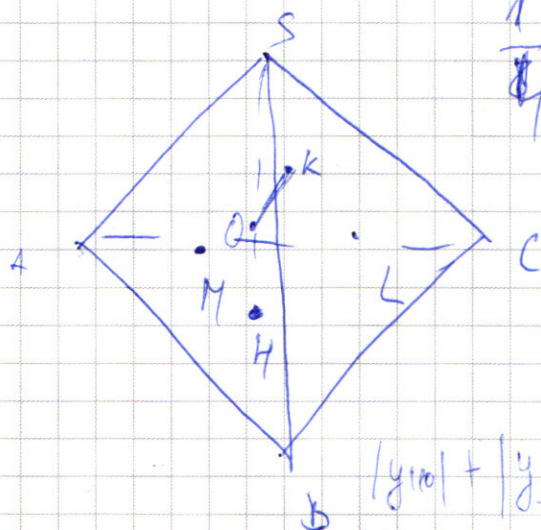
1416

$$\frac{h \pm \sqrt{h^2 - b^2}}{b}$$

$$\frac{561}{64}x$$

$$SO = SH - R$$

12
17
45



1
17
45

SO

$$\frac{3}{4} \cdot SH = 12$$

$$x \leq 5$$

$$x \geq -5$$

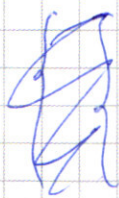
$$x - 5 \leq 0$$

$$-x - 5 \leq 0$$

$$|y| + |y| = 10$$

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ y + 10 &\geq 0 \\ y &\leq 0 \\ y &\leq 0 \\ x &\leq 5 \\ x &\geq -5 \end{aligned}$$

5)



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\begin{cases} ((x+12))^2 + ((y)-5)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 12 \\ -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \\ -6 \end{aligned}$$

+

$$2y + 10 = 10$$

$$\begin{aligned} + - y &= 0 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

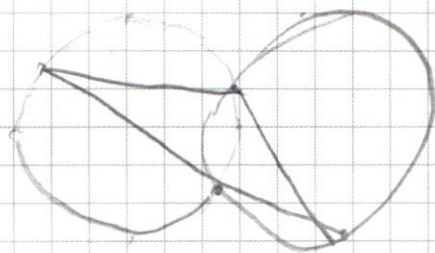
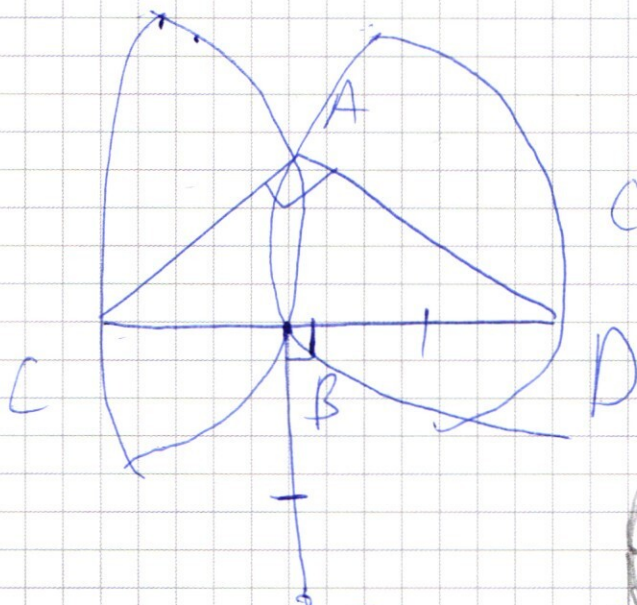
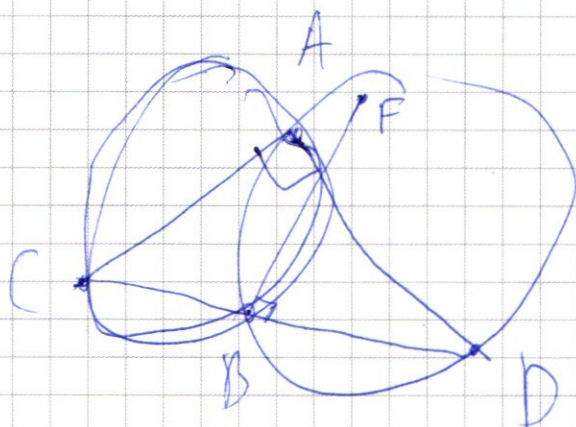
$$\begin{aligned} - + \\ -2x &= 10 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - - \\ -2y - 10 &= 10 \\ y &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5-x &\geq 0 \\ x+5 &\geq 0 \\ 1) x \in [-5, 5]; y &= 0 \\ 2) x = 5; y \in [-10, 0] \\ 3) x = -5; y \in [-10, 0] \\ 4) x \in [-5, 5]; y &= -10 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)



ххх

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5})$$

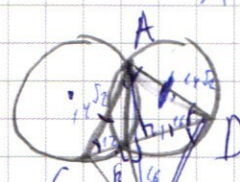
$$14\sqrt{2} \cdot CF - ?$$

$$\sin(\cos \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot 10$$

$$BC = 12$$

$$S_{ACF} = ?$$



$$R = 10$$

$$R = \frac{ab}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin$$

$$R = 10 \quad AB$$

$$CB^2 + B^2 = 10\sqrt{2} = AB$$

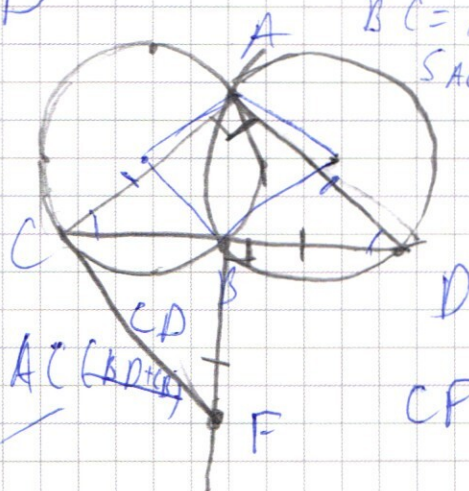
$$AC^2 + CB^2 - \sqrt{2} AC \cdot CB = AB^2$$

$$R = 10$$

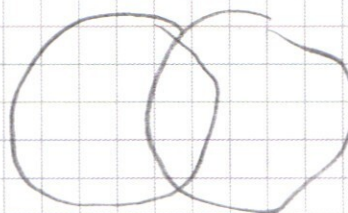
$$BD^2 + AD^2 - \sqrt{2} BD \cdot AD = AB^2$$

$$BC = 12$$

$$S_{ACF} = ?$$



$$CF = ?$$



$$7) \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$76 = 582$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^{34} (2^{x-34} + 3) < 2^{33} x + 76 - x$$

$$x = 38$$

$$2^4$$

$$16 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot 2^{34} \quad 11 \cdot 2^{34}$$

$$2^{34} \cdot 18 + 40$$

$$2^5 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 5 \cdot 2^{34} \quad (2^6 + 3)$$

$$202^{34} + 36$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12$$

$$19 \cdot 2^{34}$$

$$19 \cdot 2^{34} + \boxed{76 - 38}$$

$$38$$

$$x = 7$$

$$x \in 7; 38$$

$$12^2 + 5^2$$

$$7^2 + 5^2$$

$$7^2 + 0$$

$$7^2 + 5^2$$