

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3.$$

Цифры цифр искомого числа нет "0", но ~~они~~ могут быть только "1", "3", "7", "9". Суммарно ровно 3.

Рассмотрим варианты:

1) "7" - 3 раза; "3" - 3 раза; "1" - 2 раза.

$$\text{Количество таких чисел: } \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{120 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6 \cdot 2} =$$

$$= 560.$$

2) "7" - 3 раза; "9" - 1 раз; "3" - 1 раз; "1" - 3 раза.

Количество таких чисел:

$$\frac{8!}{3!1!1!3!} = \frac{120 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6} = ~~1020~~ 1120.$$

$$\text{Итого: } 1120 + 560 = 1680 \text{ чисел.}$$

Других вариантов цифр быть не может, т.к. две девятки и 4 более недопустимо.

Ответ: 1680 чисел.

Задача 2.

Преобразуем ур-е:

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin(4x) \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0.$$

$$\text{Заметим, что } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \cos 4x = \cos 4x + \cos \frac{\pi}{2} = \\ = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Тогда } 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\sin 4x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$1) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \underline{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}}.$$

$$2) \sin 4x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 4x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k \\ \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases};$$

Объединим найденные множества, получим ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ограничения на x и y :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Решим (1): возыдем от обеих частей ур-я логарифмы по основанию y :

$$-\ln x \cdot \log_y(x^2 y^4) = \ln \frac{y}{x^7};$$

$$-\ln x (2 \log_y x + 4) = \ln y - 7 \ln x;$$

(не $|x|$, т.к. $x > 0$)

$$-\ln x \cdot 2 \log_y x + 3 \ln x - \ln y = 0$$

$$-\ln x \cdot \frac{2 \ln x}{\ln y} + 3 \ln x - \ln y = 0.$$

Рассмотрим отдельно случай $y = 1$:

$$(2) \Rightarrow 1 - x - 2x^2 + 8x - 4 = 0, \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0, \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} =$$

$$= \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Подставим в (1):

$$a) \begin{cases} x = 3; \\ y = 1 \end{cases} \quad 9^{-\ln 3} = 1^{\ln\left(\frac{1}{3^7}\right)} \rightarrow \text{не подх.}$$

б) аналогично — не подх.

Т.е. $y \neq 1 \Rightarrow \ln y \neq 0$.

Тогда (1) ур-е ~~свед~~ сведётся к:

$$-2 \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 + 3 \frac{\ln x}{\ln y} - 1 = 0; \quad \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}.$$

$$1) \frac{\ln x}{\ln y} = 1 \Rightarrow \ln x = \ln y, \quad x = y. \quad \text{Подставим в (2):}$$

$$y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = -2y^2 + 4y = 0, \quad -2y(y - 2) = 0$$

$y=0; 2 \rightarrow x=0; 2$. (учтём ограничение $(2; 2)$).

2) $\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2}$; $\log_y x = \frac{1}{2}$; $\sqrt{y} = x \rightarrow (2)$:

$$y^2 - y\sqrt{y} - 2y + 8\sqrt{y} - 4y = 0.$$

$$\sqrt{y}(y\sqrt{y} - y + 8 - 6\sqrt{y}) = 0 (*) / : \sqrt{y} > 0$$

$$y(\sqrt{y} - 1) - 6(\sqrt{y} - 1) + 2 = 0$$

$$(y - 6)(\sqrt{y} - 1) = -2 < 0, \text{ но } y > 0 \Rightarrow$$

$y - 6$ и $\sqrt{y} - 1$ имеют разные знаки. Это возможно, если

$$\begin{cases} \sqrt{y} - 1 > 0 & y > 1 \\ y - 6 < 0 & y < 6. \end{cases}$$

Подбором находим, что $y = 4$: $(4 - 6)(\sqrt{4} - 1) = -2 \cdot 1 = -2$.

~~Других корней нет в силу монотонности функции~~
 $f(y) = (y - 6)(\sqrt{y} - 1)$ на $y \in (1; 6)$.

Вернёмся к (*), сделав замену $t = \sqrt{y}$.

$$t^3 - t^2 - 6t + 8 = 0;$$

$$(t - 2)(t^2 + t - 4) = 0;$$

$$t = 2 \text{ или } t^2 + t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$t > 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

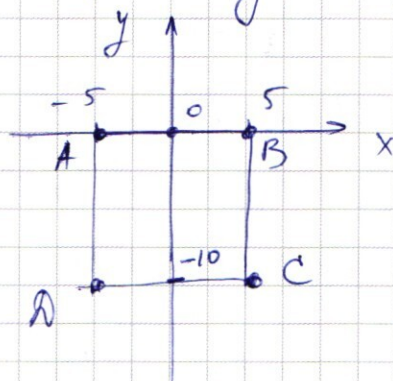
$$y = t^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \quad x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

Ответ: $(2; 2)$ и $\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

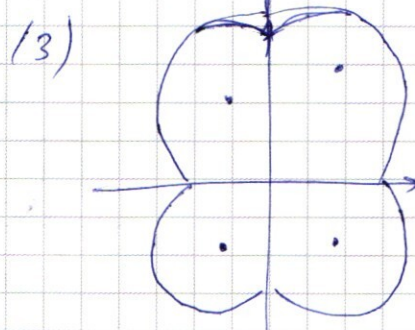
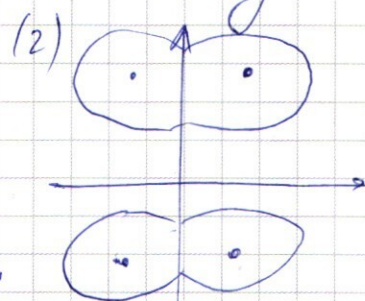
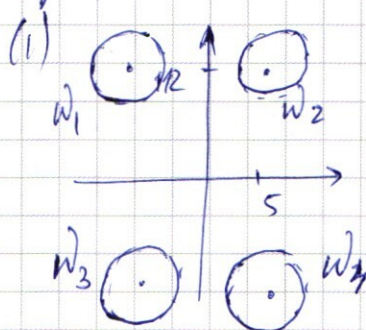
Задача 5.

1-е уравнение системы задаёт совокупность ^{отрезков} прямых $y=0$; $x=-5$; $x=5$; $y=-10 \Rightarrow$ это квадрат со сторонами, $\parallel O_y$ и O_x . Центр в точке $(0; -5)$.



Вершины $A(-5; 0)$; $B(5; 0)$;
 $C(5; -10)$; $D(-5; -10)$.

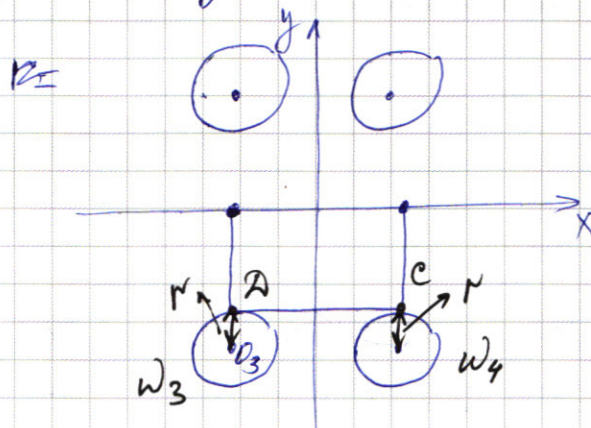
Второе уравнение системы задаёт при $a > 0$ ~~часть~~ окружности $(x-5)^2 + (y+12)^2 = a$, т.е. с центром $(5; -12)$ радиуса $\sqrt{a}$, располож. в I-й четверти и отражённой относительно O_y и O_x .



Либо, если $a=0$, то 4 точки $(5; -12)$; $(-5; -12)$;
 $(-5; 12)$; $(5; 12)$.

1. $a > 0$. 2 решения будет, если точки C и D лежат на окружностях, т.е. $r = \sqrt{a}$; где r — (или их частей).

r - расстояние от центра w_3 или w_4 до точек D и C соответственно.



O_3 -центр W_3 ; $O_3 \in X = -5 \Rightarrow 2O_3 = -12 + 10 = -2 = \sqrt{a}$.

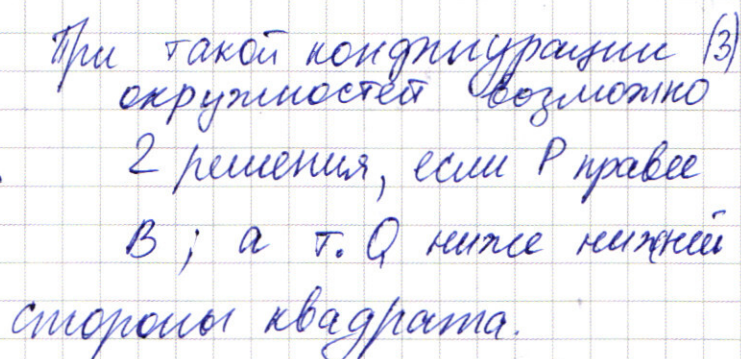
$a=4 \rightarrow 2$ perennans $(\pm 5, \pm 12)$. $(\pm 5, -12)$.

При меньшем α - нет решений; но ~~бывает~~ α -
- решение ~~бывает~~ двух, т.к. график симметричен
относительно y -оси $\Rightarrow$ ~~линии~~ но при некотором α окружность
превратится в дугу ($\alpha \rightarrow 25$).

2. $a=0$. Нет решений, т.к. точки $(\pm 5; \pm 12)$ и $(\pm 5; \mp 12)$ не принадлежат сторонам квадрата.
~~Итак, $CA \neq \emptyset$.~~

~~Answer: $a = 4$.~~

3. $a > 4$.



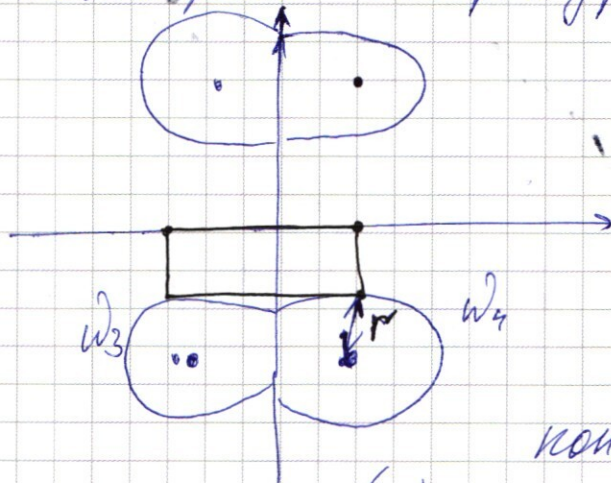
P: $y=0$; $(|x|-12)^2 = a-25$; $x = \sqrt{a-25} + 12 > 5$ — верно, при $a > 25$

Q: $x=0$; $(-y-5)^2 = a-144$, $0 \leq y = \sqrt{a-144} - 5 \leq -10$,

$$5 > \sqrt{a-144} > -5 \quad \text{Hörger} \quad \begin{cases} a > 25 \\ a < 169 \\ a > 144 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Рассмотрим конфигурацию (2):



2 решения, если
нижняя сторона квад-
рата касается ω_3 и
 ω_4 , т.е. $r = \sqrt{a} = 2$,
 $a = 4$ (аналогично

конф. (1)), т.е. данная

конфигурация (2) не достигается, когда 2 решения.

Итак, $a = 4$ и $\begin{cases} a > 25 \\ a < 169 \end{cases}$.

Ответ: $a \in \{4\} \cup (25; 169)$
 $a \in \{4\} \cup (144; 169)$.

Задача 7.

$$f_1(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$f_2(x) = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ при } x = 0:$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12$$

$$64 = 64.$$

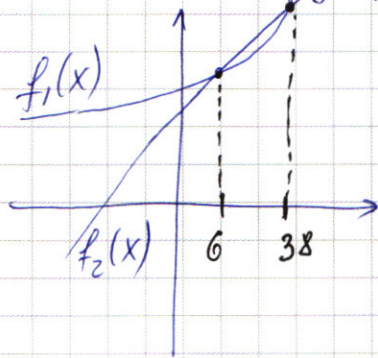
или

$$x = 38:$$

$$2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2 \cdot 19 \cdot 2^{34} - 76$$

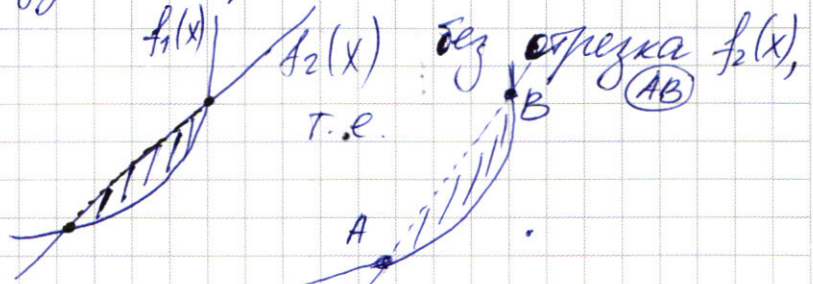
$$2^{34}(3 + 16) = 2^3 \cdot 19.$$

Схематически изобразим графики $f_1(x)$ и $f_2(x)$.



$$\begin{cases} y \geq f_1(x) \\ y < f_2(x) \end{cases}$$

удовлетворяет части плоскости:



$6 \leq x \leq 38$. (строгое нер-во, т.к. отрезок $f_2(x)$ не входит в данную область).

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} < y < 2^{38} + 3 \cdot 2^{34}$$

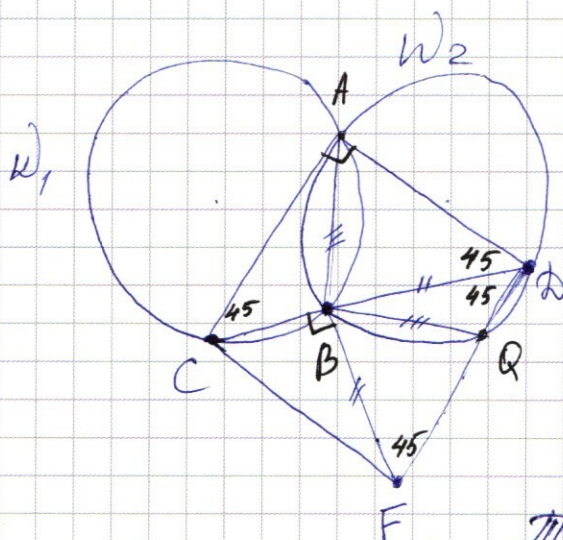
Для x возможны целые значения от 7 до 37. Каждому такому x соответствует множество целых y ;
~~количество целых значений y :~~ $76 + 2(2^{32} - 1)x - (2^x + 3 \cdot 2^{34}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 76$ по длине промежутка, она же равна количеству целых y .

$$\begin{aligned} \text{Итого точек: } & 76 \cdot 31 + 2(2^{32} - 1) \sum_{x=7}^{37} x - \sum_{x=7}^{37} (2^x + 3 \cdot 2^{34}) = \\ & = 76 \cdot 31 + 44 \cdot 31(2^{32} - 1) - 3 \cdot 2^{34} - 2^7 \cdot (2^{31} - 1) = \\ & = 31(77 \cdot 2^{34} + 32) - 3 \cdot 2^{34} - 2^{38} + 2^7 = \\ & = 2^{34}(347 - 3 - 2^4) + 31 \cdot 32 + 2^7 = 2^{34} \cdot 322 + 1120 = \\ & = 2^{35} \cdot 161 + 1120 \end{aligned}$$

Ответ: ~~$2^{35} \cdot 161 - 1120$~~
 $2^{35} \cdot 161 + 1120$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.



1) $R = 10$ — радиус окружностей.

$$AC = 2R \cdot \sin \angle ABC$$

$$AD = 2R \cdot \sin \angle ABD$$

$\sin \angle ABC = \sin \angle ABD$ как смеж.

$\Rightarrow AC = AD$, $\triangle ACD$ равноб.

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

2) $\triangle BDF$ — равноб.

$$\angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$$

Тогда $\angle ADF = 90^\circ$.

$\Rightarrow$ либо AD — диаметр w_2 , либо $DF \cap w_2$ в точке Q .

а) AD — диам. $\Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$; $AB \perp CD$, т. $B \in AF$.

Тогда $ACFD$ — квадрат; $CF = 20 = 2R$; $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 2 = 120$.

б) $DF \cap w_2$ в точке Q . Тогда AQ — диаметр w_2 .

Заметим, что $\angle ADB = \angle BDQ$ (они смеж.) $\Rightarrow$

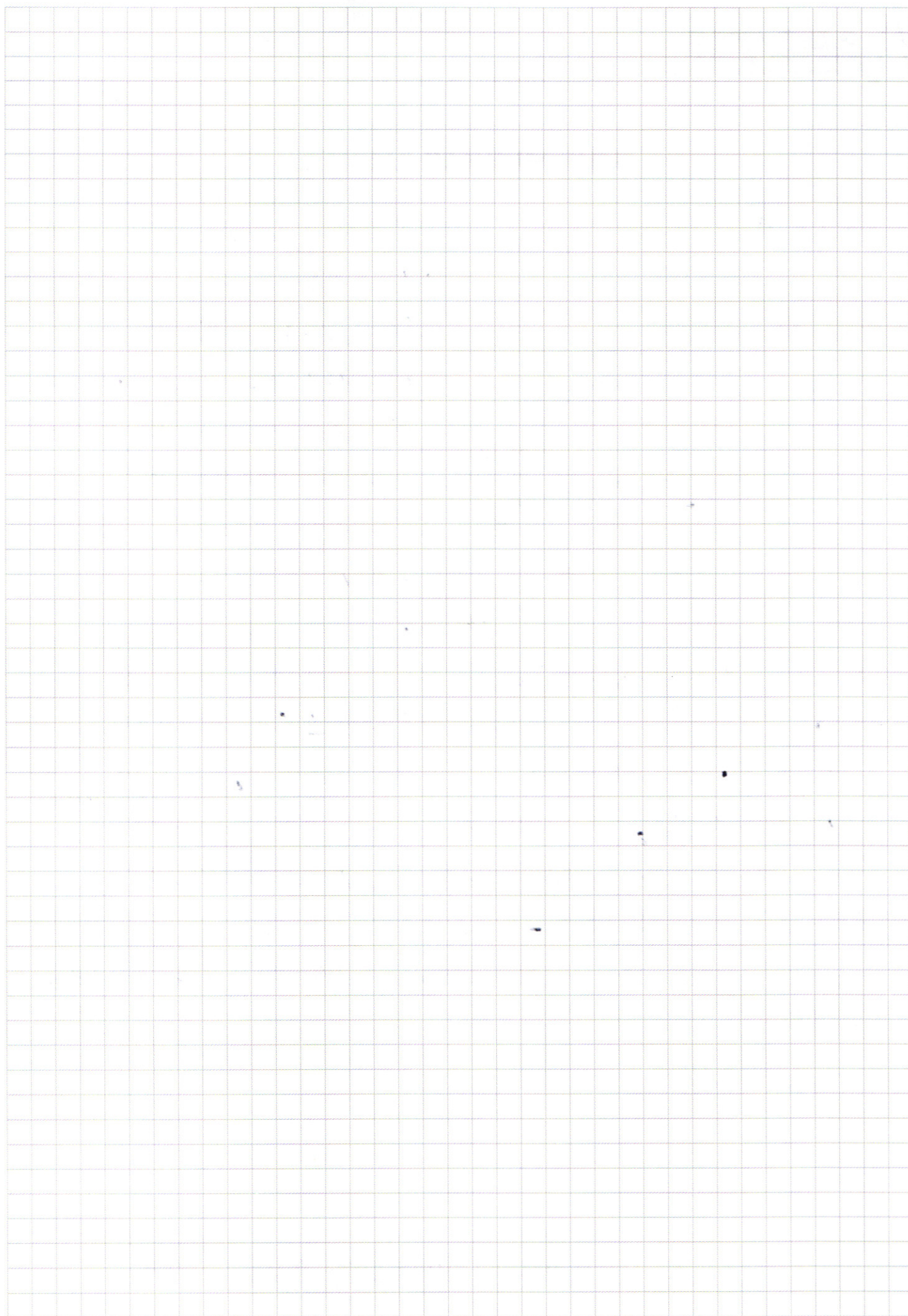
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BQ} \Rightarrow AB = BQ = 2R \cdot \sin 45^\circ = 10\sqrt{2}.$$

$\triangle ABQ$ — равноб. и прямоугол. ($\angle B = 90^\circ$), т. к. AQ — диам. w_2 .

$$\triangle ABQ = \triangle CBF \Rightarrow CF = AQ = 20.$$

$$S_{ACF} = 120.$$

Ответ: $CF = 20$; $S_{ACF} = 120$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD = 2R \sin \alpha$
 $AC = 2R \sin (180 - \alpha)$
 $AD = AC = 2R \sin \alpha$
 $CD = 2\sqrt{2} R \sin \alpha$

$B = 135 - \alpha$

$\frac{BD}{\sin(135 - \alpha)} = \frac{AD}{\sin \alpha} \Rightarrow BD = AD \cdot \frac{\sin(135 - \alpha)}{\sin \alpha} = 2R \sin(135 - \alpha)$

$ED = 2\sqrt{2} R \sin(45 + \alpha)$

$CB = CD - BD = 2\sqrt{2} R \sin \alpha - 2R \sin(45 + \alpha)$

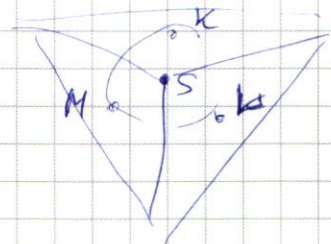
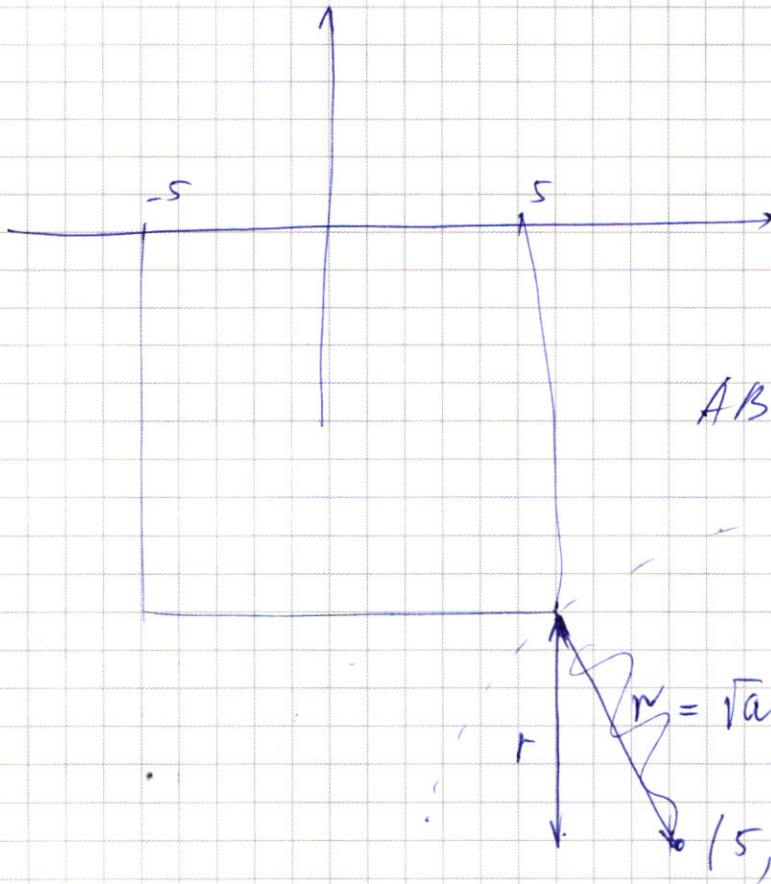
$CF^2 = CB^2 + BF^2 = 4R^2 (2 \sin^2 \alpha + \sin^2(45 + \alpha)) + 4R^2 \cdot \sin^2(45 + \alpha) = 8R^2 (\sin^2 \alpha + \sin^2(45 + \alpha))$

$\sin^2(45 + \alpha) = (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha)$

1) $2y + 10 = 10, y = 0$
 2) $x + y + 5 - y + x - 5 = 10; x = 5$
 3) $x = -5$
 4) $y = -10$
 $-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$
 $-2y = 20$
 $y = -10$

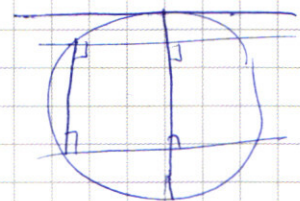
$|y + 10| + |y| = 10$
 $y \in [0; 10]$

$|x - 5| + |x + 5| = 10$



$$AB = 2R \cdot \sin 45 = 10\sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$AD = 2R \sin \alpha$$



$$46 + 2/2^{32} - 1/x \leq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$46 + 2^{33} \cdot x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2 \cdot 38$$

$$X = 6: 2^{64} + 3 \cdot 2^{34}$$

$$46 + 3 \cdot 2^{34} - 12$$

$$64$$

$$3 > 2$$

$$44 \cdot 31$$

$$2$$

$$f_1(y) \uparrow$$

$$f_2(y) \uparrow$$

$$x=6$$

$$X = 38:$$

$$2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{34} / (3 + 1/2) =$$

$$46 - 2 \cdot 38 + 2^{33} \cdot 38 = 2^{34} / 19$$

$$322 \cdot 2 = 161$$

$$f_1'(y) = 2^x \ln 2$$

$$f_2'(y) = 2(2^{32} - 1)$$

$$76$$

$$\times 31$$

$$228$$

$$2356$$

$$31$$

$$\times 32$$

$$992$$

$$19$$

$$128$$

$$4 + 37$$

$$2$$

$$\cdot 31 =$$

$$2, 4, 8$$

$$3$$

$$864$$

$$1120$$

$$1+2 \cdot 8$$

$$22-31$$

$$1+2 \cdot 3$$

$$2$$

$$\cdot 3$$

$$2 \cdot (8-1)$$

$$7$$

$$= 14$$

$$S = \frac{6(9^4 - 1)}{9 - 1}$$

$$76 - 46 = 30$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 30 = 3^3 \cdot 43$$

$$= 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 27 \\ \hline 301 \\ + 860 \\ \hline 1161 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1323 \\ \times 7 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 17} \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$

Среди цифр нет 0, есть 7, 9 и 3, 1.

$$1) \begin{array}{l} 7^4 - 3 \\ 1^4 - 2 \\ 9^4 - 0 \\ 3^4 - 3 \end{array} \rightarrow \frac{8!}{3!3!2!} = 2$$

$$\Sigma = \frac{3 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 21 \cdot 80 = 1680$$

$$2) \begin{array}{l} 7^4 - 3 \\ 1^4 - 3 \\ 9^4 - 1 \\ 3^4 - 1 \end{array} \rightarrow \frac{8!}{3!3!}$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\Sigma = 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1)$$

$$\cos 4x = \cos 5x$$

$$\cos 9x = \cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x$$

$$\sin 9x = \sin 4x \cdot \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 4x$$

$$\cos 2x + \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$2 \sin 7x \cdot 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 2\alpha - \cos 2\beta = -2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -2 (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) =$$

$$= -2 (\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta)$$

$$(2) y^2 - xy + 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-2)^2 + 2(x+2)^2 - xy = 12$$

$$x > 0, \frac{y}{x} > 0$$

$$(1): \begin{cases} xy = u \\ x+y = t \end{cases}$$

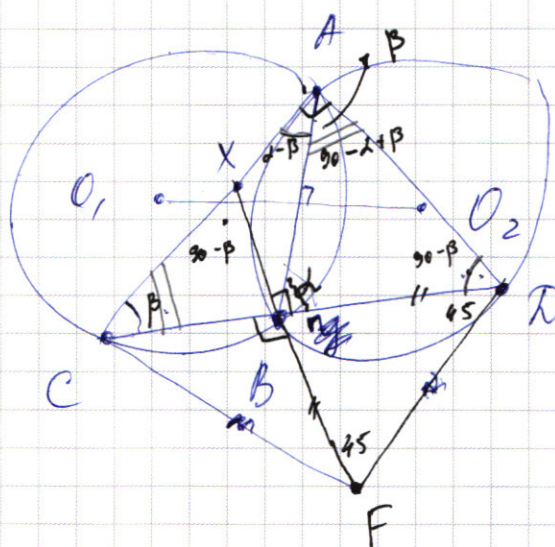
$$\ln(u^2 y^2) - \ln x = \left(\frac{u}{x}\right) \ln\left(\frac{x}{u}\right)$$

$$\sin 5x + \sin 9x = 2 \sin 7x \cdot \sin 2x \rightarrow$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\cos 2x - \sin 2x = \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{4} =$$



$$\triangle CAD \sim \triangle CBX$$

$$CX \parallel DF \text{ — диаметр}$$

$$CF \perp DF; CX \perp XD$$



$$\angle BAD = \angle ACD (\text{кас. и х.}) = \beta$$

$$\angle CAB = \angle ADB = 90 - \beta$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x = \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin\left(7x\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \cos(9x - 5x) = \cos 9x \cdot \cos 5x + \sin 9x \cdot \sin 5x$$

$$\cos 9x = \sqrt{2} \cos 9x \cdot \cos 5x + \cos 5x$$

$$\sin 9x = \sqrt{2} \sin 9x \cdot \sin 5x + \sin 5x =$$

$$= \sin 9x$$

$$\cos 4x + \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\text{Итого: } 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) / \sin 7x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$1) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2) \sin 7x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9x}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{\pi}{20}$$

$$\frac{3\pi}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{\pi}{12}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y=0: -2x^2+8x=0, \quad x^2-4=0, \quad x=\pm 2.$$

→ (1):

$$(2): (y^2) \Rightarrow 1 - \frac{x}{y} - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{8x}{y^2} - \frac{4}{y}$$

$$: xy \rightarrow \frac{y}{x} - 1 - \frac{2x}{y} + \frac{8}{y} - \frac{4}{x} = 0$$

$$\underbrace{(y-2)^2}_4 - \underbrace{2(x-2)^2}_{-8} = xy - 4$$

$$\log_{10} y: -\ln x \cdot \log_y (x^2 y^4) = -\ln x (2 \log_y x + 4) = \ln \frac{y}{x^7} = \ln y - 7 \ln x$$

$$\ln x (-2 \log_y x + 3) = \ln y$$

$$-2 \ln x \cdot \log_y x + 3 \ln x - \ln y = 0$$

$$-2 \frac{\ln^2 x}{\ln y} + 3 \ln x - \ln y = 0 \quad |: \ln y$$

$$-2 \left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 + 3 \frac{\ln x}{\ln y} - 1 = 0, \quad \frac{\ln x}{\ln y} = 1; \frac{1}{2}$$

$$f'(y) = \sqrt{y} + \frac{y\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} = \frac{3}{2}\sqrt{y} - 1 - \frac{3}{\sqrt{y}} = 0 \quad (-5; 0)$$

$$\begin{cases} -6 \ln 2 = 2 \ln 2^{-6} \\ 4 - 4 - 8 + 16 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}y - 2y - 6 = 0$$

$$\sqrt{y} = \frac{1 \pm \sqrt{1+18}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{19}}{3} \approx \begin{cases} 0 \\ 1.5\sqrt{6}-1 \end{cases}$$

$$8 - 4 - 12 + 8$$

$$y' = -\frac{1}{y^2}$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + 1\right)^{\frac{13}{3}}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3} - 6\right) \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = -\frac{14}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) = -\frac{28}{3\sqrt{2}} + \frac{14}{3}$$