

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1

1) $9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 9 \cdot 3 \cdot 7^3 = 3^3 \cdot 7^3$

2) Получается, в нашем числе должно быть минимум: 3 тройки и 3 семерки.

Чтобы произведение было равно 9261, на оставшиеся 2 позиции можно поставить 2 единицы.

Итак, нужно расставить 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 в любом порядке, но считая, что, если мы поставим несколько одинаковых цифр, то

самочисло не изменится:

3)

~~Всего~~ Получаем нужные нам числа как частное ~~разности~~ всех 8-х с таким набором и повторениями:

$$N = N_1 \cdot N_2; \quad N_1 = 8! \quad N_2 = 2! \cdot 3! \cdot 3!$$

$$\rightarrow N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{720}{9} = 80$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

Ответ: 560.

Задача №2 $\cos 9x - \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sin 5x - \sin(\frac{\pi}{2} - 5x) = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x + \cos(\frac{\pi}{2} - 9x) = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(9x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(9x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) - \cos 5x = -2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) =$$

$$= + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

Итого:

$$\sqrt{2} \cdot \cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x + \cos(\frac{3\pi}{4} - 5x) = 0$$

$$= 2 \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(7x - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 7x = 0$$

$$2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin 7x + \cos 4x = 0$$

$$\frac{(\frac{1}{4}y^4)^{\ln 2}}{(4y^4)^{\ln 2}} = y^{\ln y - 7 \ln 2}$$

$$\frac{1}{(4 \cdot 16)^{\ln 2}} = \frac{y^{\ln y}}{4^7 \ln 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{№2)} \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad \leftarrow \sqrt{(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cdot (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & (1) \\ 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \quad \cos 2x = \sin 2x \quad | : \cos 2x (\neq 0, \text{ т.к. иначе } \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{cases})$$

$$1 = \tan 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

чего быть не может,
в силу верн. тригон. тожд.

$$(2): \quad 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \quad (3)$$

$$(3): \quad \sin 2x + \cos 2x = \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(2): \quad 2 \sin 7x - \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin 7x - 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4} + 2x\right) = 0; \quad \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0:$$

$$2 \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0;$$

$$\cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

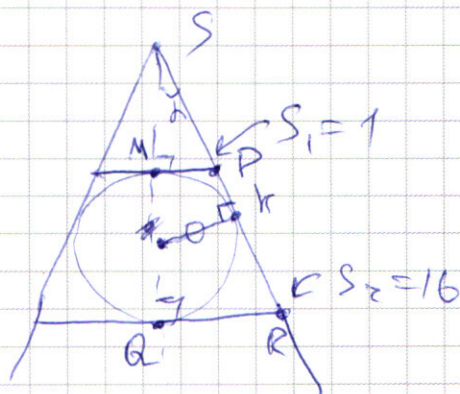
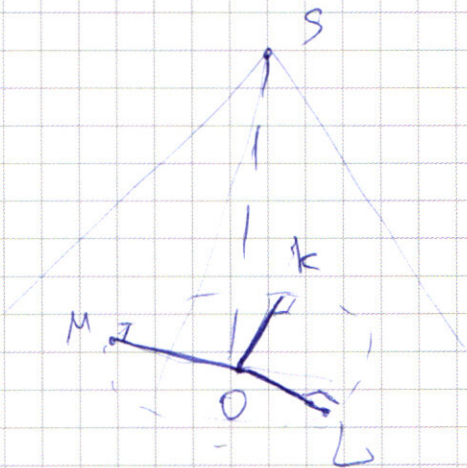
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{gx}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + uk, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x}{2} \equiv 1 \pmod{5} = uk \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{gx}{2} = \frac{2x}{2} + uk, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{20} + \frac{2uk}{5} \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \end{cases}$$

Antwort:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$$
$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Zagreb NY



1) Треугольники, полученные при сечении плоскостью, касающейся сферы и $\perp$ -ой S_O , имеют отношение

состав равное количество из отломанных пилыдагел:

$$k = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum 1}} = \sqrt{16} = 4 \quad (\text{т.к. } \text{var}(\text{погода}) \neq 0)$$

Знамен, ноготок и острогом: $\Delta SMP \sim \Delta SPQ$.

$$\Rightarrow \frac{SM}{SQ} = \frac{SD}{SR} ; \quad \frac{SM}{SM+RD} = \frac{SD}{SR} = \frac{1}{4}, \text{ где } R - \text{ постоянная скорость,}$$

~~$$SM = 49M + 8R =)$$~~

$$\rightarrow 4SM = SM + 2R \Rightarrow SM = \frac{2R}{3}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) \quad \underline{\text{ergo}} \quad \angle KSO = \arctan \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 | $a = ?$, 2 реш.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): $\underbrace{|x+y+5|}_{(a)} + \underbrace{|y-x+5|}_{(b)} = 10$

Рассмотрим случаи:

$$\begin{cases} (a) \geq 0 \\ (b) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a) \geq 0 \\ (b) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a) \leq 0 \\ (b) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a) \leq 0 \\ (b) \leq 0 \end{cases}$$

I

II

III

IV

I: $x+y+5 + y-x+5 = 10$

$$y = 0$$

II: $x+y+5 - y-x+5 = 10$

$$x = 5$$

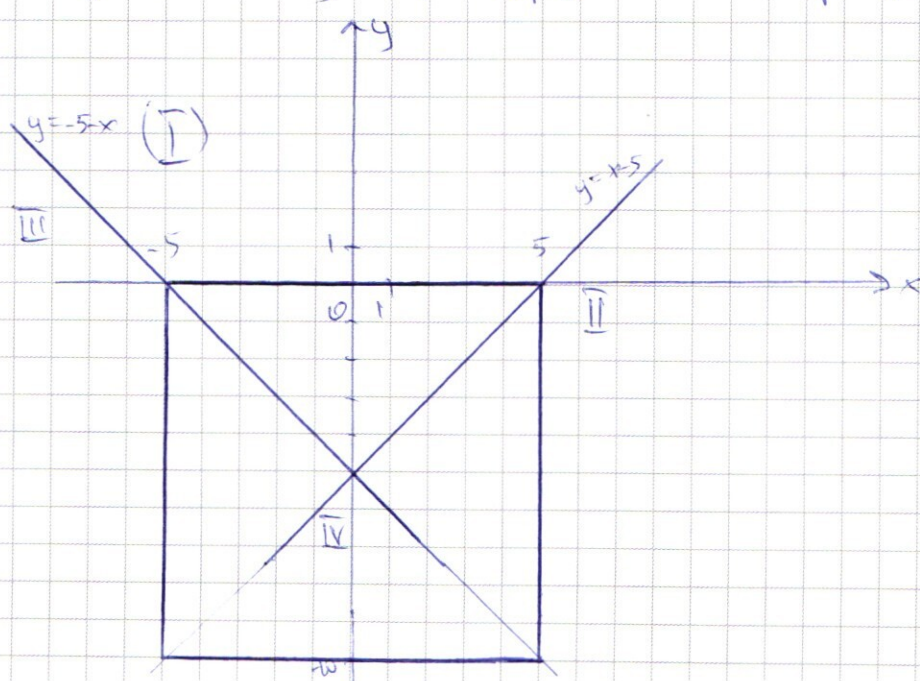
III: $-x-y-5 + y-x+5 = 10$

$$x = -5$$

IV: $-x-y-5 - y-x+5 = 10$

$$y = -10$$

Построим эту фигуру на графике:



$$(a) = x+y+5 \geq 0 \Rightarrow$$

$$y \geq -5 - x$$

$$(b) = y-x+5 \geq 0$$

$$y \geq x - 5$$

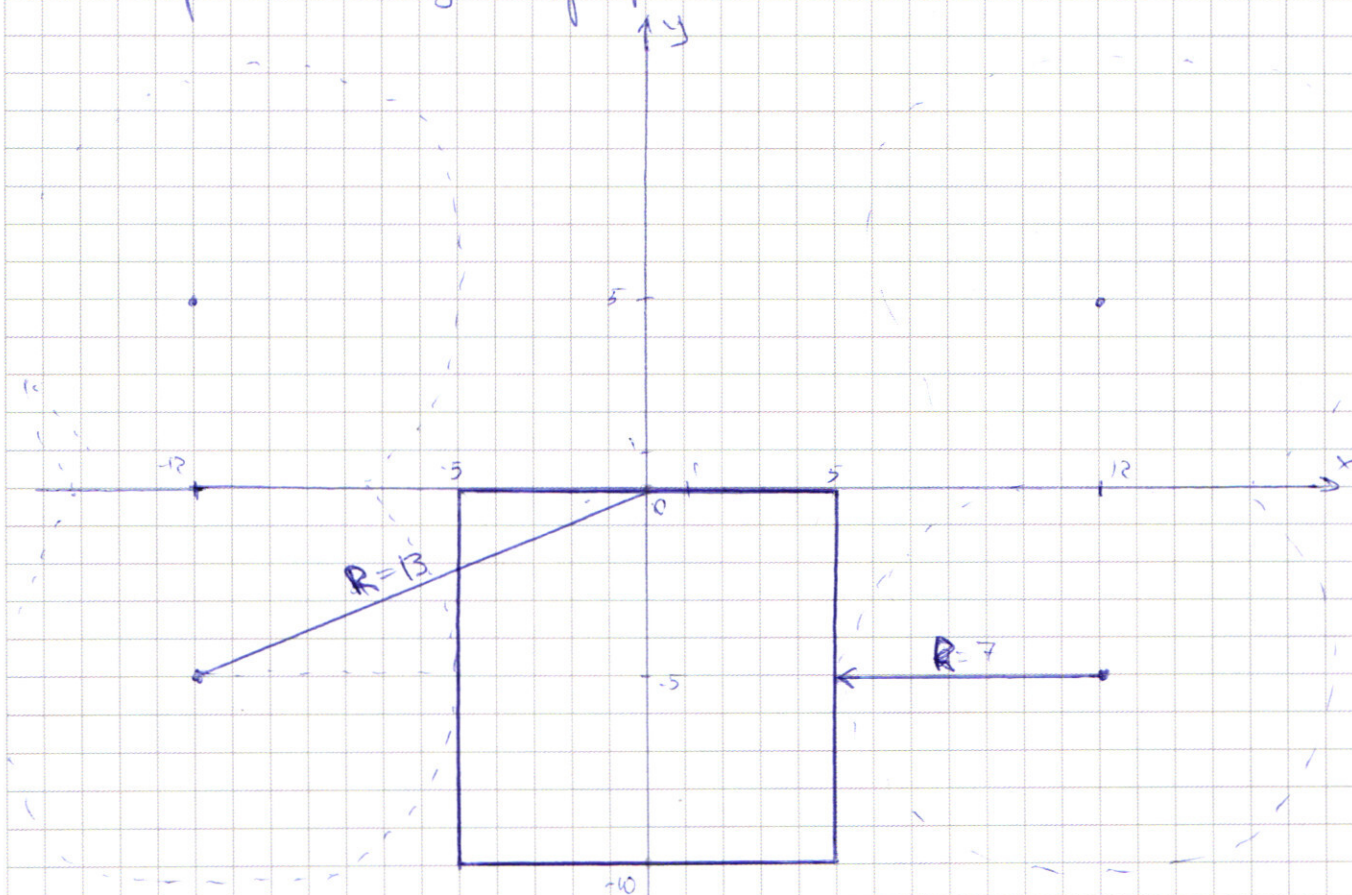
(2): $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ - график, симметричный, относительно осей Ox и Oy :

у фигуры есть 4 углов:

(5) $(12; 5)$; $(-12; 5)$; $(12; -5)$ и $(-12; -5)$

Она представляется собой 4 окружности в каждой четверти координат $-xy$, не выходящих за их пределы, то есть ограничены осями x и y .

Построим общий график:



Точки пересечения графиков - решения. Их должно быть 2 $\Rightarrow$ 2 т. пересек.

1) 1й случай, когда нижняя часть фигуры (2) касается квадрата (1): тогда $R = (-5 - (-12)) = 7 \Rightarrow a = R^2 \Rightarrow a = 49$

При увеличении a кол-во решений станет 2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вобщем мы можем рассмотреть только одну полуплоскость (левую или правую от оси Oy) в силу симметрии картины. И тогда условие полноты не нахождения одной точки пересечения.

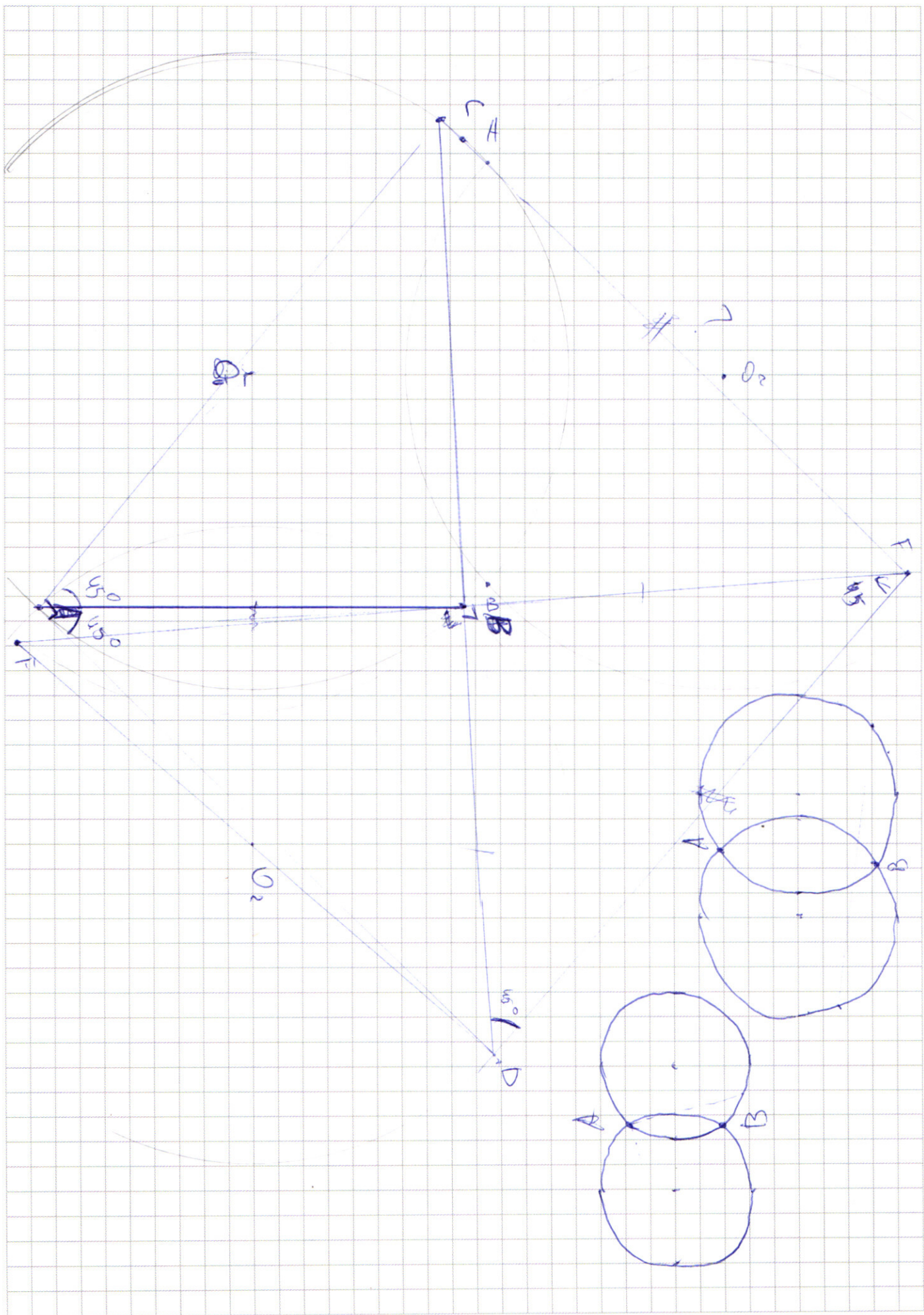
(Кроме ~~исключений~~ случаев α -исключений, когда ~~тогда нет~~ ~~полной~~ ~~симметрии~~ ~~и~~ ~~правой~~ ~~полуплоскости~~)

Количество пересечений будет больше 1, до тех пор, пока отрезок, соединяющий центры и начало координат не станет радиусом этих окружностей; тогда 2 точки из каждой окружности "схлопнутся" в одну и получится в общем счете 2 пересечения: в начале координат и, в силу симметрии, в точке $(0, -10)$ (т.к. эти фигуры ("внешняя окружность" и квадрат имеют ось симметрии $y=5$).

$$R = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2} = 13 \Rightarrow a = R^2 = 169$$

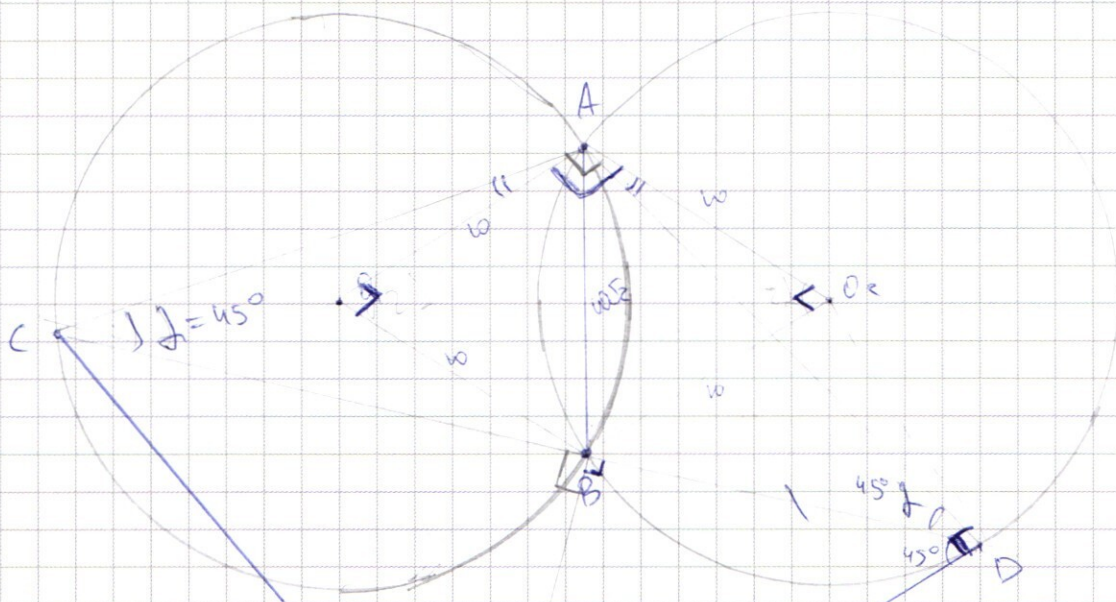
При дальнейшем увеличении α точки пересечения пропадут.

Orbit: $\phi = 49,169$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6) $\omega_1(O_1, r_1)$; $\omega_2(O_2, r_2)$ $r_1 = r_2 = 10$ $\omega_1 \perp \omega_2 = A; B$
 $CF = ?$



1) $\triangle BFD$ - р/б и кр/уг:

$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

2) Пусть $\angle ADB = 2\alpha$,

тогда $\angle AOB = 2\alpha$, т.к. он центральный, а значит в
2 р. больше, чем вписанной
(дуг дуги $\widehat{AB}$)

В силу симметрии относительно AB (т.к. $r_1 = r_2$)

$\angle AOB = 2\alpha$, но тогда, т.к. $\angle ACB$ - впис., он равен α

$\Rightarrow \triangle ADC$ - р/б, т.к. $\angle ACD = \angle ADC$, но т.к. он кр/уг., то

$\angle \alpha = 45^\circ \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \triangle AOB$ - кр/уг и р/б (т.к. $OA = OB$
 $= r = 10$)

$\Rightarrow AB = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} (1) \quad x^2 y^4 \cdot (-\ln x) = y^{\ln 4x^2} \\ (2) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(2): y^2 - y(x+4) - (2x^2 - 8x) = 0$$

$$D = x^2 + 16 + 8x + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x & (a) \\ y = 4-x & (b) \end{cases}$$

$$(1): (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7 \ln x}} = (x^2 y^4)^{-\ln x}$$

$$(a): y = 2x \rightarrow b \quad (1):$$

$$(16x^2 \cdot x^4)^{-\ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2x}}{(2x)^{7 \ln x}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{2^{\ln 2x} \cdot x^{\ln 2x}}{2^{7 \ln x} \cdot x^{7 \ln x}} = \frac{1}{16^{\ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$2^{\ln 2x} \cdot x^{\ln 2x}$$

$$\frac{2^{\ln 2x} \cdot x^{\ln 2x}}{2^{7 \ln x} \cdot x^{7 \ln x}} = \frac{1}{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$\frac{2^{\ln 2x}}{2^{7 \ln x}} \cdot \frac{x^{\ln 2x}}{x^{7 \ln x}} = \frac{2^{\ln x} \cdot x^{\ln x}}{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$\frac{2^{\ln 2}}{2^{7 \ln x}} \cdot \frac{x^{\ln 2}}{x^{7 \ln x}} = \frac{2^{\ln x} \cdot x^{\ln x}}{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$\frac{2^{\ln 2}}{2^{7 \ln x}} \cdot \frac{x^{\ln 2}}{x^{7 \ln x}} = \frac{2^{\ln x} \cdot x^{\ln x}}{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$\frac{2^{\ln 2}}{2^{7 \ln x}} \cdot \frac{x^{\ln 2}}{x^{7 \ln x}} = \frac{2^{\ln x} \cdot x^{\ln x}}{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}$$

$$\frac{2^{\ln 2}}{2^{7 \ln x}}$$

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln(y^{\ln y - 7 \ln x})$$

$$-\ln x \cdot 2 \ln(x y^2)$$

$$-\ln x \cdot 2(\ln x + 2 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

4/5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим (1):

основания левой и правой частей > 0 (по условию)

$\Rightarrow$ прологарифмируем их по основанию e :

$$\begin{aligned} (x^2 y^4)^{-\ln x} &= y^{\ln y - 7 \ln x} \quad | \quad \ln(\cdot) \\ -\ln x \cdot 2 \ln(xy^2) &= (\ln y - 7 \ln x) \cdot \ln y \\ -\ln x \cdot 2(\ln x + 2 \ln y) &= \ln^2 y - \ln y \cdot 7 \ln x \quad (*) \end{aligned}$$

(*) $\rightarrow$ б (*):

$$\begin{aligned} -\ln x \cdot 2(\ln x + 2 \ln 2x) &= \ln^2 2x - 7 \ln 2x \cdot \ln x \\ -2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln 2x &= \ln^2 2x - 7 \ln x \ln 2x \\ \ln^2 2x - 3 \ln x \ln 2x + 2 \ln^2 x &= 0 \quad | : (\ln^2 x \neq 0) \\ \left(\frac{\ln 2x}{\ln x}\right)^2 - 3 \left(\frac{\ln 2x}{\ln x}\right) + 2 &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln 2x}{\ln x} = 2 \Rightarrow \ln 2x = 2 \ln x = \ln x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \\ x > 0 \end{cases} \\ \frac{\ln 2x}{\ln x} = 1 \Rightarrow \ln 2x = \ln x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \emptyset \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{y = 4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} & (1) \\ y \leq 76 + 2x(2^{33} - 1) & (2) \end{cases}$$

Заметим, что при $x=6$:

$$f_1(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34} = 64 + 2^{34} + 2^{35}$$

$$f_2(x) = 76 + x(2^{33} - 1) = 64 + (11 + x) \cdot 2^{33} = 64 + 2^{34} + 2^{35}$$

Функции пересекаются в точке $(6; 2^6 + 3 \cdot 2^{34})$

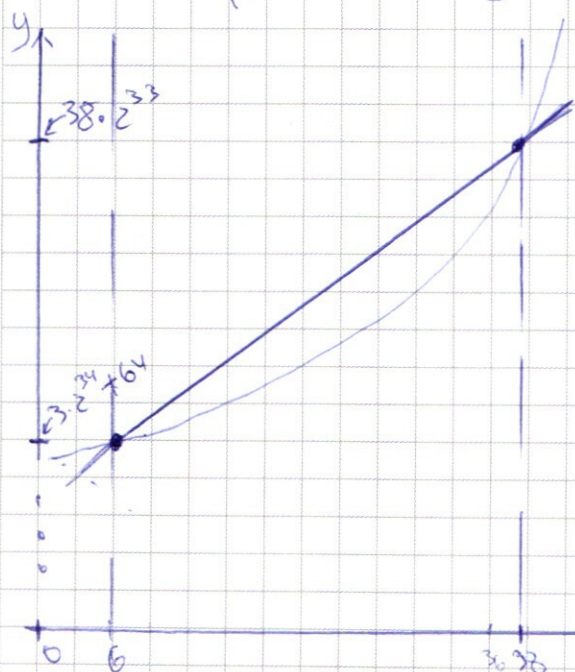
Также заметим, что при $x=38$:

$$f_1(x) = 2^{38} + 2^{34} + 2^{35}$$

$$f_2(x) = 76 + 38 \cdot 2^{33} - 76 = (32 + 4 + 2) \cdot 2^{33} = (2^5 + 2^2 + 2) \cdot 2^{33} = 2^{38} + 2^{35} + 2^{34}$$

Функции опять пересекаются: $\Rightarrow (38; 38 \cdot 2^{33})$

Построим график, считая, что $f_2(x) \rightarrow$ линейная
а $f_1(x)$ - показательная: (масштаб выбран для удобства)



Графики будут вести себя так, а не иначе, потому что таковы их функции: наклон линейной всегда постоянен, а показательная растёт $\Rightarrow$ если последняя имеет 2 точки пересечения с первой, то в это их максимальное кол-во, т.к. после 2го пересечения наклон показательной функции уже больше, чем у линейной.

Также отметим, что $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \mathbb{Z}$.

Посчитаем кол-во значений $x (\in \mathbb{Z})$, когда линейная ф-я выше показательной:

Очевидно, любое целочисленное значение

x из промежутка $(6; 38)$ подходит; таких

x всего $(38-6)-1 = 31$, и каждому x

соответствует целочисленный $y \Rightarrow$ всего 31

точка
Ответ: 31,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

1) косинус разность кос и сумма син:

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x + 2 \sin 7x \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\sin 7x \cos \left(\frac{3\pi}{4} - 2x \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sin \left(7x + \frac{3\pi}{4} - 2x \right) + \sin \left(7x - \frac{3\pi}{4} + 2x \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sin \left(5x - \frac{3\pi}{4} \right) + \sin \left(9x - \frac{3\pi}{4} \right) \right)$$

$$\cos 4x + \sin \left(5x - \frac{3\pi}{4} \right) + \sin \left(9x - \frac{3\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos 4x + \cos \left(\frac{5\pi}{4} - 5x \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{4} - 9x \right) = 0$$

$$\cos 4x + \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 9x \right) = 0$$

$$\cos 4x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x \right) = 0 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 4x - \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\text{N3} \begin{cases} (x^2 y)' - \ln x = y \ln \frac{y}{x^2} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^2 - y(x+4) - (2x^2 - 8x) = 0$$

$$D = (x+4)^2 + 4(2x(x-4)) =$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} ; \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x & (1) \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} = 4-x & (2) \end{cases}$$

$$y = 2x \quad (1)$$

$$y = 4 - x \quad (2)$$

$$(1): (x^2 y^4)^{\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} = y^{\ln y - 2 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$$

$$(16x^2 \cdot x^4)^{\ln x} = 2x^{\ln \frac{2x}{x^2}} = 2x^{\ln(2x) - \ln(x^2)} = 2x^{\ln 2 + \ln x - 2 \ln x} = 2x^{\ln 2 - \ln x}$$

$$\frac{\ln a}{a} \quad (16x^6)^{-\ln x} = \frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = \frac{(2x)^{\ln 2x}}{2x^{2 \ln x}} = \frac{2x^{\ln 2 + \ln x}}{2x^{2 \ln x}}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 4 \ln x}$$

$$y = e^{\ln y}$$

$$e^k = y$$

$$y^k = e^{k^2} = e^{\ln y} = e^{4 \ln^2 2x} = e^{4(\ln 2 + \ln x)^2}$$

№5

$$|x+y-5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y-5 \geq 0 \quad (1) \quad (2)$$

$$y \geq (-x-5)$$

$$y-x+5 \geq 0$$

$$y \geq x-5$$

$$(1) \geq 0, (2) \geq 0$$

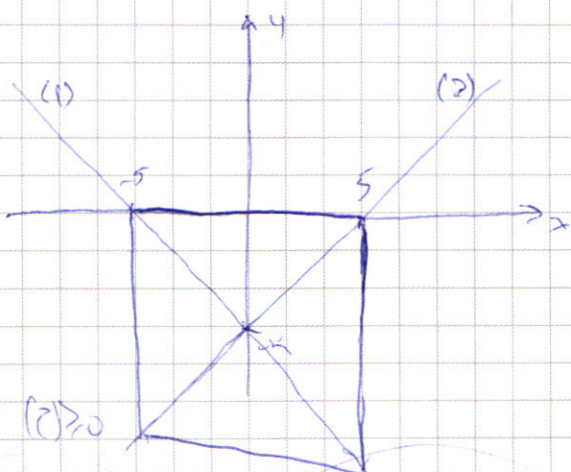
$$x+y-5 + y-x+5 = 10$$

$$y = 0$$

$$(1) \geq 0, (2) \leq 0$$

$$x+y+5 - (y-x+5) = 10$$

$$x = 5$$

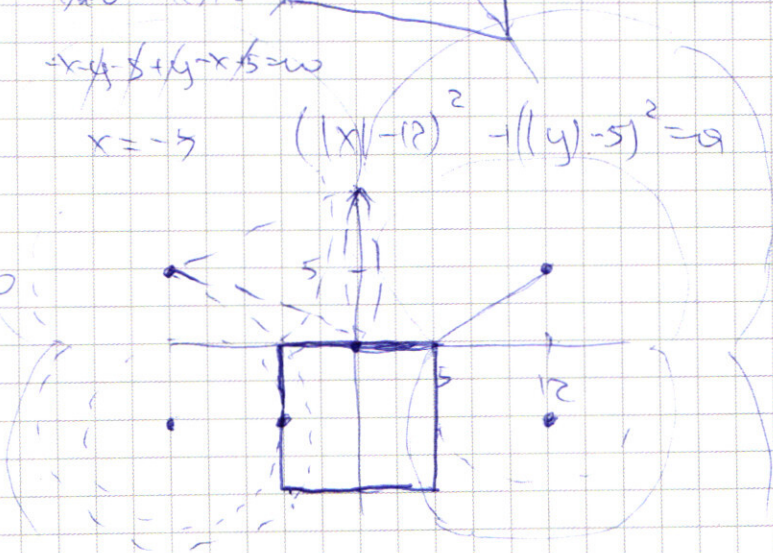


$$(1) \leq 0, (2) \geq 0$$

$$-x+y-5 + y-x+5 = 10$$

$$x = -5$$

$$(|x|-1)^2 - (|y|-5)^2 = 9$$

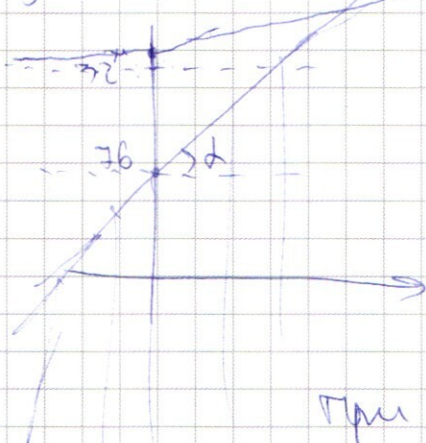


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y \leq 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^8 + 3 \cdot 2^{34} \quad 2 \cdot 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + x \cdot 2^{33} - 2x = 76 + (2^{33} - 2)x$$



$$\log 2 = \left(2^{33} - 2 \right)$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{31} = 76 \cdot 2^x (2^{32} - 1)$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{3x} = 76 + x(2^{33} - 2)$$

При $X=1$:

$$2 + 3 \cdot 2^{34} + 2^{33} - 2 = 74 + 2^{33}$$

$$2 + 3(2^{33} \cdot 2)$$

$$2 + (1+2)2^{34}$$

$$2 + 2^{34} + 3^5 \cdot 7^4 + 2^{33}$$

$$X = 7$$

$$4 + 2^{34} + 2^{35} \quad 76 + 2^{34} - 4 = 2^{34} + 72$$

 $x = 3:$

$$8 + 2^{34} + 7^{35}$$

$$76 - 6 = 70 + 32 \overset{38}{=} 70 + 2 \overset{33}{+} 2 \overset{34}{+} 2$$

$$x = 5$$

$$32 + 2^{34} + 2^{25}$$

$$6 + 2^{34} + 2^{34} + 2^{35}$$

$$32 + 2^{34} + 2^{35}$$

$$66 + 3 \cdot 2^{33} + 7^{34}$$

$$= 60 + 2^{33} + 2^{35}$$

$$\begin{array}{r} 3507 \\ \times 27 \\ \hline 20049 \\ 70140 \\ \hline 9261 \end{array}$$

9 3 3 7 7 7 3 7

$$\frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{40320}{1 \cdot 6 \cdot 6} = 1120$$

$$5.2 \cdot 7.8 = 40.56$$

$$x=6: \quad 64 + 3 \cdot 2^{34} = 64 + 2^{34} + 2^{34} + 2^{34} \quad 64 +$$

$$2^{33} \cdot (9+8) = 2^{35} + 2^{34}$$

$$x=7: \quad 128 + 2^{34} + 2^{35} \\ 76 - (\cancel{128} + 4) \cdot (2^{33} - 2) \\ 62$$

$$x=33: \\ 2^{33} + 2^{34} + 2^{35} \\ 76 + 2$$

$$x=38: \quad 2^{38} + 2^{34} + 2^{35} \\ 2^{33} \cdot \cancel{38} = \overset{=2^7}{32} + \overset{=2^2}{4} + \overset{=2^1}{2} = 3$$