

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\downarrow \text{т.к. } \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

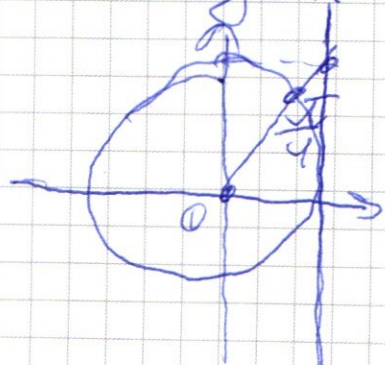
$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$\cos 2x \neq 0 \text{ (т.к. } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \text{ не является решением)}$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$



$$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \sin 7x = 2 \left(\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{10}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

СМОТРЕТЬ ПРОДОЛЖЕНИЕ

№2 (продолжение)

Ответ:
$$\begin{cases} \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi n}{2} \\ \frac{\alpha}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ \frac{\alpha}{12} + \frac{2\pi n}{9} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\overline{a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h}$$

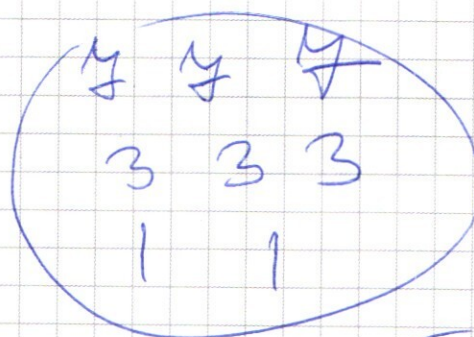
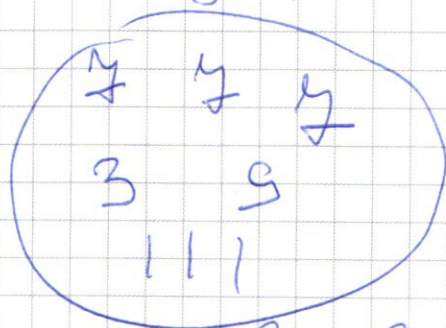
$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Значит среди цифр: есть одна 3-ка и есть три 7-ки. Также обязательно еще ~~а~~ где-нибудь или одна единица.

Все остальные цифры единички.



Все возможные наборы цифр

- 1) Набор, 7, 7, 7, 3, 9, 1, 1
Всего 8! перестановок. Но не все из них соответствуют

Способов переставить ^{N=1 (продолжение)} 7-ки — 6

Способов переставить 1-ку — 6

Т.е. С этим набором всего $\frac{8!}{6 \cdot 6} =$
 $= \frac{8!}{36}$ случаев

2) Набор: 4, 7, 7, 3, 3, 3, 1)

Всего 8! перестановок

7-ки: 6

3-ки: 6

1-ку: 2

Т.е. всего $\frac{8!}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{8!}{72}$
случаев

$$\begin{aligned} 3) \text{ Всего: } & \frac{8!}{36} + \frac{8!}{72} = 8! \left(\frac{3}{72} \right) = \\ & = 8! \cdot \frac{1}{24} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 3} = \\ & = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 42 \cdot 40 = \\ & = 1680 \end{aligned}$$

Ответ: 1680

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left\{ (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^4}\right)} \right. \\ \textcircled{2} & \left\{ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \right. \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^4}\right)}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ln\left((x^2 y^4)^{-\ln x}\right) &= \ln\left(y^{\ln\left(\frac{y}{x^4}\right)}\right) \\ -\ln x (\ln(x^2 y^4)) &= \ln \frac{y}{x^4} \cdot \ln y \\ -\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) &= \ln y (\ln y - 4 \ln x) \\ \ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x &= 0 \\ (\ln y - 2 \ln x)(\ln y - \ln x) &= 0 \\ \begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \end{aligned}$$

N=3 (продолжение)

$$② \quad y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

a) $y = x$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 3x - 4 \cdot x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$x=0$ — некорр. кор. т.к. $x > 0$

$$x=2 \Rightarrow y=2$$

$(2; 2)$ — решение

b) $y = x^2$

$$(x^2)^2 - x \cdot x^2 - 2x^2 + 3x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 3) = 0$$

$$x(x-2)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

$$x=2 \Rightarrow y=4$$

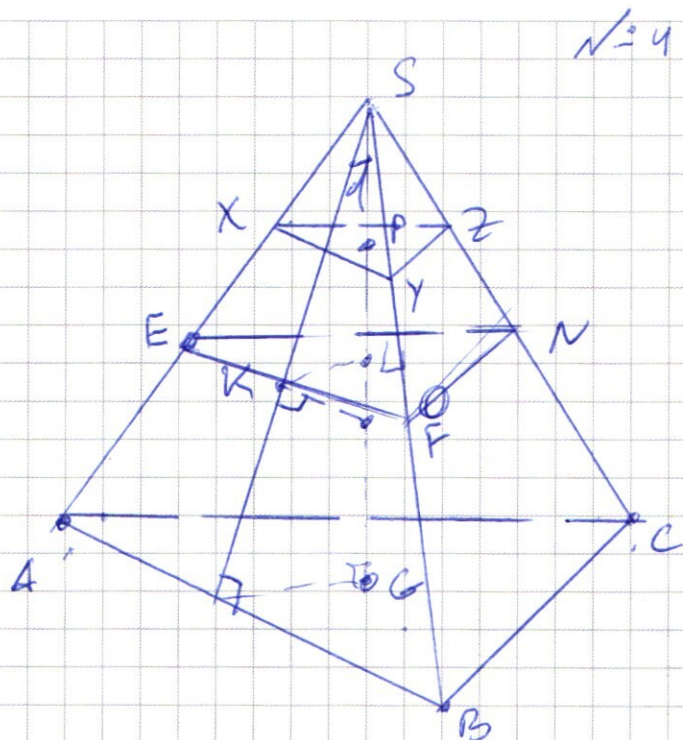
$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ — некорр. кор. т.к. } x > 0$$

$x=0$ — некорр. кор.

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 16 \\ S_{XYZ} &= 1 \\ S_{EFN} &= ? \\ \angle KSO &= ? \end{aligned}$$

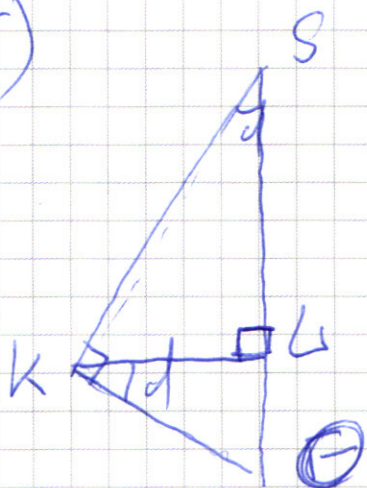
- 1) $\square$ A, B, C, точки пересечения $\downarrow$ боковых сре-
зных. (XYZ) - меньшее сечение
- 2) $(XYZ) \perp SG$ и $(ABC) \perp SG \Rightarrow (XYZ) \parallel ABC \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ пирамиды $SXYZ$ и $SABC$ подобны
с коэффициентом $k = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}}} = 4$
- 3) $\frac{SP}{SG} = k = 4$. $\square$ $SP = x \Rightarrow PG = 3x$.
Также $PG = 2R$
 $2R = 3x \Rightarrow R = \frac{3}{2}x$
 $SO = SG - OG = SG - R = 4x - \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x$
- 4) сфера вписана в $SABC \Rightarrow$ бока $\perp$.
используем теорему описанной сферы

N° 4 (продолжение)

$$\sin \angle KSO = \sin \angle d = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{\frac{5}{2}x} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{5}{2}x} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

5)



$$OL = KO \cdot \sin d = \\ = R \cdot \sin d = \frac{3}{2}x \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10}x$$

$$SL = SO - OL =$$

$$= \frac{5}{2}x - \frac{9}{10}x =$$

$$= \frac{5}{2}x - \frac{9}{10}x = \frac{25-9}{10}x = \frac{16}{10}x = \frac{8}{5}x$$

6) S_{EFN} параллельно $S_{ABC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{EFN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SL}{SG} \right)^2$$

$$S_{EFN} = S_{ABC} \cdot \left(\frac{SL}{SG} \right)^2 = 16 \cdot \left(\frac{\frac{8}{5}x}{4x} \right)^2 = \\ = 16 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^2 = 16 \cdot \frac{4}{25} = \frac{64}{25}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$
 $S_{EFN} = \frac{64}{25}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

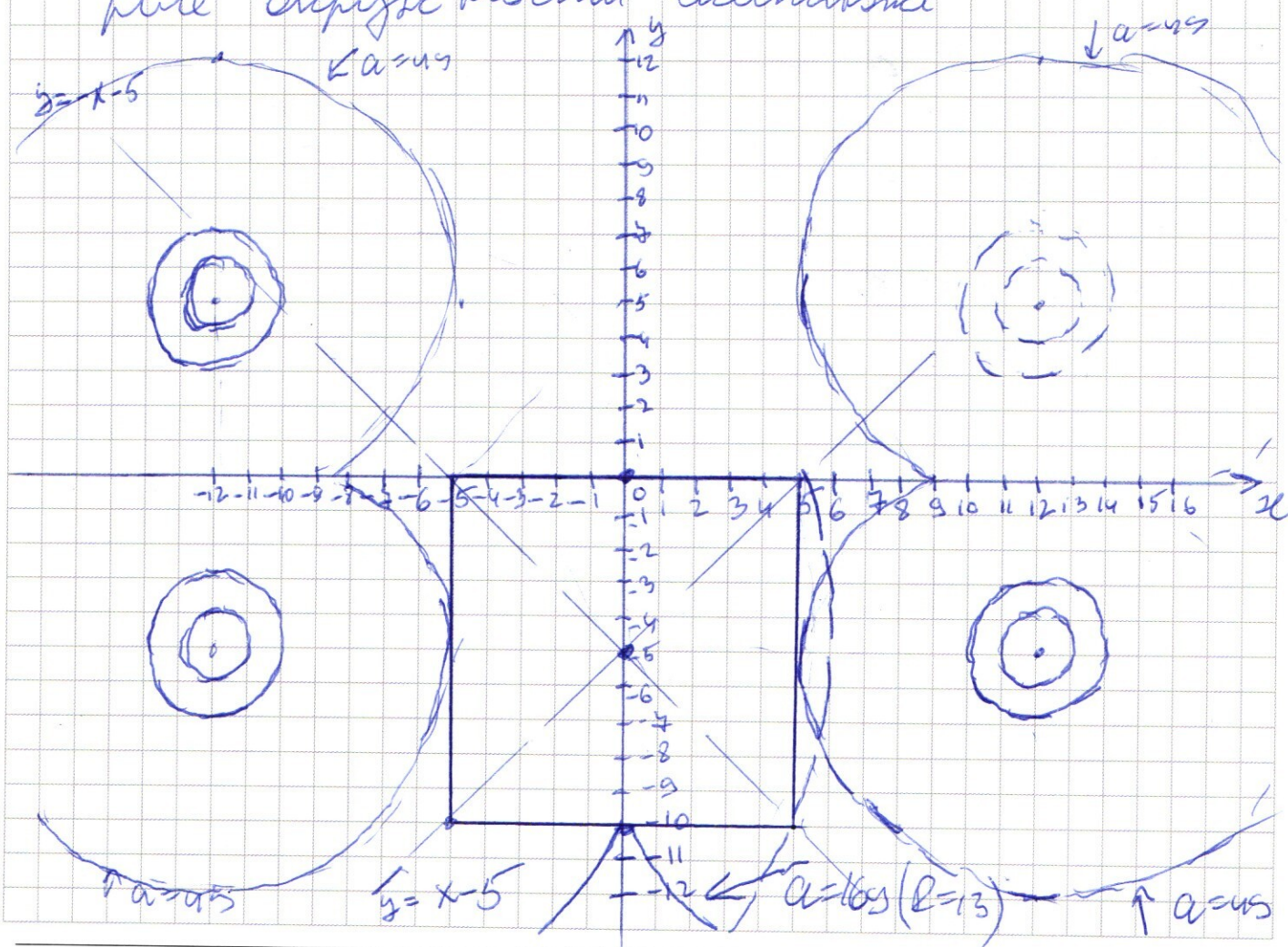
$$\textcircled{1} |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$a = ?$
2 вет.

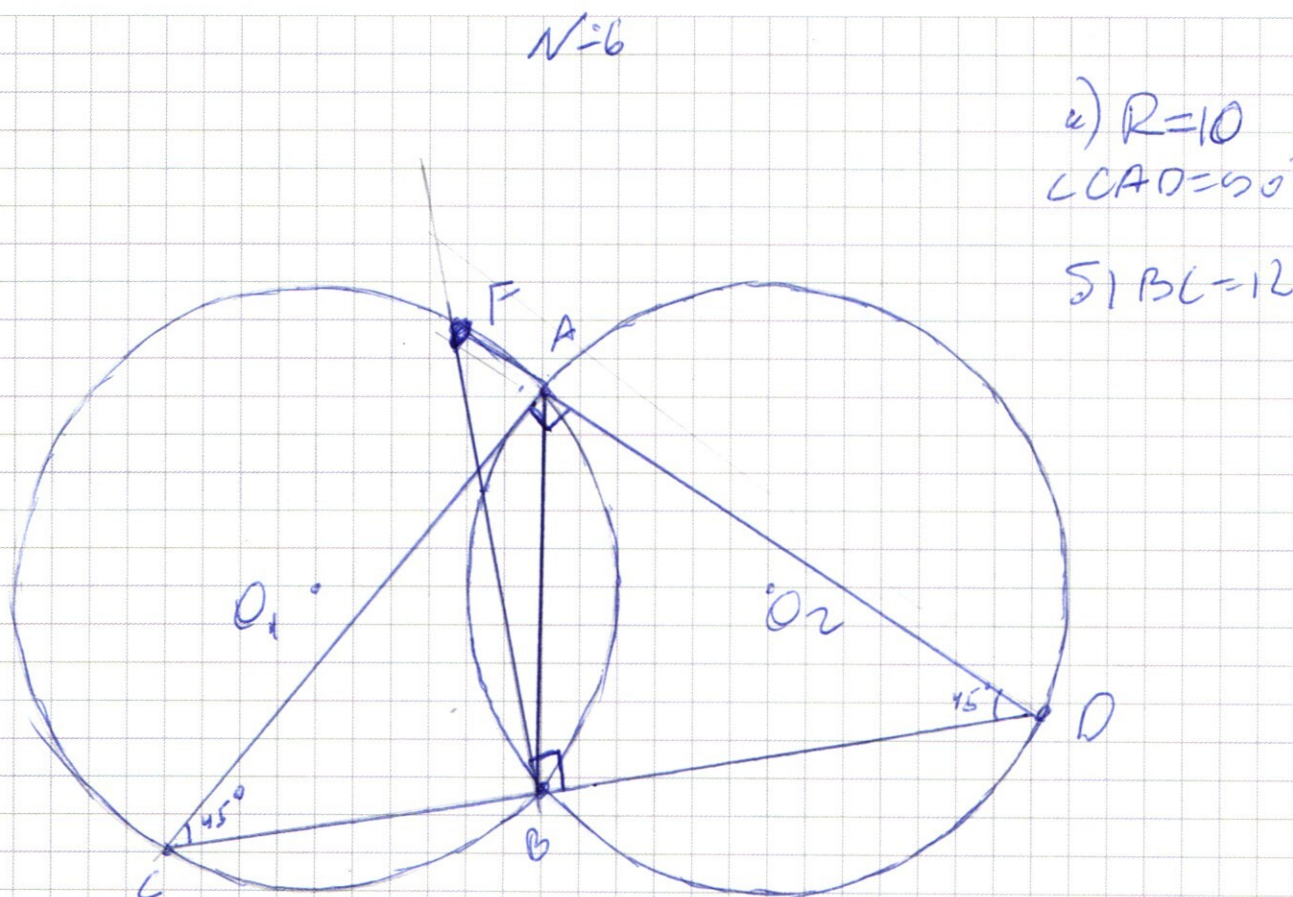
$$\textcircled{2} (|x|-12)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

Ур-е $\textcircled{1}$ задаёт квадрат со стороной 5
и центром $(0; -5)$

Ур-е $\textcircled{2}$ задаёт семейство из 4-х
окружностей. Когда $R > 5$, то меньшие
окружности внутри семейства



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

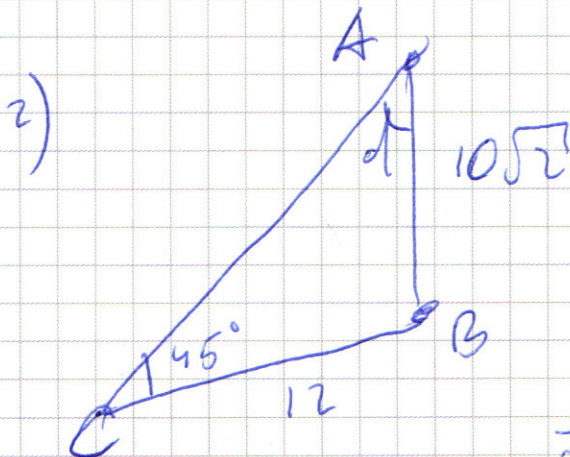


- a)
- 1) $\angle FBD=90^\circ$
 $BF=FD \Rightarrow \angle FDB=\angle BFD=45^\circ$
Т.к. $\angle CAD=90^\circ$
 $\angle ACD = \frac{\angle AOB}{2} = \angle ADC \Rightarrow \angle ACD=\angle ADC=45^\circ$
 $\angle ADC=\angle FDB=45^\circ \Rightarrow F, A, D$ ле-
жат на одной прямой.
- 2) $\angle FDB=45^\circ \Rightarrow \angle BFD=45^\circ$ (т.к. $\angle FBD=90^\circ$)
 $\angle AOB=90^\circ$ $\angle BFD=45^\circ \Rightarrow \angle BFD$ - впис-
ный угол $\Rightarrow F$ лежит на O_1

$$\left. \begin{array}{l} \angle CBF - \text{вписанный} \\ \angle CBF = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} N=6 \text{ (использование)} \\ \Rightarrow CF = 2R = 20 \end{array}$$

5) 1) $T. \sin \Delta ABC$ $BC = 12$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow AB = 2R \sin 45^\circ = \sqrt{2} R = 10\sqrt{2}$$



~~$T. \sin \Delta ABC:$~~

~~$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos 45^\circ$~~

$T. \sin \Delta ABC:$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin d}$$

$$\sin d = \frac{BC}{AB} \cdot \sin 45^\circ = \frac{12}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos d = \frac{4}{5}$$

$$AC = AB \cdot \cos d + BC \cdot \cos 45^\circ = 10\sqrt{2} \cdot \frac{4}{5} + 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

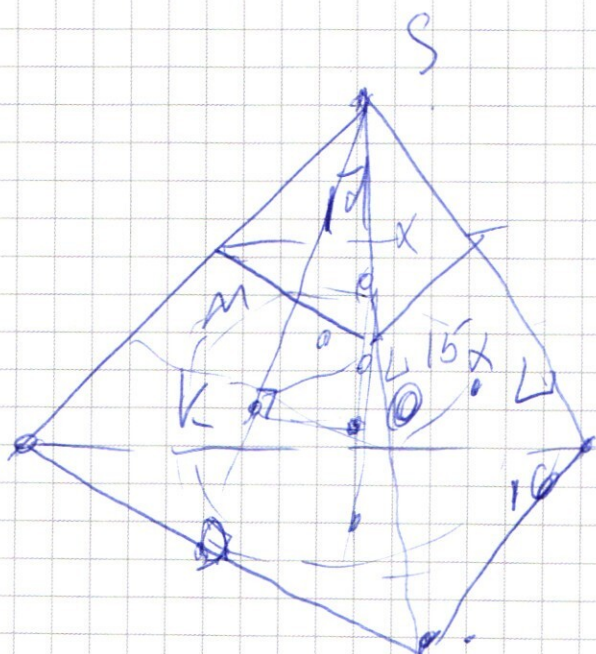
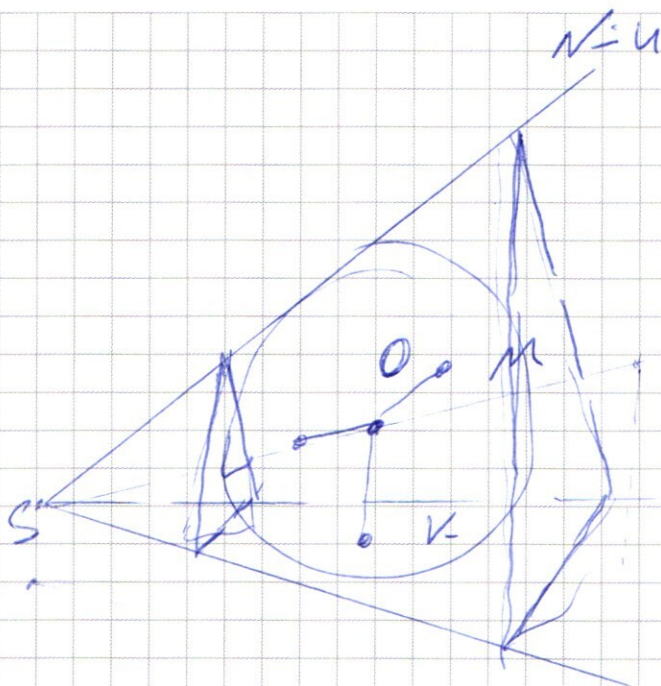
3) $\Delta FAC:$

$$AF = \sqrt{CF^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 196 \cdot 2} = \sqrt{400 - 392} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{AC \cdot AF}{2} = \frac{14\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 28$$

Ответ: $CF = 20$; $S_{ACF} = 28$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R = \frac{15x}{2}$$

$$KO = R$$

$$SO = 16x - R = 16x - \frac{15x}{2} = \frac{17x}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{\frac{17x}{2}} =$$

$$LO =$$

$$= \frac{\frac{15x}{2}}{\frac{17x}{2}} = \frac{15}{17}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

№2 (продолжение)

Ответ:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\pi n}{2} \\ \frac{x}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ \frac{x}{12} + \frac{2\pi n}{5} \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

№3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^4} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \frac{y}{x^4} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\ln \left((x^2 y^4)^{-\ln x} \right) = \ln \left(y \ln \frac{y}{x^4} \right)$$

$$-\ln x \ln (x^2 y^4) = \ln \frac{y}{x^4} \cdot \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y (\ln y - 4 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln y^2 - 4 \ln x \ln y$$

$$\ln y^2 - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

N=3 (упрощение)

$$y = x$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y = x^2$$

$$(x^2)^2 - x \cdot x^2 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

~~124~~

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$2: \quad 8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -6 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-4)=0$$

$$x^2+x-4=0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - 2\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \\ & \sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \downarrow 2\sin 7x \cos 2x \\ & \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos 9x - \cos 5x \\ & \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta = \\ & = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \quad \cos 9x - \cos 5x = \\ & = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x \end{aligned}$$

$$N=5$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

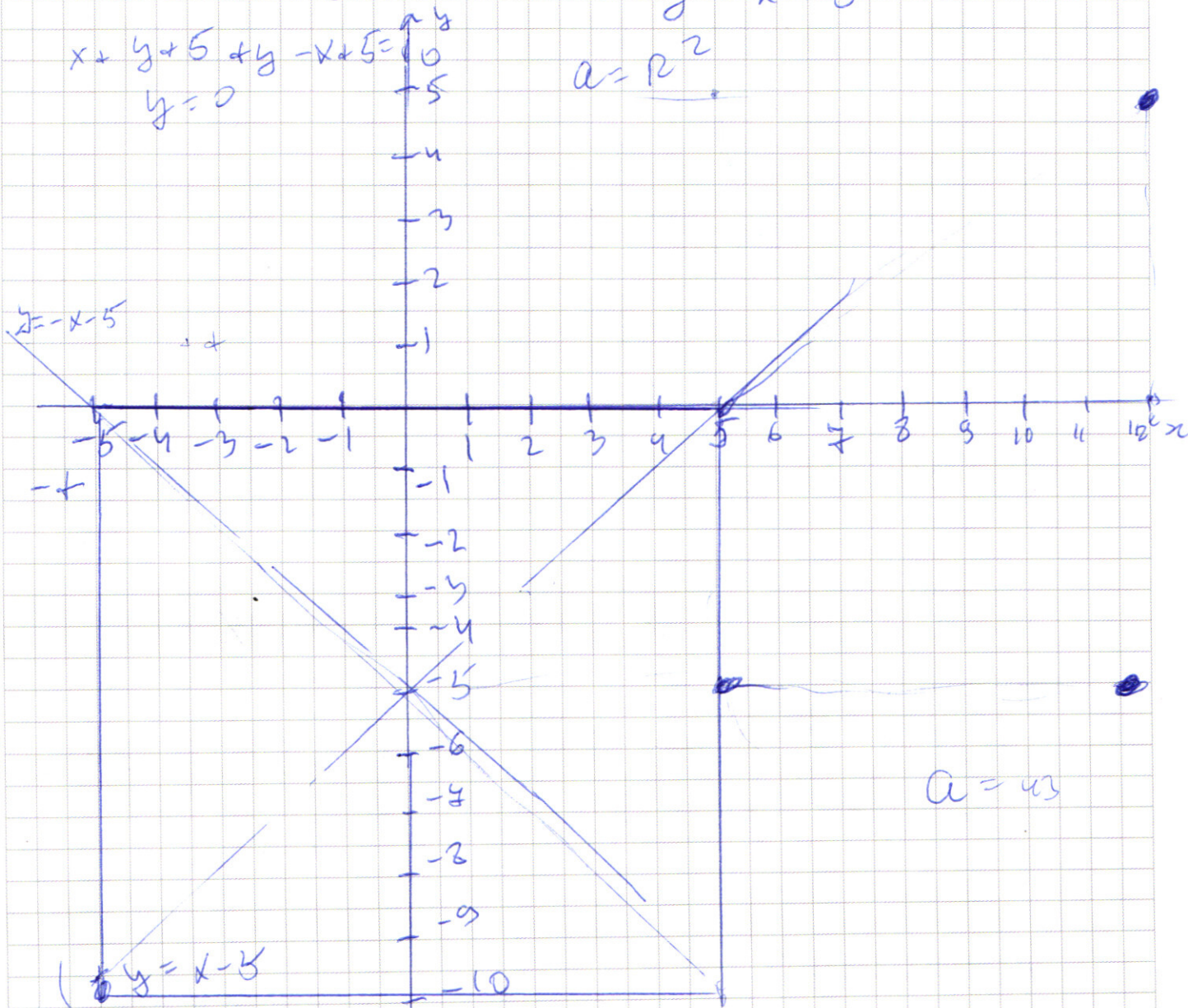
$$1) |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$

$$\begin{aligned} x+y+5 + y-x+5 &= 10 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$a = 2^2$$



$$a = 43$$

$$\begin{aligned} -x-y-5 + y-x+5 &= 10 \\ x &= -25 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

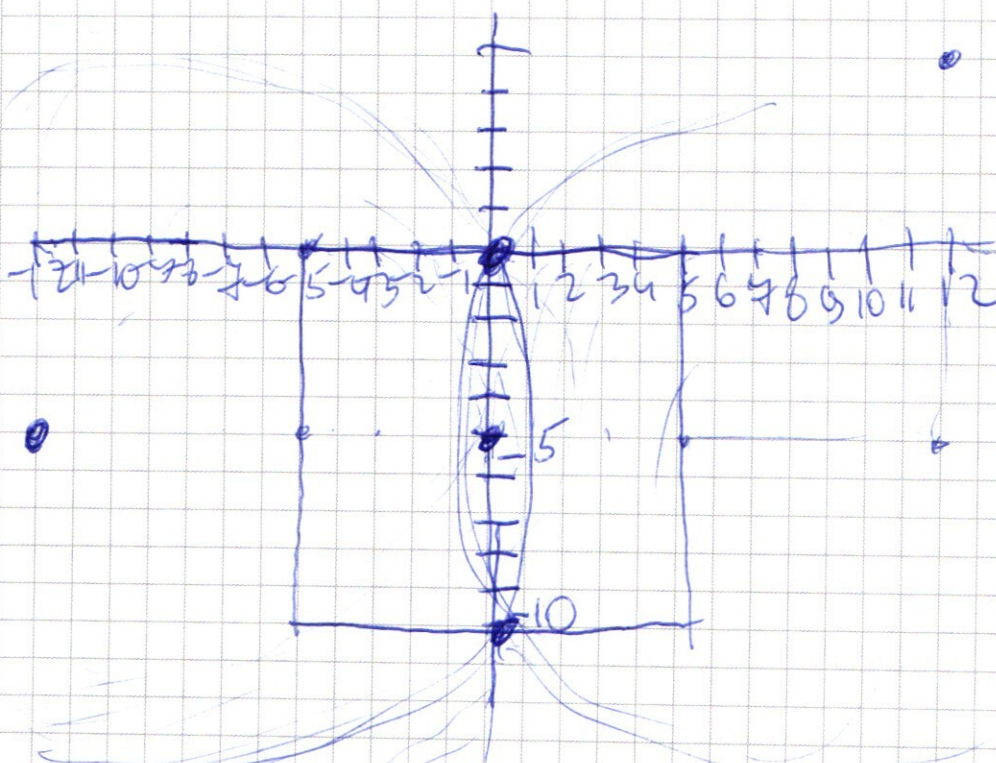
№2 (вариант)

$$2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x - 2 \sin 7x \sin 2x = 0$$

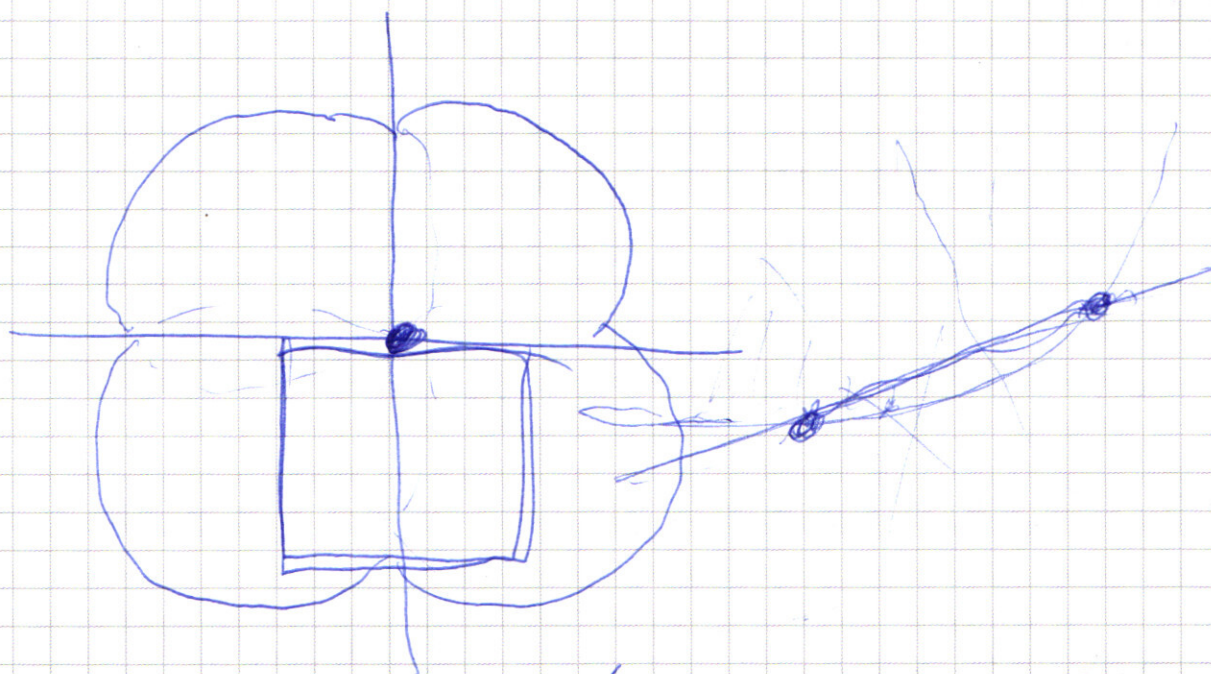
$$2 \sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

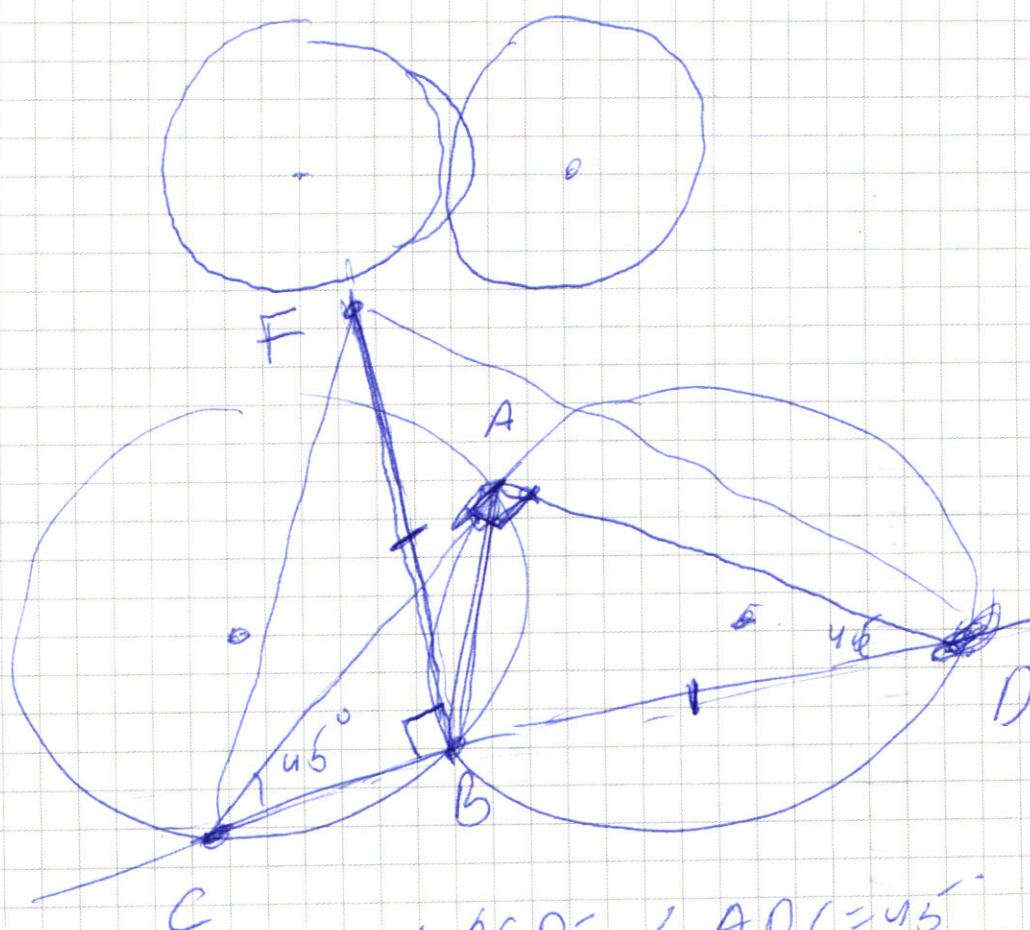
$$(\cos 2x - \sin 2x) \cdot (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$



$a=13$



№ 6



$$R = 10$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

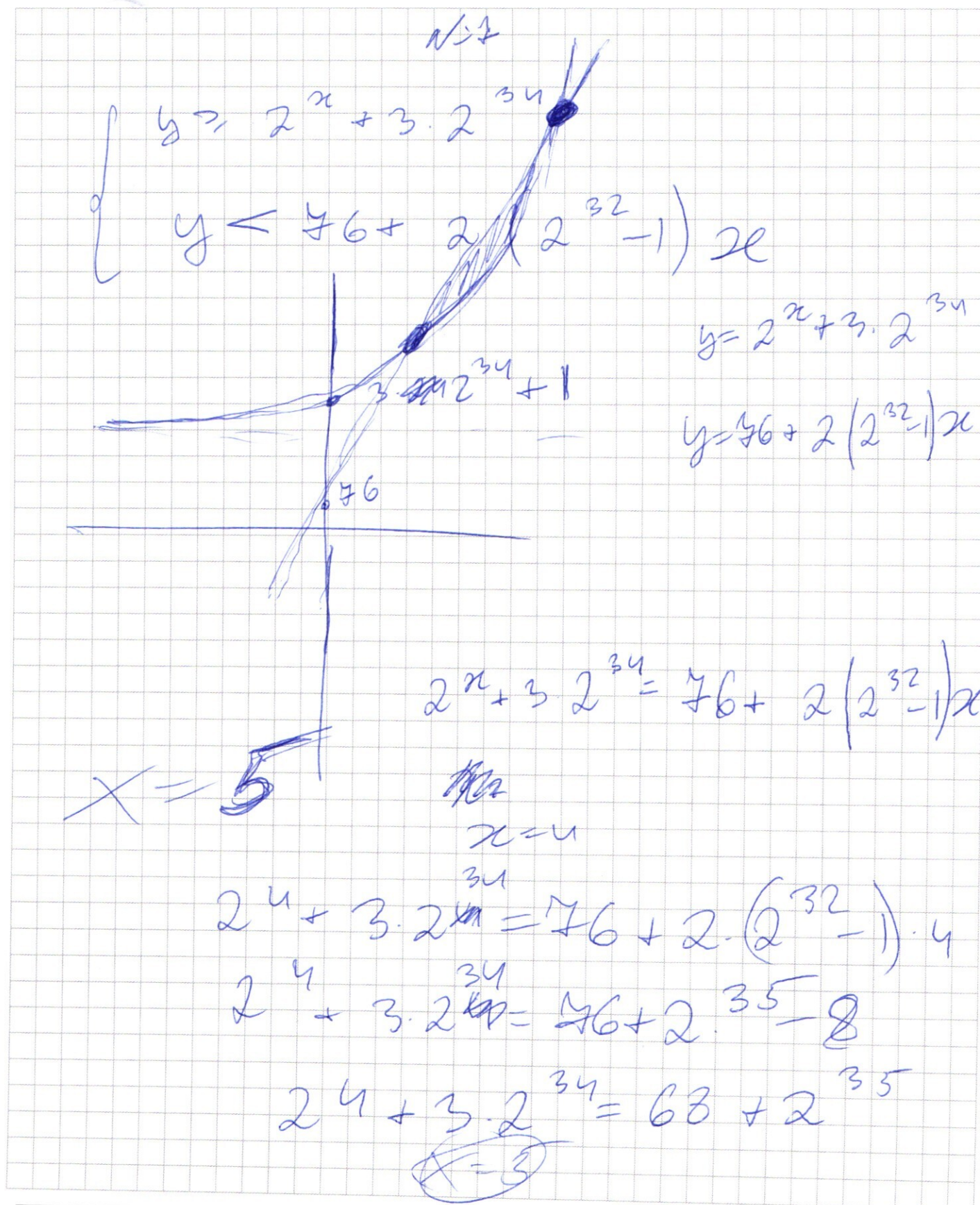
$$CF = ?$$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\text{т. Sin} \quad \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R \quad R = \frac{AB}{2 \sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 2R \sin 45^\circ = \sqrt{2} R$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x=6$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^4 = 76 + 2(2^3 - 1) \cdot 6$$

~~$$2^6 + 3 \cdot 2^4 =$$~~

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

1	-1	-6	8	$x^2 + x - 4$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
2	1	1	-4	



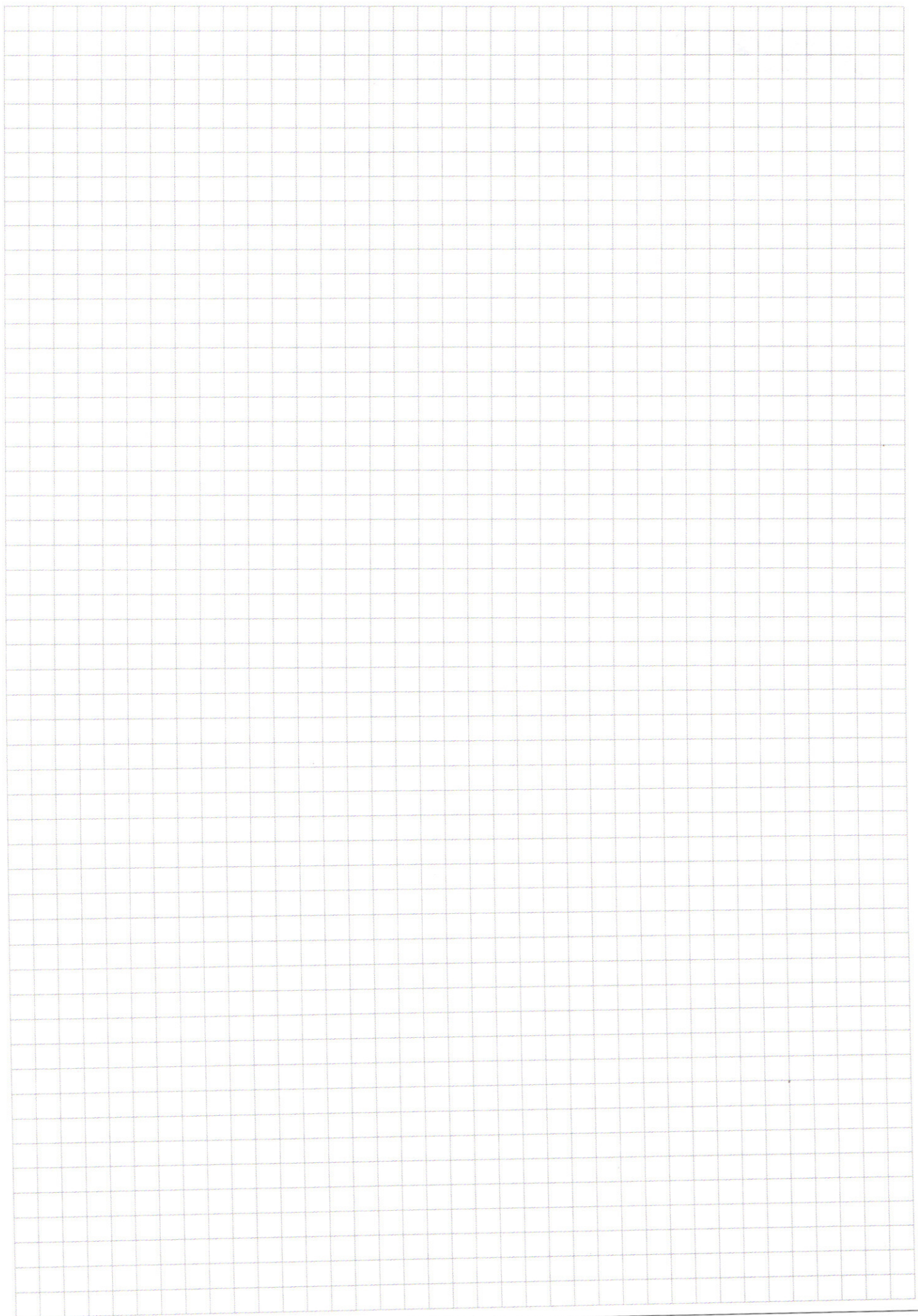
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)