

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \\ \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}, n, k, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$

③
$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (*) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (*):

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

прологарифмируем обе части по $\ln$ (натур. логар.),

получим:

$$\ln(x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(y/x^7)}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln\left(\frac{y}{x^7}\right) \cdot \ln y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

(используем формулы: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ и $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$)

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)\right) + \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) - \cos 4x + \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{9x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{9x}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$2 \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \left(\sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)\right) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{9x}{2}\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)\right) - \cos 4x + \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) - \cos 4x + \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{9x}{2}\right) + \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{9x}{2}\right)\right) \quad 2 \sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$-2 \sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{9x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^7} > 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\begin{aligned} -2(x^2 - 4x + 4) + 8 + y^2 - xy - 4y &= 0 \\ -2(x-2)^2 + (y-2)^2 - xy + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$-2x(x-4) + y(y-4) - xy = 0$$

$$y(y-4) - xy - 2x(x-4) = 0$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^7) \cdot \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \cdot \ln y$$

Пусть $\ln x = a, \ln y = b$:

$$-a(2a + 4b) = (b - 7a)b$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 7ab$$

$$2a^2 + b^2 = 3ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

Сист. уравнений. Всп:

$$\begin{cases} x=y \\ x=\sqrt{y} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ y^2 - y\sqrt{y} - 2y + 8\sqrt{y} - 4y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} x=y \\ -2y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ -2y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=0 \Leftrightarrow \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ (не удовн.)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=\sqrt{y} \\ y^2 - y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} - 6y = 0 (*) \end{cases}$$

(*): Пусть $\sqrt{y}=t, t>0$

$$t^4 - t^3 - 6t^2 + 8t = 0$$

$$t(t^3 - t^2 - 6t + 8) = 0$$

восстп.
схем. Горжур.

	1	-1	-6	8
	↓	2	2	-8
2	1	1	-4	0

$$t(t-2)(t^2+t-4) = 0$$

$$\begin{aligned} t^2+t-4 &= 0 \\ D &= 1+16=17 \\ t &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при условии ОДЗ, т.е. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ получаем

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

Введем замену, пусть $a = \ln x$, $b = \ln y$:

$$-a(2a + 4b) = (b - 7a)b$$

$$-2a^2 + 4ab = b^2 - 7ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

Пусть $t = \frac{a}{b}$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\ln x}{\ln y} = 1 \\ \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

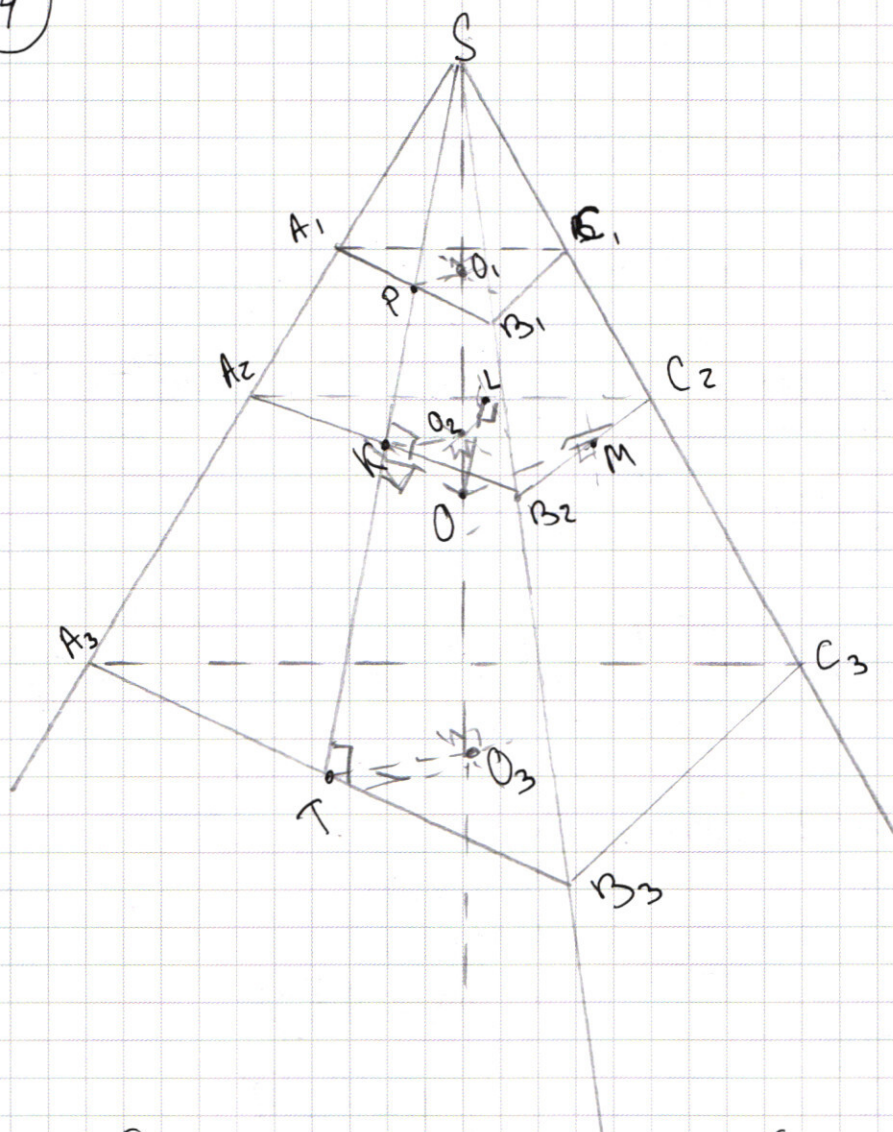
$$\begin{cases} x = y \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$$

вернемся
к системе
ур-ий

поделим на
 $b^2 (\neq 0)$

иначе, если $b^2 = 0$,
то $\begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$,
но данн. решение
не ур. системы,
т.е. $b^2 \neq 0$

4



Дано:
сфера с ч. O
сф. кас.
пл-тей:
 $(A_1B_1C_1)$;
 ~~$(A_2B_2C_2)$~~ ;
 $(A_3B_3C_3)$;
и пл-тей
гран. тр-угла
 $S_{A_1B_1C_1} = 1$
 $S_{A_3B_3C_3} = 16$
т.к. L, M - точки
касания

$\angle KSO - ?$

$S_{сф. (KLM)} - ?$

1) т.к. пл-ть $(A_1B_1C_1)$ и $(A_3B_3C_3)$ касаются
сферы и сф-ра вписана в трех. угол, то
получаем, что сфера вписана в угол.
принадлежит $A_3B_3C_3$ и $A_1B_1C_1$; т.к. $(A_1B_1C_1) \perp SO$
и $(A_3B_3C_3) \perp SO$, то эти пл-ти $\parallel$ -ны, аналог.
получим, что т. O_1 и O_3 (точки касан. сферы с
 $\parallel$ -ными пл-стями) лежат на SO (т.к. OO_1 и
 OO_3 также $\perp$ -ны $\parallel$ -ным пл-стям $(A_1B_1C_1)$ и $(A_3B_3C_3)$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} t = 0 \text{ (не угод.)} \\ t = 2 \\ t = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ (не угод.)} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{(\sqrt{17} - 1)^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

система ~ 2 приг. вид:

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y = 4 \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

получ. оконч. ответ:

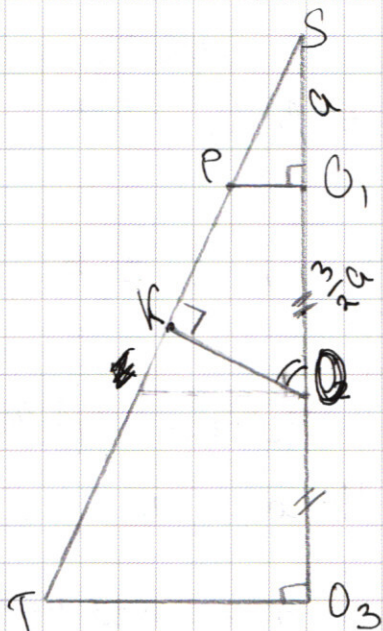
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2); (2; 4);$
 $\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$

$$\frac{A_1 B_1}{A_3 B_3} = \frac{S B_1}{S B_3} = \frac{P B_1}{T B_3} = \frac{1}{4} \quad \frac{SP}{ST} = \frac{1}{4}, \text{ т.е.}$$

$$ST = 4SP$$

5) Р-м (ТСО₃):



$$\frac{SP}{ST} = \frac{1}{4} = \frac{SO_1}{SO_3} \quad \left(\begin{array}{l} \text{подобие} \\ \text{прям. } \Delta \text{ ив} \end{array} \right)$$

$$O_1 O_3 = OO_3 \text{ (как радиусы)}$$

Пусть $OO_1 = OO_3 = x$,
 $SO_1 = a$, тогда

$$\frac{a}{a+2x} = \frac{1}{4}$$

$$4a = a+2x$$

$$x = \frac{3}{2}a, \text{ т.е. } O_1 O_3 = 3a$$

$$SO = a + \frac{3}{2}a = \frac{5}{2}a$$

III.к. Т.К - точка касания (A₃SB₃) сферы, то
 $OK \perp (A_3SB_3)$, тогда $OK \perp ST$, т.е. ΔSKO - пр/уг,

тогда $KO = OO_1 = \frac{3a}{2}$, и тогда
 $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{5a}{2}} = \frac{3}{5}$,

т.е. $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

б) из прам. уг. ΔKSO : $SK = \sqrt{\frac{25a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}} = \frac{4a}{2} = 2a$

т.к. $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$ (угл ост.), то

$\cos \angle KSO = \frac{4}{5}$, тогда в пр/уг ΔTSO_3 :

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) т.к. сфера кас-лась A_2B_2 , B_2C_2 , A_2C_2 , то 4
точки касан. K, L, M, N т.о. проеку.
в центр. впис. окр-ти в $\triangle A_2B_2C_2$, т.е.

$SO \perp (A_2B_2C_2)$ в точке O_2

$(KLM) \cap$ пи-ти трех. угла в то же время $A_2B_2, A_2C_2,$
 C_2B_2 (т.е. пи-ти $(A_2B_2C_2)$)

тогда $SO \perp (A_2B_2C_2)$, тогда $(A_2B_2C_2) \parallel (A_1B_1C_1) \parallel$
 $\parallel (A_3B_3C_3)$, тогда т.к. пи-ти $\parallel$ -ны, то

они $\parallel$ -ны пи-ти $(A_3B_3C_3)$ то $\parallel$ -ны прямые,
т.е. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$

3) т.к. O_2 - ц. впис. окр-ти в $\triangle A_2B_2C_2$, то
 $O_2K \perp A_2B_2$, тогда т.к. $SO_2 \perp (A_2B_2C_2)$, то по ТПП

$SK \perp A_2B_2$, тогда $SK \perp A_1B_1$ и $SK \perp A_3B_3$ (т.к. $\parallel$ -ны)

пусть $SK \cap A_3B_3 = T$, $SK \cap A_1B_1 = P$

4) Пусть т.к. $(A_1B_1C_1) \parallel (A_3B_3C_3)$, то

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_3B_3C_3$, тогда $\frac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle A_3B_3C_3}} = (k)^2 = \frac{1}{16}$

$k = \frac{1}{4}$ (коэф. подобия), тогда $\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{1}{4}$, т.к.

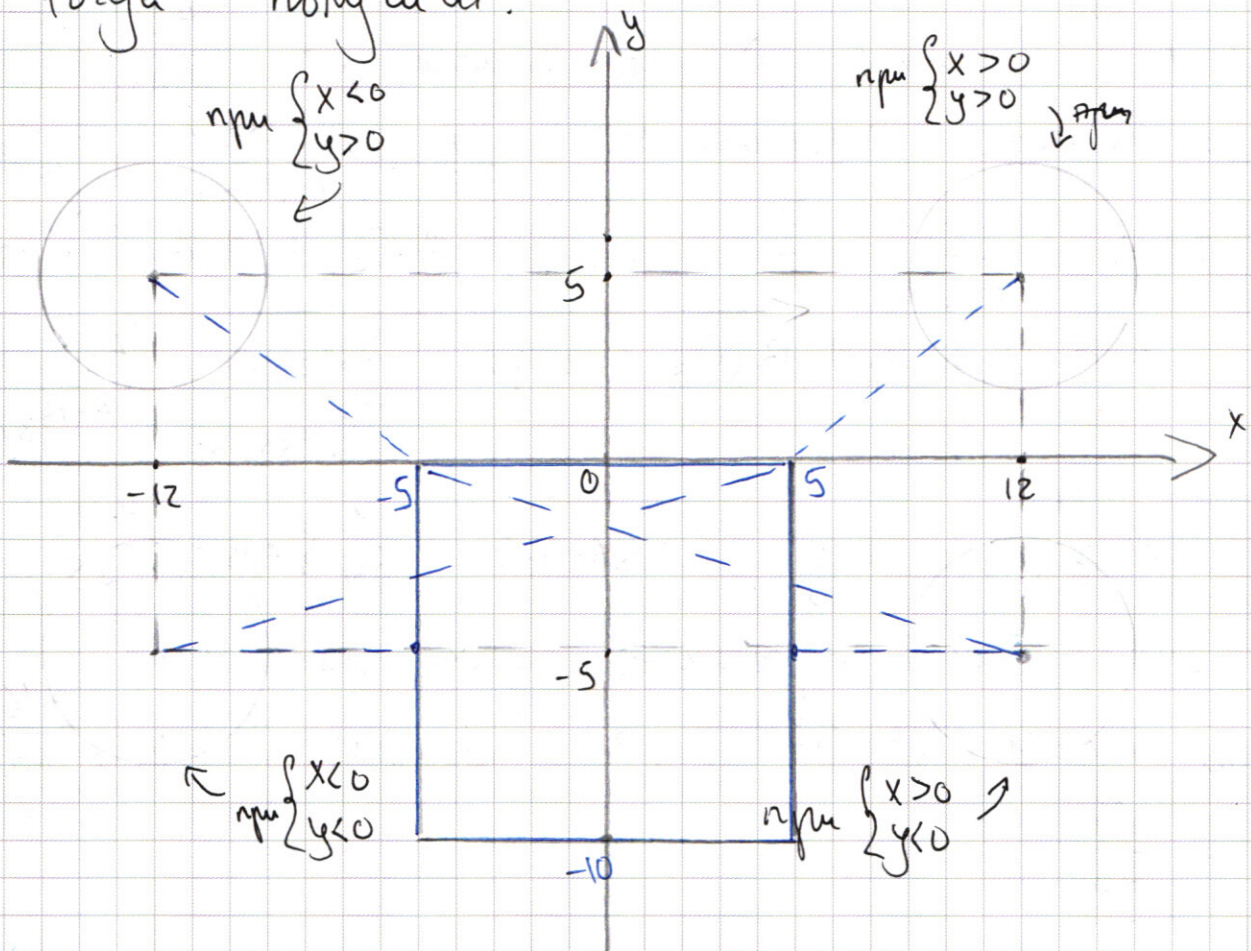
$A_1B_1 \parallel A_3B_3$, то $\triangle PSB_1 \sim \triangle TSB_3$, тогда и

$\triangle A_1SB_1 \sim \triangle A_3SB_3$, тогда

(2): $(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a$

при рас-тве модуля получим четыре варианта, т.е. четыре четверти в декарт. сист. координат, ур-ие будет задавать четыре окр-ти (при $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ - в I четверти, $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ - во II квт.), и т. далее

тогда получим:



радиус всех окр-тей равно $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$)
(при $a = 0$ - точка)

тогда ~~максимальной радиус окр-ти~~
т.е. от знака x и y зависит расположение
центра окр-ти с радиусом $\sqrt{a}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$TS = \frac{SO_3}{\cos \angle KSO} = (a + 3a) \cdot \frac{5}{4} = 4a, \text{ тогда}$$

$$\frac{SK}{ST} = \frac{2a}{5a} = \frac{2}{5}$$

т.к. в пункте (4) мы получили, что $\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{SP}{ST}$,
по аналог. получим, что $\frac{SK}{ST} = \frac{A_2B_2}{A_3B_3}$ (по подоб. $\triangle$ -ов),

тогда $\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{1}{5}$, т.к. $(A_2B_2C_2) \parallel (A_3B_3C_3)$, то

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3, \text{ тогда } \frac{S_{\triangle A_2B_2C_2}}{S_{\triangle A_3B_3C_3}} = \left(\frac{A_2B_2}{A_3B_3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{25}, \text{ тогда } S_{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{1}{25} S_{\triangle A_3B_3C_3} = \frac{4 \cdot 16}{25},$$

т.к. (KLM) пересекает грани тетра. угла
по пп-м $(A_2B_2C_2)$, то $S_{\text{сеч.}(KLM)} = S_{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{4 \cdot 16}{25} =$
 $= \frac{64}{25}$

Ответ: $a \arcsin \frac{3}{5}; \frac{64}{25}$

5)
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ [(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2] = a & (2) \end{cases}$$

Тогда найдем решение когда окр-ть пересекает грани кв-та (возможно только 2 точки):

$$1) \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \text{ радиус окр-ти } R \text{ с } y. \text{ в точке } (-12; -5) \text{ тогда } R > 7 \text{ и } R \leq \sqrt{(5+12)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{289+25} = \sqrt{314}$$

$$2) \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \text{ радиус } R \text{ с } y. \text{ в т. } (12; -5) \text{ и радиус } R \text{ тогда } 7 < R \leq \sqrt{314}$$

$$3) \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ } y. \text{ в т. } (12; 5) \text{ и } \sqrt{25+49} < R \leq \sqrt{(17)^2 + 5^2} \\ \sqrt{74} < R \leq \sqrt{314}$$

$$4) \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ } y. \text{ в точке } (-12; 5), \sqrt{74} < R \leq \sqrt{314}$$

ограничение радиуса получ. из прямоуго. дв-ва (т.е. расстоя. между центром и вершинами или кв-та)

Тогда получаем:

$$\begin{cases} 7 < R \leq \sqrt{314} \\ \sqrt{74} < R \leq \sqrt{314} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1): $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x \geq -5 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y < -5 \\ y-x \geq -5 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y < -5 \\ y-x < -5 \\ y=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x < -5 \\ x=5 \end{cases}$$

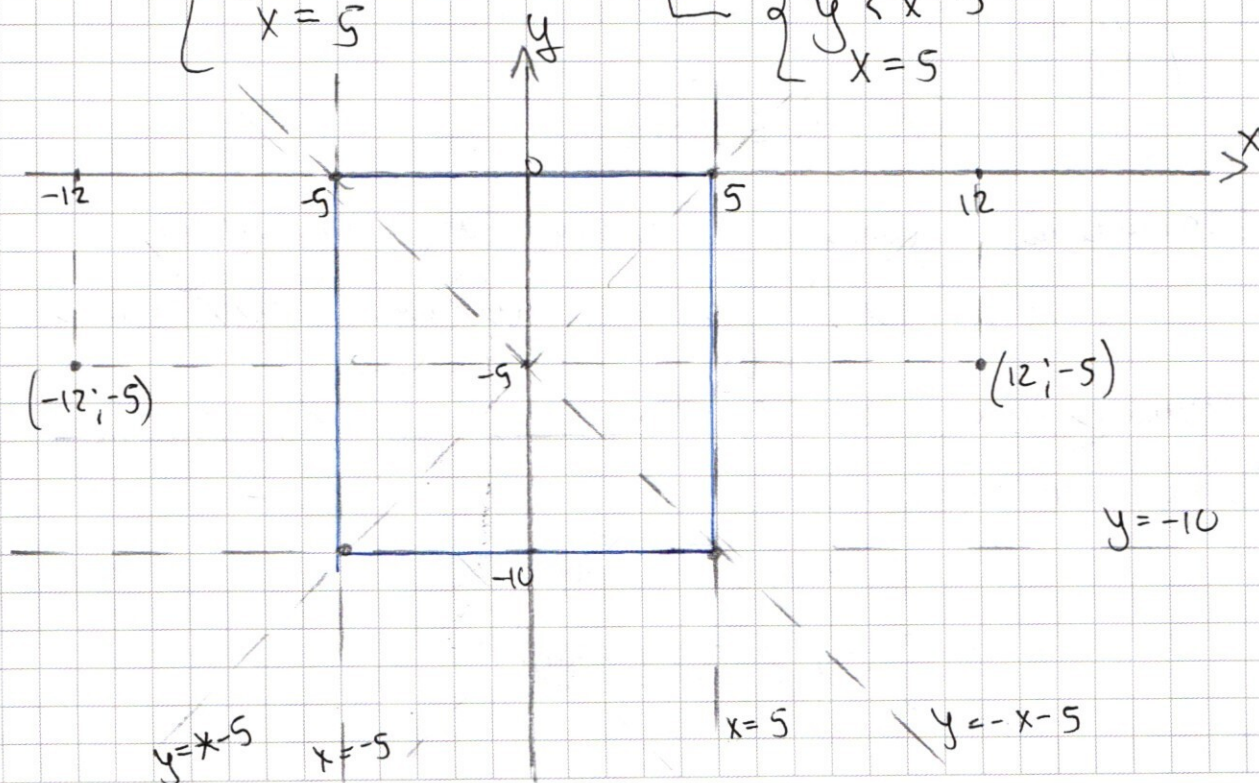
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x-5 \\ y \geq x-5 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x-5 \\ y < x-5 \\ y=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \\ x=5 \end{cases}$$



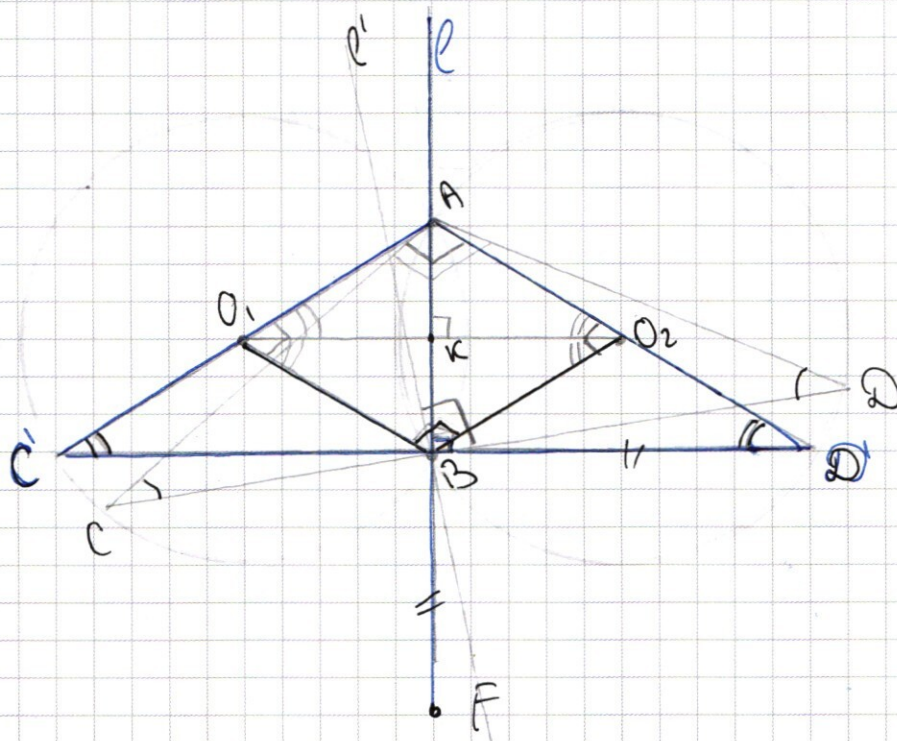
$$\begin{cases} 7 < \sqrt{a} \leq \sqrt{314} \\ \sqrt{74} < \sqrt{a} \leq \sqrt{314} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49 < a \leq 314 \\ 74 < a \leq 314 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad 74 < a \leq 314$$

Ответ: $[74, 314]$ при $a \in (74; 314]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



Qanu:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 10$$

$$\angle CAQ = 90^\circ$$

$$T.F \in \mathcal{C}^1$$

$P'LCQ$

(1.3 - och 1.4)

$$BF = AQ$$

CF-?

1) Т.Н. $r_1 = r_2$, $\pi \rightarrow O, AO_2B$ - ромб (все стор. равны),
 $\pi \rightarrow a$ $\angle AO_1B = \angle AO_2B$, $\pi \rightarrow a$ $\angle ACB = \angle ADB$ (как опп. центр.)

2) т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, то $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$,
 тогда $\angle AOB = \angle AOB = 90^\circ$, т.е. AOB - кв-т,
 т.е. $\angle BOA = 90^\circ$, тогда $\angle KBO = 45^\circ$

14. ~~$\triangle ABC$~~ Тогда $AB \perp CD$, ну и равен
сумма треугольников $A \times C$

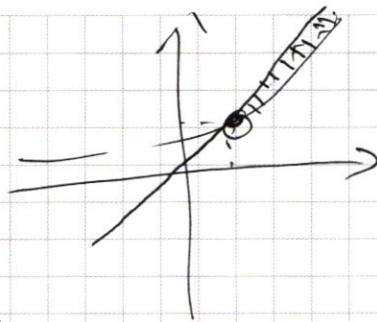
3)

3

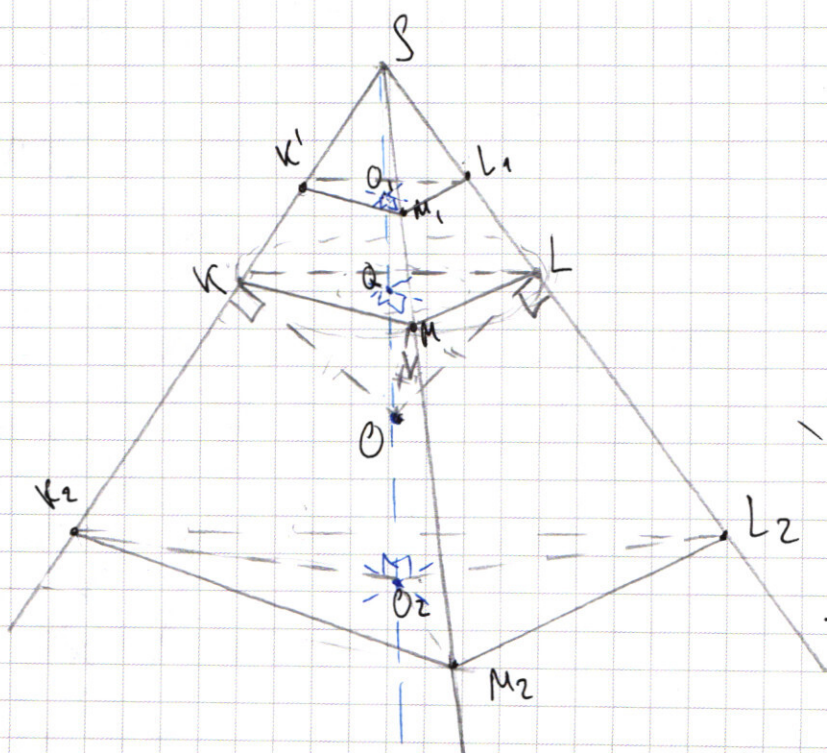
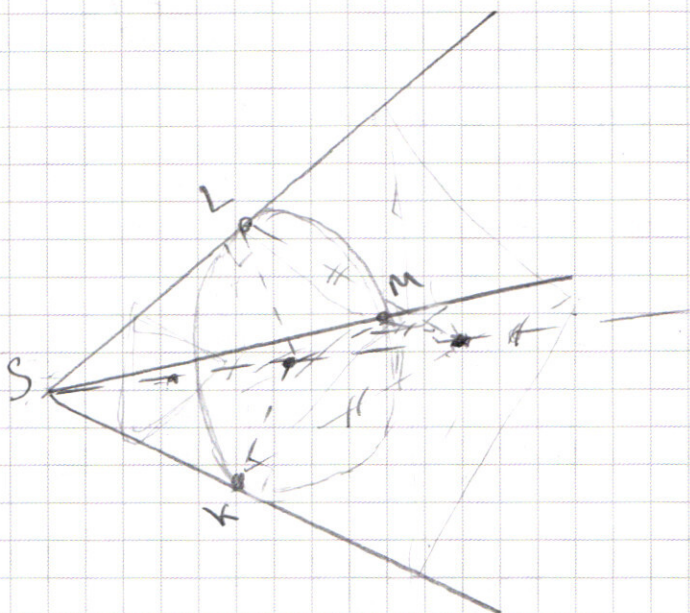
$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y < 76 + 2^{33}x(2^{33} - 2)$$



4



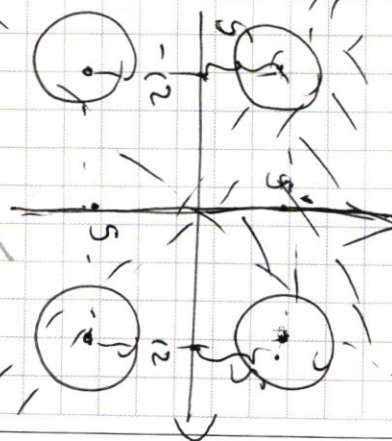
5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 25 \end{cases}$$

$$2y+w=10 \quad y=0$$

$$x+y > 0 \quad y-x > 0 \quad y > x$$

$$17 \pm 5$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$$

Пусть $\frac{a}{b} = f$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$Q = 9 - 8 = 1$$

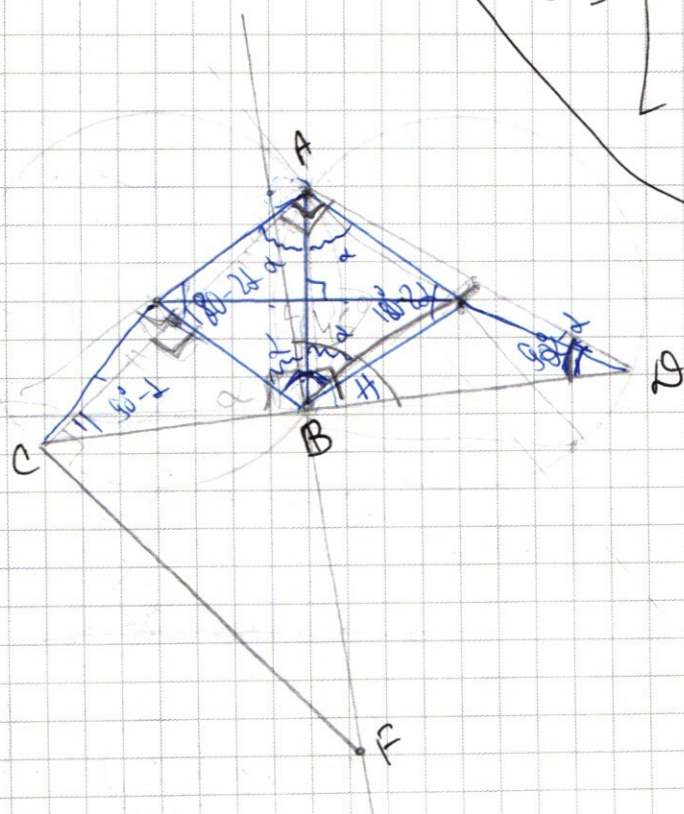
$$t = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} (=)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ \log x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$$

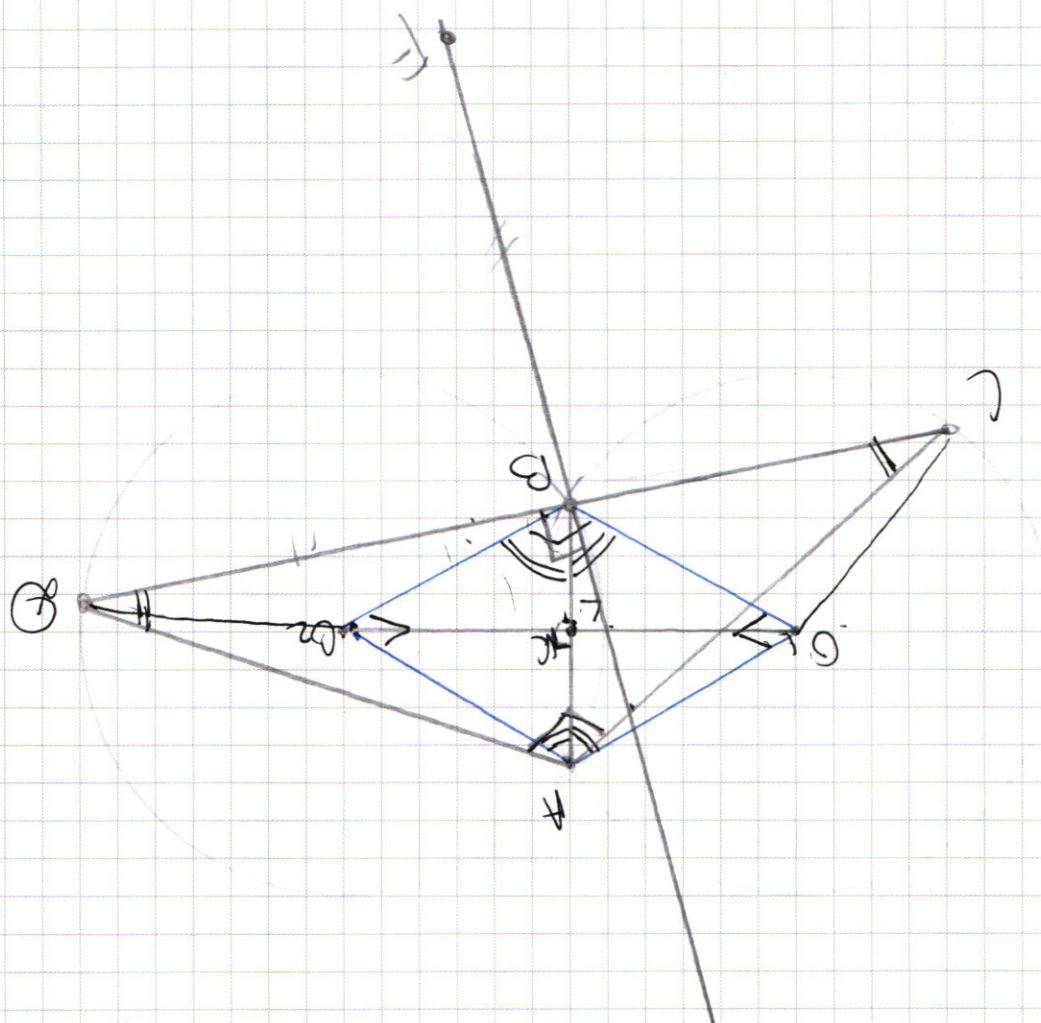


$$x = y$$

$$\begin{array}{r} a^4 - a^3 - 6a^2 + 8a - 0 \\ a^4 - a^3 - 6a^2 + 8a - 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93 - 6 \\ 2 \overline{) 186} \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$$a(a-2)(a^2+a-4)=0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

