МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\ln x + \ln 6 - \cancel{6\ln^2 x} = \ln^2 2 - 6\ln x + \ln 2 + \ln x \ln 2 - \cancel{6\ln^2 x}$

$-\ln x + \ln 6 = \ln^2 2 - 5\ln x + \ln 2$

$\ln x(5\ln 2 - \ln 6) = \ln^2 2$

$\ln x = \dfrac{\ln^2 2}{\ln\frac{32}{6}}$

$x = e^{\frac{\ln^2 2}{\ln\frac{32}{6}}} = \left(e^{\ln^2 2}\right) e^{\frac{1}{\ln\frac{32}{6}}} = 2^{\ln 2} e^{\frac{1}{\ln\frac{32}{6}}}$

$y =$

$y = 4 - x$

$\left(x^2(4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}$

$x^{-2\ln x}(4-x)^{-4\ln x} - (4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}} = 0$

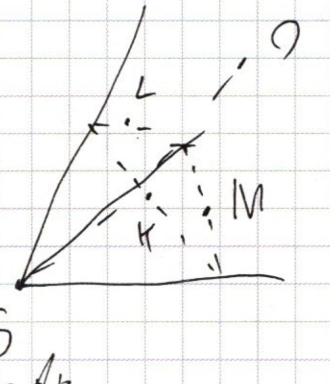
$(4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}\left(x^{-2\ln x}(4-x)^{-4\ln x - \ln\frac{4-x}{x^7}} - 1\right) = 0$

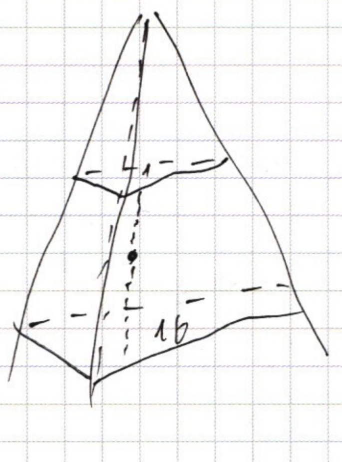
№24

$\dfrac{4}{H} = \dfrac{5}{6}$

$H = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$

$\dfrac{\cancel{4{,}8 \cdot 6}}{\cancel{4 \cdot 5}} = \dfrac{28{,}8}{20}$





$= \dfrac{28{,}8}{200}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

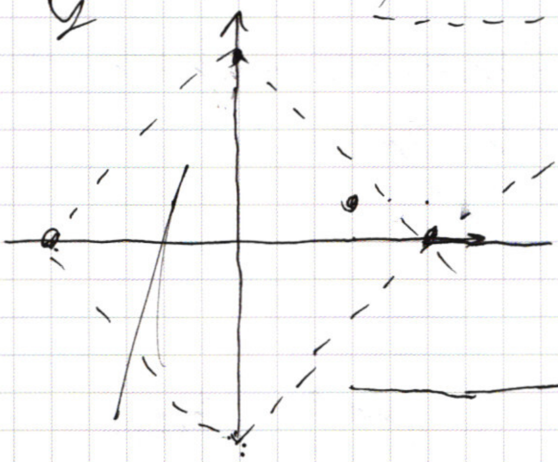
(Нумеровать только чистовики)

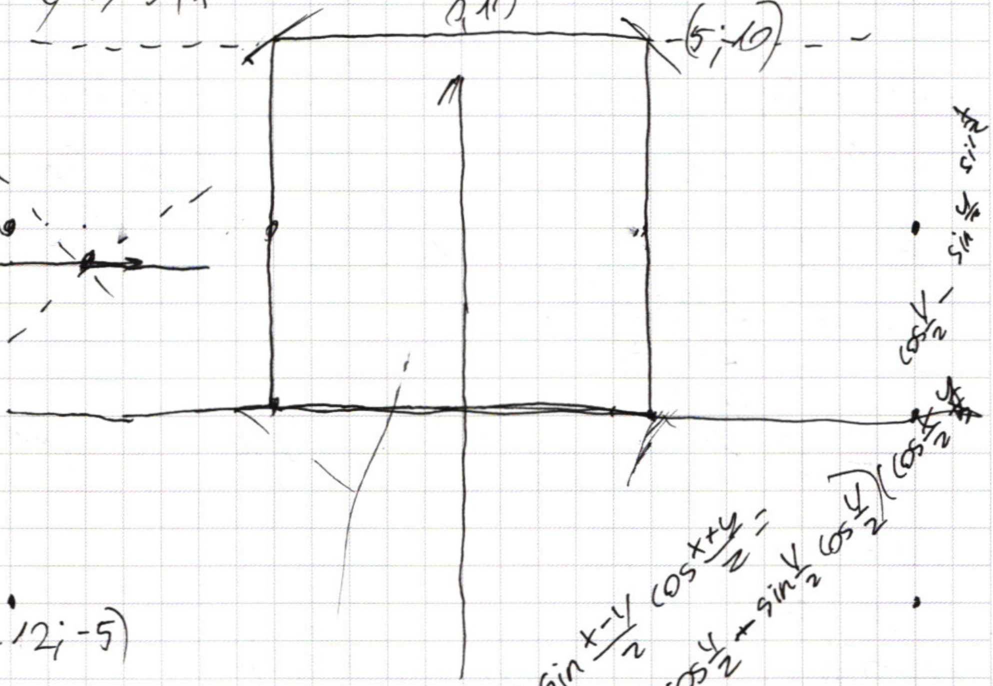
№25

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$ $\qquad$ $x+y+5+y-x+5=10$

$x+y\geq 5$ $\qquad$ $y-x\geq -5$ $\qquad$ $2y=0$

$\cancel{x\geq 5-y}$ $\qquad$ $y\geq -5+x$ $\qquad$ $y=0$





(-12;-5)

$2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=$

$=\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{y}{2}\ldots\right.$

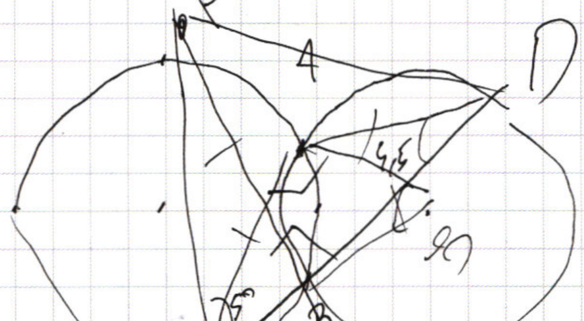
1) $\sqrt{a}=7$ $\qquad$ $a=49$

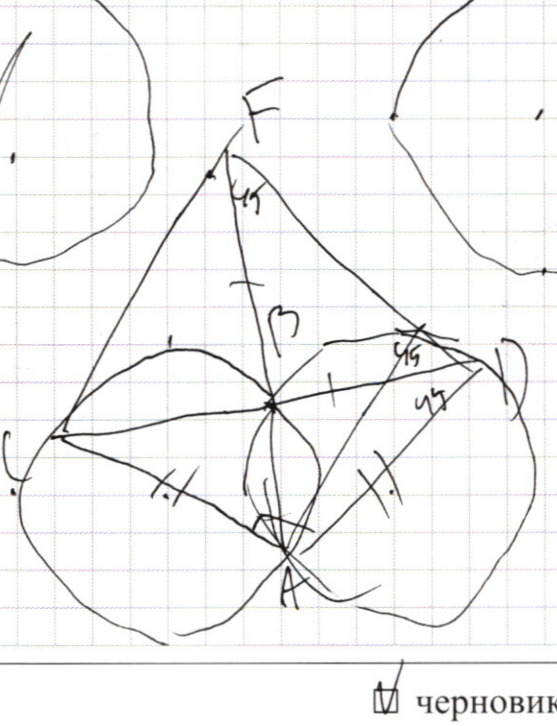
$\sqrt{a}=\sqrt{13^2+15^2}=\sqrt{169+225}=$

$a=394$

$\cancel{BC^2-BD^2}=2a$

$BC+BD$





$BC^2-BC\sqrt{2a}=BD^2-BD\sqrt{2a}$

$\cancel{BC^2=BD^2}$

$BD=$

$200=a^2+BD^2-\sqrt{2}aBD$

$0=a^2-200+BD^2-\sqrt{2}aBD$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9261 | 3$, $3087 | 3$, $1029 | 3$, $343 | 7$, $49 | 7$, $7 | 7$, 1

$9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

$\cancel{C_8^3 \cdot C_7^5}$ $\quad C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}$

$343 \cdot 27 = 2401 + 686 = 9261$

$= \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2} = 8\cdot7\cdot2\cdot5 = \underline{560}$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\sqrt{2}\sin(9x+\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos 4x + \sqrt{2}\sin(5x-\frac{\pi}{4}) = 0$

$\sin(9x+\frac{\pi}{4}) - \cos 4x + \sin(5x-\frac{\pi}{4}) = 0$

$2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2}) = 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$

$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = \cancel{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2}} + \sin^2\frac{y}{2}\cos$

$\cancel{\frac{x}{2}}$ $\quad \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2} + \sin^2\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} +$

$= \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} = 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}\right)$

$= \cancel{2\sin x}$ cos $\cos y$ $\quad \sin x + \sin$

$2\sin 7x\cos(2x+\frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$

$2\sin 7x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) - \cos 4x = 0$

$\cancel{2\sin 7x(}$

$\sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x + \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2}\sin 7x - \cancel{(\sin 2x - \cos 2x)}) = 0$

$(\cos 2x + \sin 2x)(\sqrt{2}\sin 7x - \sqrt{2}\sin(2x - \frac{\pi}{4})) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$$\left(x^2 y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4+|3x-4|}{2} \qquad y = \frac{x+4-|3x-4|}{2}$$

$$\left(y - \frac{x+4+3x-4}{2}\right)\left(y - \frac{x+4-(3x-4)}{2}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x+4+|3x-4|}{2} \\ y = \frac{x+4-|3x-4|}{2} \end{array}\right.$$

$x \geq \frac{3}{4}$ | $x \leq \frac{3}{4}$
$y = 2x$ | $y = 4 - x$
$y = \frac{8-2x}{2} = 4 - x$ | $y = 2x$

$y = 2x$

$$\left(x^2 \cdot 16 x^4\right)^{-\ln x} = 2x^{\ln(2x/x^7)}$$

$$\left(16x^6\right)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$$

$$\ln\left(\left(16x^6\right)^{-\ln x}\right) = \ln\left(2x^{\ln\frac{2}{x^6}}\right)$$

$$-\ln x \, \ln(16x^6) = \ln\frac{2}{x^6}\,\ln(2x)$$

$$-\ln x\,(\ln 16 + 6\ln x) = (\ln 2 - 6\ln x)\,\ln 2x)$$

$$-\ln x \ln 16 - 6\ln^2 x = (\ln 2 - 6\ln x)(\ln 2 + \ln x)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим 9261 на простые множители:

$9261 = \cancel{3\cdot3\cdot7\cdot7}\ 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$

тогда в таком числе должны присутствовать три 3, три 7, и две 1, тк число восьмизначное)

Тогда всего вариантов расставить 3 $C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot5!}$,

затем расставляем 7 $C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!}$, а воставшиеся места ставим 1 $C_2^2 = 1$

Тогда всего вариантов

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3!\cdot5!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot2!}\cdot1 = \frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot2}$

$= 56\cdot10 = 560$

Ответ: 560

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt2 \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\sqrt2\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt2\cos 4x + \cancel{\sin}\ \sqrt2\ \cancel{\sin 5x} = 0$

$\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x + \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Преобразуем по формуле

$\sin y + \sin t = 2\sin\frac{y+t}{2}\cos\frac{y-t}{2}$

$2\sin 7x\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$

$2\sin 7x\left(\frac{\sqrt2}{2}\cancel{\cos 2x}\cos 2x-\frac{\sqrt2}{2}\sin 2x\right)-(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)=0$

$\sqrt2\sin 7x\,(\cos 2x-\sin 2x)-(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)=0$

$(\cos 2x-\sin 2x)\left(\sqrt2\sin 7x-\sqrt2\,\cancel{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}\right)=0$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x-\sin 2x=0\\ \sqrt2\sin 7x-\sqrt2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.$$

$\cos 2x-\sin 2x=0$

$\cos 2x=\sin 2x \;|:\cos 2x\neq 0$

$1=\operatorname{tg}2x$

$2x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt2\sin 7x-\sqrt2\,\cancel{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=0$

$\sin 7x-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$

$2\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}=0\\ \cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0\end{array}\right.$$

$\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}=0 \qquad \cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0$

$5x-\frac{\pi}{4}=2\pi k,\ k\in Z \qquad 9x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi l,\ l\in Z$

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi l,\ l\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$

$\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k \quad ;\ n,k,l\in Z$

$\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi l$

№3

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)}\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0\end{cases}$$

$y^2-xy-2x^2+8x-4y=(y-2x)(y+x-4)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2x\\ y=4-x\end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y=2x$ $\quad$ ~~$x\neq 0$~~ ~~$x\neq 0$~~

$(x^2\, 16x^4)^{-\ln x} = \cancel{y}^{\ln\frac{2x}{x^7}}$ $\quad$ $x>0$

$2x$

$(16x^6)^{-\ln x} = 2x^{\ln\frac{2x}{x^7}}$

$\ln\left((16x^6)^{-\ln x}\right) = \ln\left(2x^{\ln\frac{2x}{x^7}}\right)$

$-\ln x\,\ln(16x^6) = \ln\frac{2x}{x^7}\,\ln 2x$ $\quad$ т.к. $x\neq 0$ то $\frac{2x}{x^7}=\frac{2}{x^6}$

$-\ln x(\ln 16+\ln x^6) = \cancel{\ln 2x\ 2}\,l$

$(\ln 2-6\ln x)\cdot(\ln 2+\ln x)$

$-\cancel{\ln x\ \ln 16}$

$-\ln x\ln 16-6\ln^2 x=\ln^2 2-6\ln x\ln 2+\ln x\ln 2-6\ln^2 x$

$-4\ln x\,\ln 2=\ln^2 2-5\ln x\,\ln 2$

$\ln x\,\ln 2=\ln^2 2$

$\ln x=\ln 2$

$x=2\quad y=4$

2) $y=4-x$

~~$x^2(4-x)^4$~~

$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x}=(4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}$ $\quad$ $x>0$ $\quad$ $x<4$

$\cancel{x^2}\ x^{-2\ln x}(4-x)^{-4\ln x}=(4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}$

$x^{-2\ln x}(4-x)^{-4\ln x}-(4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}=0$

$$(4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}\left(x^{-2\ln x}(4-x)^{-4\ln x-\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}-1\right)=0$$

т.к. $x\neq 4$ то $(4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}\neq 0$

$$\Rightarrow x^{-2\ln x}(4-x)^{-4\ln x-\ln\frac{4-x}{x^7}}=1$$

$$x^{-2\ln x}(4-x)^{3\ln x-\ln(4-x)}=1$$

$$\cancel{x^{3\ln x-\ln(4-x)}(4-x)^{3\ln x-\ln(4-x)}=x^{-5\ln x-\ln 4x}}$$

$$x^{-2\ln x}=(4-x)^{\ln 4-x-3\ln x}$$

$$-2\ln x\ln x=(\ln 4-x-3\ln x)\ln 4-x)$$

$$-2\ln^2 x=\ln^2(4-x)-3\ln x\ln 4-x)$$

$$0=\ln^2(4-x)-3\ln x\ln(4-x)+2\ln^2 x$$

решим относительно $\ln 4-x)$

$$D=9\ln^2 x-8\ln^2 x=\ln^2 x$$

$$\ln(4-x)=\frac{3\ln x+|\ln x|}{2}\qquad \ln 4-x=\frac{3\ln x-|\ln x|}{2}$$

$\Downarrow$

$\ln(4-x)=2\ln x$ $\qquad$ $\ln 4-x=\ln x$

$4-x=x^2$ $\qquad$ $4-x=x$

$0=x^2+x-4$ $\qquad$ $x=2\ \ y=2$

$D=1+16=17$

$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $\quad$ $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ не уд т.к $x>0$

$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\vee 4$

$\sqrt{17}\vee 9$

$<$ $\quad$ $y=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(2;2);(2;4);\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

~~Первое выражение~~

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

1) $x+y \geqslant -5$ $\quad y-x \geqslant -5$

$y \geqslant -5-x$ $\quad y \geqslant -5+x$

$y=0$

2) $y \geqslant -5-x$ $\quad y \leq -5+x$

$x=5$

3) $y \leq -5-x$ $\quad y \geqslant -5$

$x=-5$

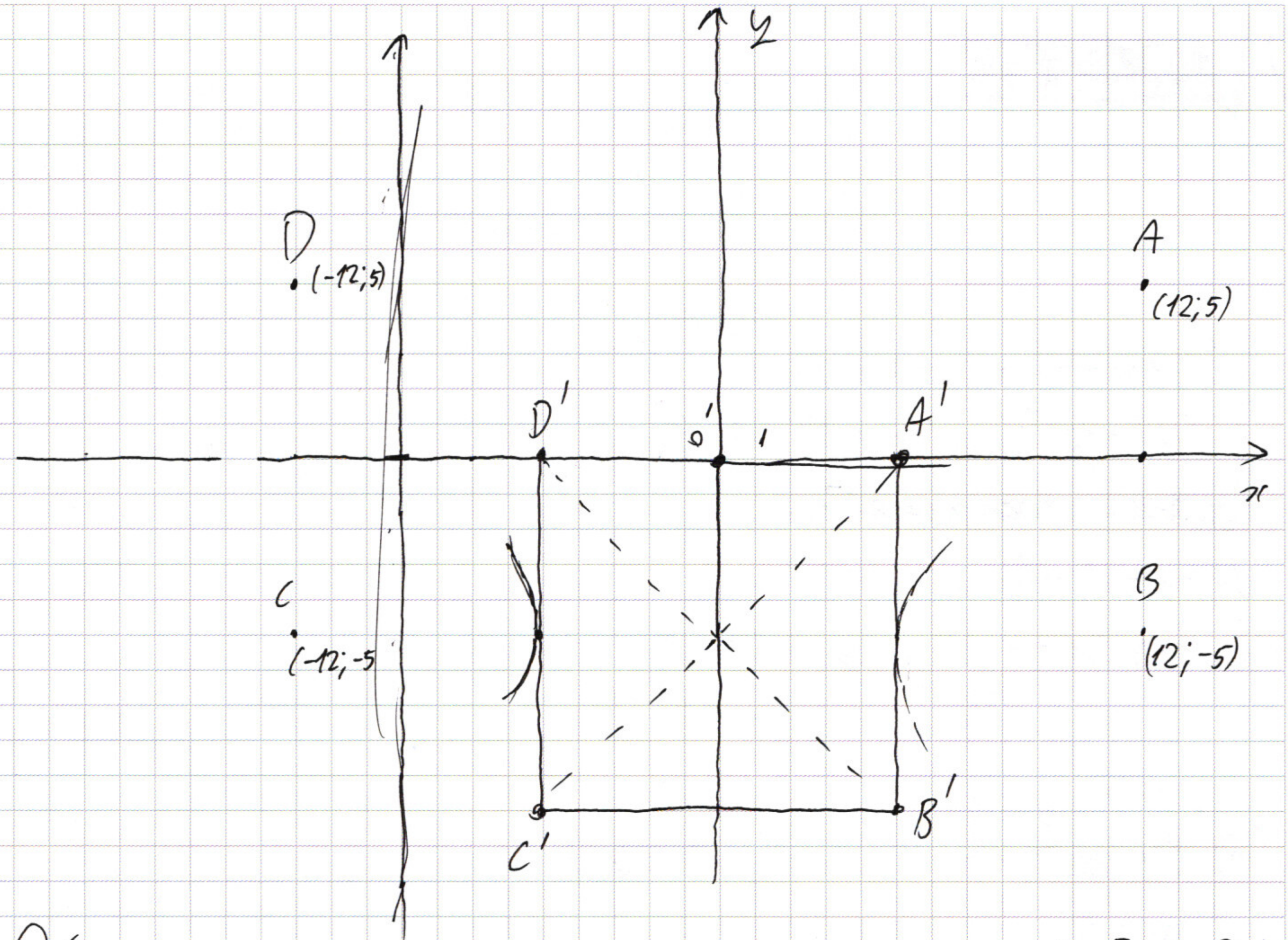
4) $y \leq -5-x$ $\quad y \leq -5+x$

$y=-10$, т.е мы получили квадрат со стороной 10 и центром в точке $(0; -5)$

$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ описывает четыре окружности с одинаковыми радиусами $\sqrt{a}$ $(a>0)$ и центрами $(12; 5), (-12; 5), (12; -5), (-12; -5)$ соответственно.

Построим данную систему.

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



Обозначим центры окружностей как A, B, C, D.
тогда ~~на~~ первый из случаев, когда 2 решения:
Окружности с центрами B и C касаются
сторон квадрата, а окружности с центрами
A и D не пересекают его.
Обозначим вершины квадрата как A', B', C', D'
(см. рисунок), тогда радиус окружностей должен
быть равен расстоянию от точки C до
~~сер~~ середины D'C' т.е $\sqrt{a} = 7$; $a = 49$
Т.к окружности C и B симметричны, то
они обе касаются квадрата $\Rightarrow$ 2 решения есть
Нужно проверить, не имеют ли окружности
с центрами D и A общих точек с квадра

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тем, т.е расстояние до ~~ближ~~ ближайшей точки квадрата должно быть больше радиуса т.е $DD' = AA' \vee \sqrt{a} = 7$

$DD' = \sqrt{(\underbrace{-12+5}_{-12+5})^2 + (5-0)^2} = \sqrt{\underbrace{7}_{7}^2+5^2} > \sqrt{49} \Rightarrow DD' < \sqrt{a}$ и $a=49$ нам подходит,

Заметим, что при $7 < \sqrt{a} \leq CA'$ у системы больше двух решений, т.к окружности с центрами C и B пересекают квадрат как минимум в двух точках

Так же заметим, что при $\sqrt{a} < D'B'$ $\underset{DD'}{\leq}$ система так же имеет больше двух решений т.к окружности с центрами D и A пересекают квадрат ~~больше~~ не меньше чем в двух точках. Тогда последний случай, когда $\sqrt{a} = DB'$, т.е окружности с центрами A и D пересекают квадрат в точках BC' и B' соответственно, т.е $\sqrt{a} = \sqrt{17^2 + 15^2}$

$a = 289 + 225 = 514$, надо проверить, не пересекают ли окружности с центрами C и B квадрат

т.е $\sqrt{514} \vee CA' = \sqrt{17^2+5^2} < \sqrt{17^2+5^2} \Rightarrow CA' < \sqrt{514}$

тогда наши искомые значения a — 49 и 514

Ответ: $a=49$; $a=514$

~~№7~~

$$\cancel{\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}}$$

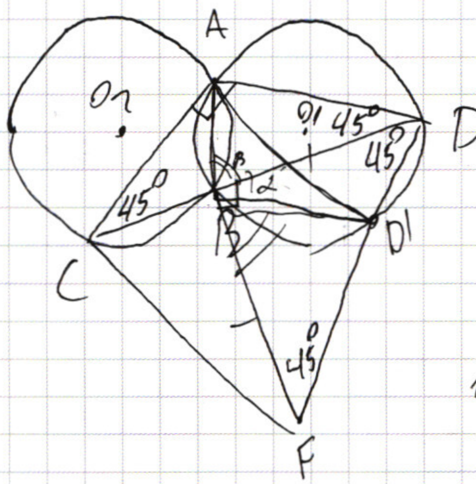
~~т.е нужно решить неравенство при наших x~~

$$\cancel{76 + 2(2^{32}-1)x \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{24}}$$

$$\cancel{76 + 2^{33}x - 2x \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{24}}$$

~~Заметим, что $2^x + 3\cdot 2^{24} > 3\cdot 2^{24}$~~

№6



$\angle CAD = 90^\circ$, $BF \perp CD$, $BF = BD$

~~1) $\angle ACB = \angle ADB$ т.к~~

~~опираются на равные дуги (две дуги стягивает одна хорда)~~

~~$\Rightarrow \angle ACB = 45^\circ$ и $CA = AD$~~

1) $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ т.к

опираются на равные дуги (AB стягивает 2 дуги)

$\Rightarrow$ т.к $\angle CAD + \angle ADF = 180^\circ$, то $AC \parallel DF$

$= AB = 10\sqrt{2}$ т.к $AO_1B = 90^\circ$ ~~=~~ $= 2\angle ADB$

аналогично $BD' = 10\sqrt{2}$, т.к $\angle ADD' = 90^\circ$

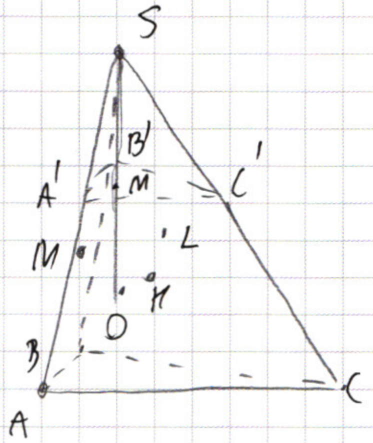
то AD' – диаметр $\Rightarrow AD' = 20$

$\angle D'BF = \angle ADB = 90^\circ - \angle DBD' \Rightarrow AD = FD'$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



1) Т.к $A'B'C' \perp SO$, $ABC \perp SO$, то $A'B'C' \parallel ABC \Rightarrow$

$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

тогда $\dfrac{A'C'}{AC} = \sqrt{\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}} = \dfrac{1}{4}$

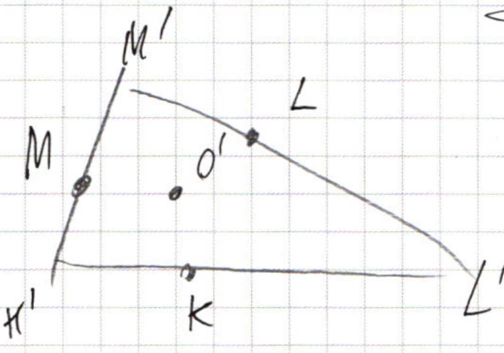
$\Rightarrow \dfrac{\rho(S;A'B'C')}{\rho(S;ABC)} = \dfrac{1}{4}$ $\quad \rho(S;A'B'C') = SM$

$\dfrac{SM}{SM+2R} = \dfrac{1}{4}$

$4SM = SM + 2R \quad 3SM = 2R \quad SM = \frac{2}{3}R$ тогда

$\angle KSO = \cancel{arc}\ \arcsin\left(\frac{KO}{OS}\right) = \arcsin\left(\frac{R}{\frac{5}{3}R}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$

2)



~~Пусть O' — проекция точки O на плоскость~~ KLM

~~тогда~~ O' KLM $\perp$ SO

$\Rightarrow \Delta K'M'L' \perp SO \Rightarrow$

$\Delta K'M'L \sim \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Пусть точка O' — проекция точки O на плоскость K'L'M' тогда $O'L = O'K = OM = r_{\text{вписанной}}$ окружности $= S_K \cdot \cancel{\cos 2}\ \sin\alpha = SO \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{5}{3}R \cdot \frac{3}{5}R \cdot \frac{4}{5}$

$= \frac{4}{5}R$, r вписанной окружности $A'B'C' = SM\ tg\alpha = r_\omega$

$= \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}R = \frac{1}{2}R \Rightarrow \dfrac{S_{K'M'L'}}{S_{A'B'C'}} = \left(\dfrac{r}{r_\omega}\right)^2 = \left(\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}}\right)^2 = \dfrac{64}{25}$

$\Rightarrow S_{K'ML'} = \frac{64}{25} \cdot S_{A'B'C'} = \frac{64}{25}$ Ответ: $\arcsin\frac{3}{5}$; $\frac{64}{25}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)