

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

к-во восьмизначных чисел
произведение цифр равно 9267

$$\begin{array}{r} 9267 \overline{) 9} \\ 9 \overline{) 1029} \\ \underline{26} \\ 18 \\ \underline{81} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 343} \\ \underline{12} \\ 12 \\ \underline{9} \\ 9 \\ \underline{9} \end{array}$$

$$N = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 9267$$

$$9267 = 3 \cdot 9 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

так как цифры — целые числа от 0 до 9
в записи числа N должно быть ровно
3 тройки (цифры 49 и 343 не существуют)

также в записи числа N могут быть
или 3 тройки, или четвёрка и тройка
рассмотрим 2 случая:

1. в записи N ровно 3 тройки:

тогда число N состоит из цифр 3, 3, 3, 7, 7, 7, 7, 7

~~цифры отличаются от данных, не может
быть, т.к. тогда~~

число N не содержит цифр, кот делится
на 2, 5, т.к. все цифры целые, а их
произведение не делится на 2, ни на 5

в данном случае всего способов
выбрать подходящие восьмизначные
числа:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 16 \cdot 7 \cdot 5 = 560$$

2. в записи числа $\checkmark$ ровно 1 тройка и 1 себятка

тогда N состоит из цифр: 7, 7, 7, 3, 9, 1, 1, 1

всего способов ~~выбрать~~ ~~нужные~~ ~~возможные~~ расставить данные цифры:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 1} = 560 \cdot 2 = 1120$$

всего получаемых цифр:

$$560 + 1120 = 1680$$

ОТВЕТ: 1680

$\checkmark 2$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\sin 9x + \cos 9x) + (\sin 5x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4} - (5x - \frac{\pi}{4})}{2}\right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$2 \sin 7x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & (1) \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \cos 2x + \sin 2x & (2) \end{cases}$$

$$(1): \sin 2x = \cos 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi h, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi h}{2}, \quad h \in \mathbb{Z}$$

$\cos 2x = 0$ — не является решением, потому на $\cos 2x$ можно поделить обе части уравнения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолжение.

$$(2) \quad \sqrt{2} \sin 7x = \sin 2x + \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{3\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Итак:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi h}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases} \quad h, k \in \mathbb{Z}$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi h}{2}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}; h, k \in \mathbb{Z}$

№3 $\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^7} > 0 \\ x^2 y^4 > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

рассмотрим второе уравнение системы

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

решим его, как квадратное относительно y

$$\begin{aligned} D &= (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 8x) = \\ &= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = \\ &= (3x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+4 + 3x-4}{2} = 2x$$

$$y = \frac{x+4 - 3x+4}{2} = 4-x$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

рассмотрим первое уравнение системы

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\text{на ОДЗ: } (x^2 y^4)^{-\ln x} = \left(e^{\ln x^2 y^4} \right)^{-\ln x} = e^{\ln x^2 y^4 \cdot (-\ln x)}$$

$$y^{\ln(\frac{y}{x^2})} = \left(e^{\ln y} \right)^{\ln(\frac{y}{x^2})} = e^{\ln y \cdot \ln(\frac{y}{x^2})}$$

уравнение принимает вид:

$$e^{\ln x^2 y^4 \cdot (-\ln x)} = e^{\ln y \cdot \ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\ln(x^2 y^4) = 2\ln|x| + 4\ln|y|$$

на ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, поэтому:

$$2\ln|x| + 4\ln|y| = 2\ln x + 4\ln y$$

$$\ln\left(\frac{y}{x^2}\right) = \ln y - 2\ln x$$

уравнение принимает вид:

$$(2\ln x + 4\ln y) \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot (\ln y - 2\ln x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

обозначим $a = \ln x$ $b = \ln y$

тогда уравнение принимает вид:

$$(2a + 4b) \cdot (-a) = b(b - 2a)$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 2ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \quad (b-a)(b-2a) = 0$$

$$\begin{cases} b = a \\ b = 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln y = \ln x \\ \ln y = 2 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Итак: из первого уравнения:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

из второго:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(1) \begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} x = 2x \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

— не удовлетворяет ОДЗ

$$(2): \begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x = 4 - x$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

— удовлетворяет ОДЗ

$$(3): \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

— не удовлетворяет ОДЗ

— удовлетворяет ОДЗ

$$(4): \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0, \text{ не удовлетворяет ОДЗ}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$y = 4 - \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right) = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} > 0 \text{ удовлетворяет ОДЗ}$$

Итак: ~~x~~ Система имеет следующие решения:

$$(2; 2) \quad (2; 4) \quad \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\text{ОТВЕТ: } (2; 2) \quad (2; 4) \quad \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

№ 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

Найти такие a , что система имеет 2 решения

решить систему графически
для этого изобразим на ~~окрестности~~
плоскости множество точек, задаваемых
1-м уравнением

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad \text{это равносильно:}$$

$$(1) \begin{cases} y - x + 5 \geq 0 \\ x + y + 5 \geq 0 \\ x + y + 5 + y - x + 5 = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y - x + 5 \geq 0 \\ x + y + 5 < 0 \\ y - x + 5 - x - y - 5 = 10 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y - x + 5 < 0 \\ x + y + 5 \geq 0 \\ x + y + 5 - y + x - 5 = 10 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y - x + 5 < 0 \\ x + y + 5 < 0 \\ y - x + 5 - x - y - 5 - y + x - 5 = 10 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} y \geq x - 5 \\ y \geq -x - 5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} y \geq x - 5 \\ y < -x - 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y < x - 5 \\ y \geq -x - 5 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} y < x - 5 \\ y < -x - 5 \\ y = -10 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассмотрим второе уравнение системы

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Если a меньше нуля, то
слева стоит неотрицательное выражение,
а справа число меньше нуля, такое
уравнение корней не имеет, поэтому

при $a < 0$ система не будет иметь
ни одного решения

будем рассматривать $a \geq 0$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$



$$I \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

$$II \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ (x-12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases}$$

$$III \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$$

$$IV \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ (x+12)^2 + (y+5)^2 = a \end{cases}$$

система I задает окружность
с центром $Q_1(12; 5)$ $R = \sqrt{a}$, лежащую
в 1-й четверти координатной плоскости

система II задает окружность с центром
 $Q_2(12; -5)$ $R = \sqrt{a}$, лежащую в 4-й четверти

система III задает окружность с центром
 $Q_3(-12; 5)$ $R = \sqrt{a}$, лежащую во 2-й четверти

система IV задает окружность с центром
 $Q_4(-12; -5)$ $R = \sqrt{a}$, лежащую в 3-й четверти

Изобразим множество точек, задаваемых
системой

№ 6

a) $R_1 = R_2 = 10$

$\angle A\Phi = 90^\circ$

$BF = B\Phi$

$B \in C\Phi$

$\angle F = ?$

b) $B \in \Gamma$

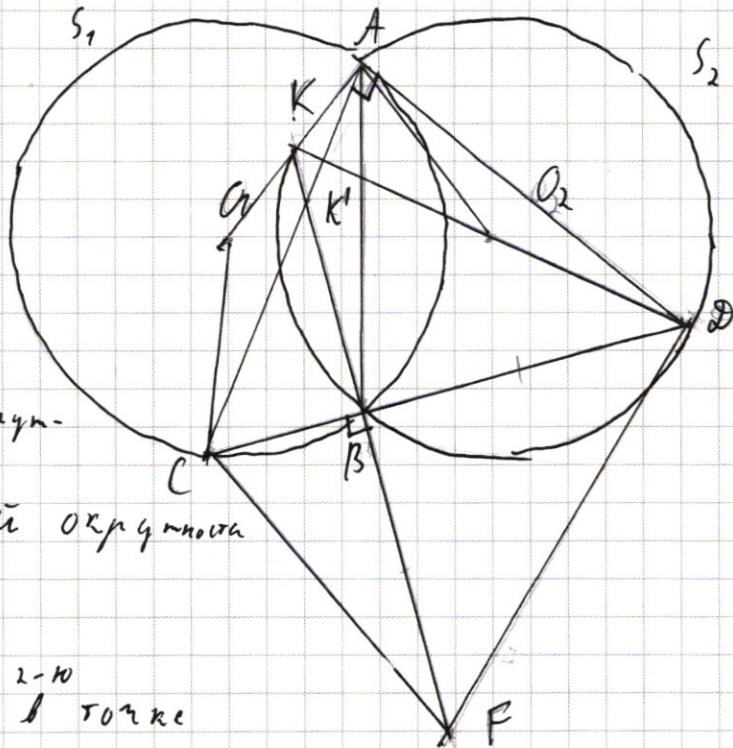
$SACF = ?$

O_1 - центр 1-й окружности S_1

O_2 - центр 2-й окружности S_2

пусть BF пересечет 2-ю окружность в точке K

без ограничения общности можно считать эти две точки расположенными именно так:



$\angle KB\Phi = 90^\circ \Rightarrow K\Phi$ - диаметр окружности S_2

$O_2 \in K\Phi \quad K\Phi = 2R = 20$

пусть $\angle CO_1A = 2\alpha$

тогда $\angle CBA = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$

$\angle AB\Phi = 180^\circ - \angle CBA = \alpha$

$\angle AO_2\Phi = 2\alpha$

$\angle AO_2\Phi = \angle CO_1A$

$(O_1 = O_2 \quad O_1A = O_2A$

$) \Rightarrow \Delta AO_1C = \Delta AO_2\Phi$

(по 2-м сторонам и углу между ними)

$AC = A\Phi$

$\Delta CAC\Phi$ - равнобедренный

$BKA\Phi$ - вписан в S_2

пусть K' - точка пересечения BF и CA

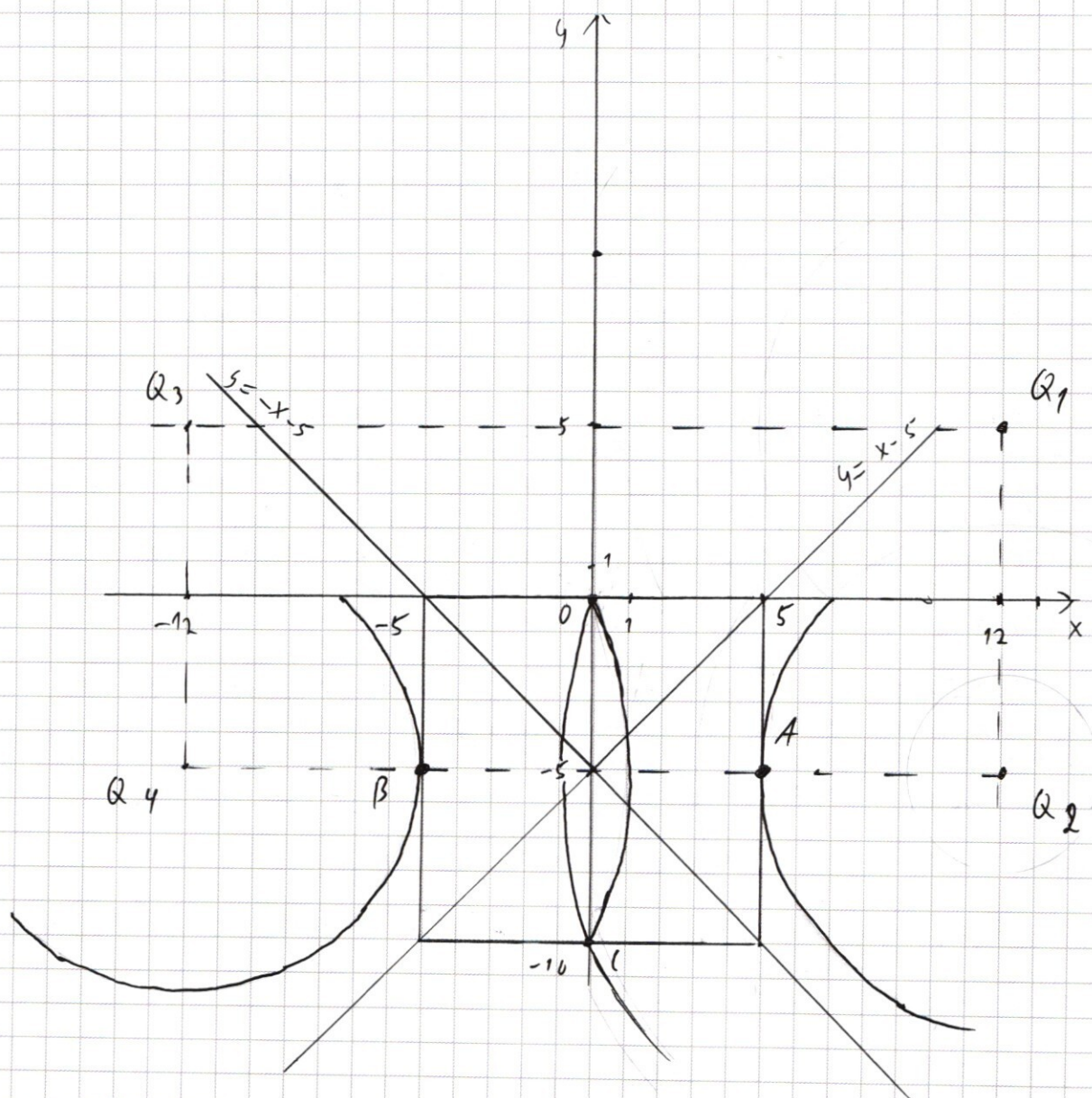
$\angle ACA\Phi = \angle C\Phi A = 45^\circ$

$\Delta CBK'$ - прямоугольный

$\angle CK'B = 45^\circ \quad \angle BK'A = 135^\circ = 180^\circ - \angle B\Phi A$

K' лежит на окружности S_2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~Заметим, что картинка симметрична относительно~~
~~оси Oy , поэтому, что бы и какая~~
~~система и была 2 решенная экранными~~
~~в полуплоскости $x \geq 0$ должно быть равно~~
~~одно решение~~

Окружности Q_2 и Q_4 симметричны относительно
 $y = -5$
квадрат, заданный 1-м уравнением
также симметричен относительно $y = -5$

поэтому если ~~кружит~~ одна из окружностей пересекает квадрат в какой-либо точке, то она пересекает квадрат и в точке симметричной данной относительно прямой $y = -5$

чтобы система имела 2 решения необходимо, чтобы:

а) либо: точки пересечения ~~от~~ окружностей

Q_1 и Q_2 совпали между собой ($A \in Q_1, A \in Q_2$) где A - точка пересечения окружности (квадратом)

б) либо: точка пересечения одной окружности (квадратом) совпадает (симметричной ей относительно $y = -5$)

Окружности, лежащие в верхней полуплоскости относительно Ox пересекают могут пересекать квадрат только на прямой Ox , причем эти точки пересечения будут симметричны ~~на~~ относительно Ox совпадают с точками пересечения окружностей лежащих ниже Ox и квадрата

Поэтому верхние окружности не дают никаких новых решений системы и мы можем рассматривать только нижнюю полуплоскость

(случай а): окружности Q_1 и Q_2

проходят через точки $O(0;0)$ и $K(10;-10)$

$$R = Q_2 O = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\sqrt{a} = 13 \quad \underline{a = 169}$$

(случай б): окружности Q_1 и Q_2

касаются квадрата в точках $B(-5;-5)$ и $(5;-5)$ соответственно

$$\cancel{R} \quad R = Q_2 A = \sqrt{(12-5)^2} = 7$$

$$\sqrt{a} = 7 \quad \underline{a = 49}$$

Итак, система имеет ровно 2 решения при $\begin{cases} a = 169 \\ a = 49 \end{cases}$

ОТВЕТ: 49; 169

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

K' летит на S_2 и K' летит на BF

но BF перескачет S_2 не более
чем в 2-х точках — K и B

K' летит на CA , потому что K'
не может ~~лететь~~ совпасть с $T. B$,

т. к. $CA B$ — треугольник, A не летит
на $C B$

$$\parallel$$

$$K' = K$$

$$\begin{array}{l} \angle CKB = 45^\circ \quad KB = CB \\ BD = BF \\ \angle KBD = \angle CBF = 90^\circ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \triangle CBF = \triangle KBD$$

$$KB = BF = 20$$

$$CF = 20$$

б) $BC = 12 \quad \angle ACF = ?$

$$BF = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$$

$$CD = 12 + 16 = 28 \quad AC = CD \sin 45^\circ = 14\sqrt{2}$$

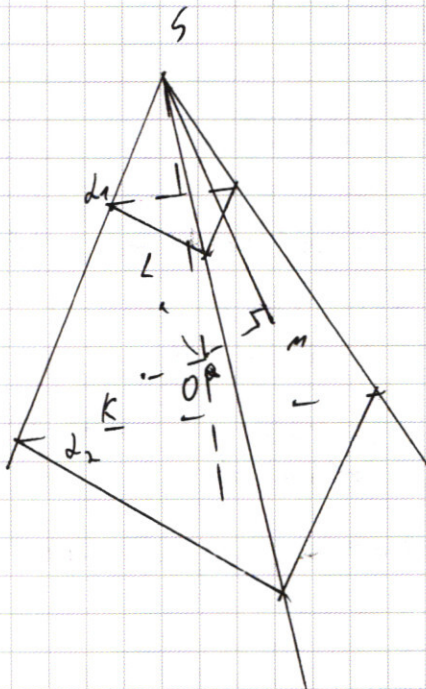
$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF$$

$$\begin{aligned} \sin \angle ACF &= \sin (45^\circ + \angle FCB) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \angle FCB + \cos \angle FCB) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 14\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 2 \cdot 14 \cdot 7 = 196$$

ОТВЕТ: а) $CF = 20$ б) $S_{ACF} = 196$

№4



$$\alpha_1 \perp SO$$

$$\alpha_2 \perp SO$$

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2$$

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2$$

$$\text{нечто } \alpha_1 \cap SO = P$$

$$\alpha_2 \cap SO = F$$

плоскости α_1 и α_2

отсекают от сферического

2 подобные пирамиды
(коэф. подобия: $K = \sqrt{\frac{S_{\alpha_1}}{S_{\alpha_2}}}$)

2-е S_{α_1} - площадь сечения α_1

S_{α_2} - площадь сечения α_2

$$\frac{SP}{SF} = \frac{1}{4}$$

$$SF = SP + 2r$$

r - радиус
сферы

$$4SP = SP + 2r$$

$$SP = \frac{2}{3}r$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO}$$

$$SO = SP + r = \frac{5}{3}r$$

$$OK = r$$

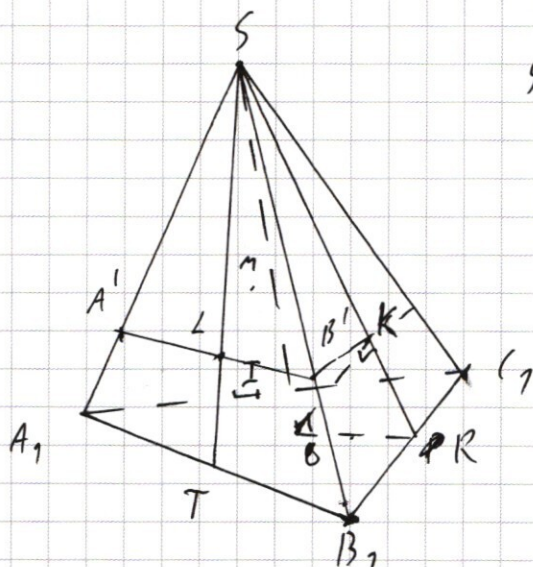
$$\sin \angle KSO = \frac{r}{(\frac{5}{3}r)} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$SK = \sqrt{\frac{25}{9}r^2 - r^2} = \frac{4}{3}r$$

проведем плоскость β перпендикулярно
SO через точку

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$f_U = \frac{5}{3} \text{ A} \quad f_K = \frac{4}{3} \text{ A} \quad o_K = 1$$

$$OR = SO. \tan \angle OSK = \frac{5}{4} r$$

$$SR = \sqrt{\frac{25}{16}r^2 + \frac{25}{9}r^2} = 5r\sqrt{\frac{25}{4 \cdot 16}} = \frac{25r}{22}$$

$$\frac{SK}{SR} = \frac{4}{3} : \frac{25}{12} = \frac{16}{25}$$

4444024240 $\frac{SL}{ST} = \frac{SM}{SI} = \frac{16}{25}$

провести $B'C' \parallel B_1C_1$ через т. К

$$\frac{S_{B'}}{S_{B_1}} = \frac{16}{25} = \frac{SL}{ST} \Rightarrow LB' \parallel TB_1$$

программ ЛБ¹ го пересечения

(SA, b, T, A')

$$\frac{SA'}{SA_1} = \frac{18}{25} = \frac{SC'}{SC_1} = \frac{SM^*}{SI} \Rightarrow M, A', C' \text{ лежат на } 1\text{-й окружности}$$

A', B', C', K, L, M летят в 1-й плоскости

$A'B'C'$ - линия трансформации

Найдем площадь $\triangle A_1 B_1 C_1$

$$\frac{S_{A_1 B_1 C_1}}{S_{22}} = \left(\frac{S_0}{S_F} \right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{3} r}{\frac{3}{3} r + 2r} \right)^2 = \left(\frac{5}{8} \right)^2 = \frac{25}{64}$$

$$S_{A_1 B_1 C_1} = \frac{25}{64} \quad S_{d_2} = \frac{25}{64} \cdot 16 = \frac{25}{4}$$

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SL}{ST}\right)^2 = \left(\frac{16}{25}\right)^2$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{25}{4} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^2 = \frac{16 \cdot 4}{25} = \frac{64}{25}$$

ОТВЕТ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$; $S_{сер} = \frac{64}{25}$.

N 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

рассмотрим уравнение

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

замечая, что $x=6$ — корень

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 76 - 12 + 2 \cdot 2^{33} \cdot 6$$

$6=0$

если $x=38$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 2^4 \cdot 2^{34} + 3 \cdot 2^{34} = 19 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x = -2 + 2^{19}$$

при $x=38$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} > 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

если $x=37$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} = 11 \cdot 2^{34}$$

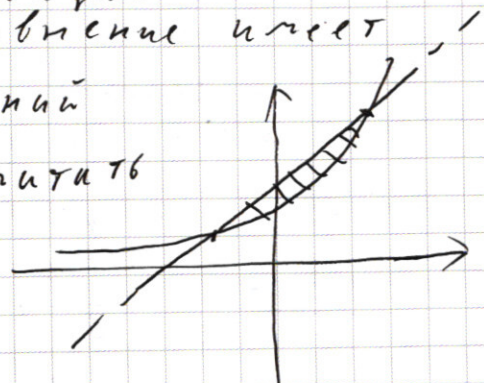
$$76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 37 = 37 \cdot 2^{33} > 11 \cdot 2^{34}$$

||
- /

2-й корень находится между 37 и 38

из графика следует, что функция уравнения имеет не более 2-х решений

Нам необходимо посчитать количество целых точек лежащих в закр. области



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Какая точка лежит~~

для какого x_0

всех точек, лежащих на $x = x_0$

удовлетворяют неравенству

$$2^{x_0} + 3 \cdot 2^{34} < y < 76 + 2(2^{32} - 1)x_0$$

$$x \in [6; 37]$$

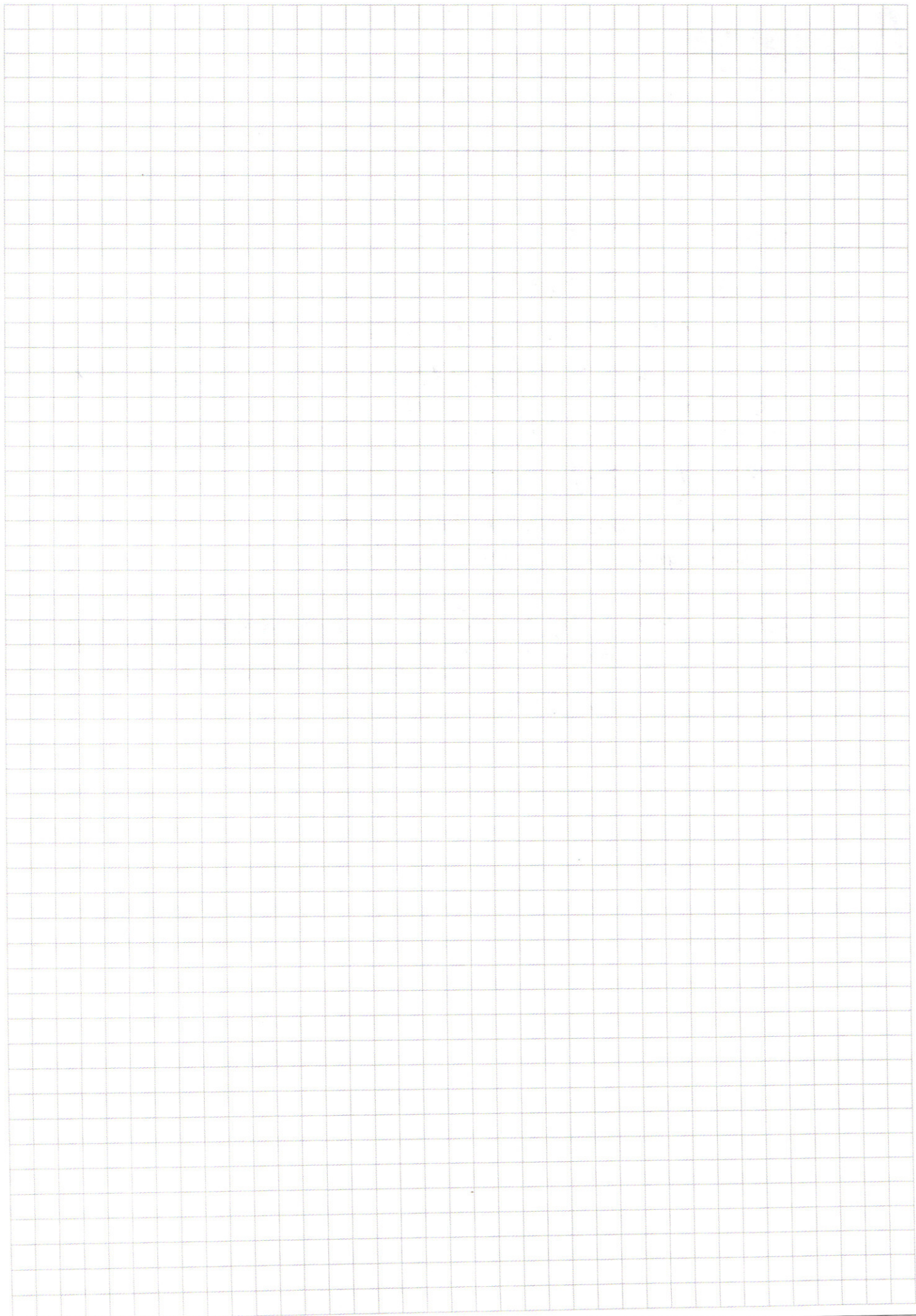
6 не включительно т.к. в т. $x = 6$
графики пересекаются

для на прямой x_0 для любого

x_0 лежит:

точек

$$76 + 2(2^{32} - 1)x_0 - 2^{x_0} - 3 \cdot 2^{34}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \cancel{87} \quad 27 \\ \times 343 \\ \hline 81 \\ 108 \\ 81 \\ \hline 9267 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{4\pi}{20} + \frac{5\pi}{20}\right) &= \cos \frac{\pi}{5} \\ \sin\left(\frac{7\pi}{20}\right) &= \cos \frac{\pi}{5} \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} &= \frac{7\pi}{10} \\ \sin \frac{\pi}{22} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{8}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{9\pi}{8} - \cos \frac{5\pi}{8} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{9\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} &= 0 \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{9\pi}{8} + \frac{2\pi}{8}\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{2\pi}{8}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin \frac{11\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} = 0$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{9\pi}{20} + \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} &= 0 \\ \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$R = 10$$

$$BF = BD$$

$$IK \cdot IA = IB \cdot ID$$

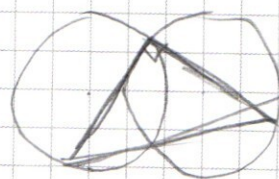
$$KD = 20$$

$$\begin{aligned} \angle IOA &= 22 \\ \angle BOA &= \frac{360^\circ - 22}{2} \\ &= 180^\circ - 11 \end{aligned}$$

$$\angle ABO = 2$$

$$BC = 12$$

$$20$$



$$X = 12$$

$$\begin{aligned} 26 + 2 \cdot 12 - 7 \cdot X &= 2 + 3 \cdot 12 \cdot 2 \\ X &= 1 \\ 2 + 14 &= 2 + 5 \cdot 2 \\ X &= 6 \end{aligned}$$

$$X = 6$$

$$26 - 12 \cdot 64 + 3 \cdot 2 = 2^6$$

$$X = 70$$

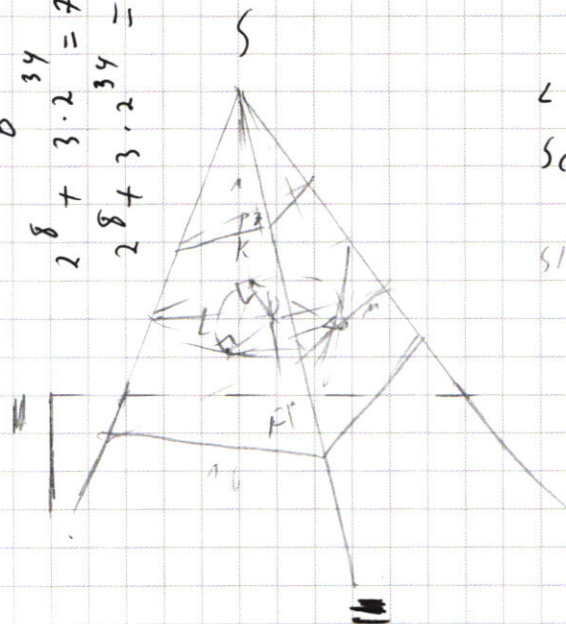
$$1024 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 70$$

$$1024 + 3 \cdot 2^{34} = 56 + 5 \cdot 2^{34}$$

$$X = 8$$

$$2^8 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 8$$

$$2^8 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 4 \cdot 2^{34}$$



$\angle KSO = ?$

Scen - ?

$$\sin \angle KSO = \frac{r}{SO}$$

$$\frac{SP}{SF} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{SP}{SP+1} = \frac{1}{5}$$

$$3SP = 1$$

$$SP = \frac{1}{3}$$

$$SO = \frac{5}{3}r$$

$$X = 15$$

$$4 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 15$$

$$68 \cdot 3$$

$$X = 68$$

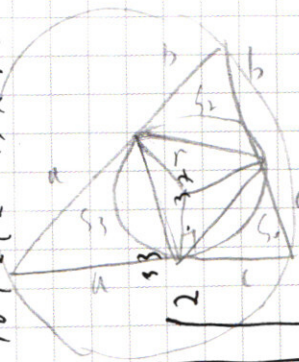
$$X = 68$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)X \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)X$$

$$X = 34$$

$$2^{40} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 34$$



$$S_{ABC} =$$

$$= 34 \cdot 2^{34} + S_1 + S_2 + S_3 +$$

$$X = 15$$

$$2^{40} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 15$$

$$X = 37$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{34} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

в числе 9261
3 семёрки

и: 3 тройки или
тройка и девятка
остаточная единица

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ 9 \\ \hline 26 \\ 27 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 9 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 7} \\ 63 \\ \hline 28 \\ 28 \\ \hline 345 \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 16 \cdot 7 \cdot 5 = 80 \cdot 7 = 560$$

$$2. \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$3. \begin{cases} (x^2 y^2)^{-\ln x} = y^{\ln \left(\frac{y}{x^2} \right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x + 4y = 0 \quad y^2 + (4+x)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = 16 - 8x + x^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 40x + 16$$

$$D = 16 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm 3x-4}{2} = 2x \quad y = \frac{x+4 - 3x+4}{2} = 4-x$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$(16 x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^2})}$$

$$\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot \ln \frac{y}{x^2}$$

$$\ln(16 x^6) \cdot (-\ln x) = \ln(2x) \cdot \ln \left(\frac{2}{x^2}\right)$$

023:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \\ y > 0 \\ x^2 y^4 > 0 \end{cases}$$

$$\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x) = (\ln y) \cdot \left(\ln \frac{y}{x^2}\right)$$

$$\ln(16 x^6) \cdot (-\ln x) = (\ln 2x) \cdot \ln \left(\frac{2}{x^2}\right)$$

$$y = 4 - x$$

$$\ln(x^2 (4-x)^4) \cdot (-\ln x) = \ln(4-x) \cdot \ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)$$

$$\underbrace{(2 \ln x + 4 \ln(4-x))}_{b} \cdot (-\ln x) = \underbrace{\ln(4-x)}_a \cdot (\ln(4-x) - 2 \ln x)$$

$$(2b + 4a) \cdot (-b) = a(a - 2b)$$

$$-2b^2 - 4ab = a^2 - 2ab \quad a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\begin{array}{rcl} -6\ln 2 & & -6\ln 2 \\ 2 & = & 2 \\ -5\ln 2 & & -5\ln 2 \\ 4 & = & 4 \end{array}$$

~~1x4x~~ 5. $|x+y+5| + |y-x+5| = 70$

$$(|x|-72)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad 2 \text{ рен.}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

