

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

537 $\int (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (1) \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$

(2): $y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$ - решим относительно y

$D = (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$

$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = 2x \quad y = \frac{x+4 - (3x-4)}{2} = 4-2x \quad 4-x$

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$

(1) $(x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{-\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-\frac{2}{x}\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-\frac{2}{x}\ln x}$

$\ln(x^{-2\ln x}) = \ln(y^{\ln y}) + \ln(y^{-\frac{2}{x}\ln x})$

$-2\ln x \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln y + (-\frac{2}{x})\ln x \ln y$

Введем замену: $\ln x = t, \ln y = p$

$-2t^2 = p^2 - 3tp$

$2t^2 - 3tp + p^2 = 0$ - решим относительно t

$D = (3p)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p^2 = p^2$

$t = \frac{3p \pm p}{4} = p \quad t = \frac{3p - p}{4} = \frac{p}{2}$

$\ln x = \ln y \quad \ln x = \frac{\ln y}{2}$

$x = y \quad x^2 = y$

Продолжение
на странице 2

Продолжение 53

$$(1): \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$(2): \begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 2x = x \Rightarrow x = 0 - \text{нет в ОДЗ}$$

$$б) \begin{cases} y = x \\ y = 4-x \end{cases} \Rightarrow x = 4-x \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 - \text{нет в ОДЗ}$$
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 4-x \end{cases} \quad x^2 + x - 4 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

51

$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow$ искомое 8-значное число
состоит из трех троек, трех семерок, и
двух единиц, или из одной 9, одной 3, трех 7 и трех 3

а) 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1 или б) 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1

Способов выбрать 3 места из 8 $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} =$
 $= 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56$

Способов выбрать 2 места из 8 $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$

Итого 56 способов поставить тройки, 56 способов поставить
семерки, и 28 способов поставить единицы

а) Таких чисел ~~$C_8^2 \cdot C_6^3$~~ $C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} =$
 $= \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 = 28 \cdot 20 = 560$

б) Таких чисел ~~$8 \cdot 7 \cdot C_6^3$~~ $8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} =$
 $= 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 20 = 1120$

Итого $560 + 1120 = \boxed{1680}$

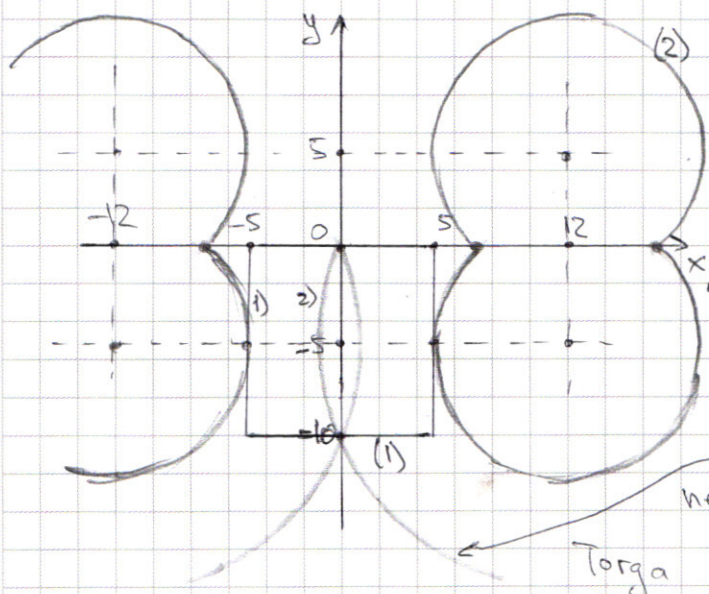
Ответ: 1680

$$\boxed{55} \quad \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): квадрат с вершинами $(5; 0)$, $(-5; 0)$, $(-5; -10)$, $(5; -10)$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} & \begin{aligned} x+y+5+y-x+5 &= 10 \\ 2y &= 0 \Rightarrow \boxed{y=0} \end{aligned} & \begin{aligned} x &\geq -5 \\ x &\leq 5 \end{aligned} \\ \text{б)} & \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} & \begin{aligned} x+y+5-y+x-5 &= 10 \\ 2x &= 10 \Rightarrow \boxed{x=5} \end{aligned} & \begin{aligned} y &\geq -10 \\ y &< 0 \end{aligned} \\ \text{в)} & \begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} & \begin{aligned} -x-y-5+y-x+5 &= 10 \\ -2x &= 10 \Rightarrow \boxed{x=-5} \end{aligned} & \begin{aligned} y &< 0 \\ y &\geq -10 \end{aligned} \\ \text{г)} & \begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} & \begin{aligned} -x-y-5-y+x-5 &= 10 \\ -2y &= 20 \Rightarrow \boxed{y=-10} \end{aligned} & \begin{aligned} y &< -5 & x < 5 \\ y &> -5 & x > -5 \end{aligned} \end{array}$$

(2): Окружность с центром $(12; 5)$ радиусом $\sqrt{a}$, дублированная в II, III и IV четверти координатной плоскости (с центрами $(-12; 5)$, $(-12; -5)$, $(12; -5)$).



Система имеет два решения, если:

1) Окружности в III и IV четвертях касаются отрезков $x=-5$ и $x=5$ соответственно
Тогда $\sqrt{a} = 12-5=7 \Rightarrow \boxed{a=49}$

2) Окружности в III и IV четвертях пересекаются в т. $(0; 0)$ и $(0; -10)$

Тогда $a = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = \boxed{169}$

Ответ: $a=49$, $a=169$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \sin \frac{9x-5x}{2} = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\sin 2x + \cos 2x)) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

или

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} (\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

$$\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 2x = \sin 2x + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) =$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin 7x - 2 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$\sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \quad \text{или} \quad \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

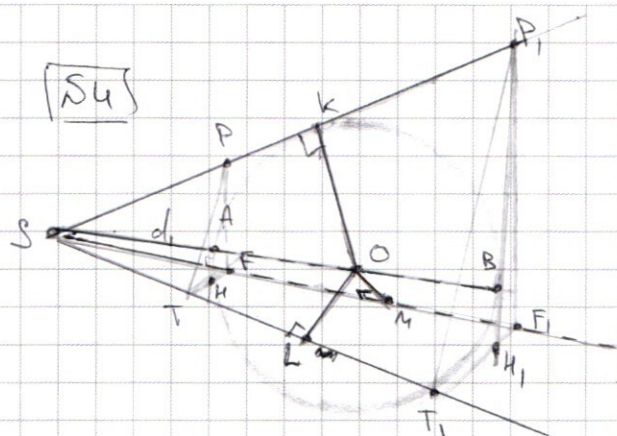
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть $SA = d_1$, $SB = d_2$, $AB = d_2 - d_1 = 2AO$
Рассмотрим $\triangle TPF$ и $\triangle T_1P_1F_1$, в которых
 PH и P_1H_1 — высоты,
 $PH \perp SO$, $P_1H_1 \perp SO$
Тогда $\frac{PH}{P_1H_1} = \frac{d_1}{d_2}$, $\frac{TF}{T_1F_1} = \frac{d_1}{d_2}$

$$S_{\triangle TPF} = \frac{1}{2} PH \cdot TF, \quad S_{\triangle T_1P_1F_1} = \frac{1}{2} P_1H_1 \cdot T_1F_1$$

$$\frac{S_{\triangle T_1P_1F_1}}{S_{\triangle TPF}} = \frac{16}{1} = \frac{P_1H_1 \cdot T_1F_1}{PH \cdot TF} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \Rightarrow \frac{d_2^2}{d_1^2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = 3d_1, \quad AO = \frac{3d_1}{2} - \text{радиус сферы}$$

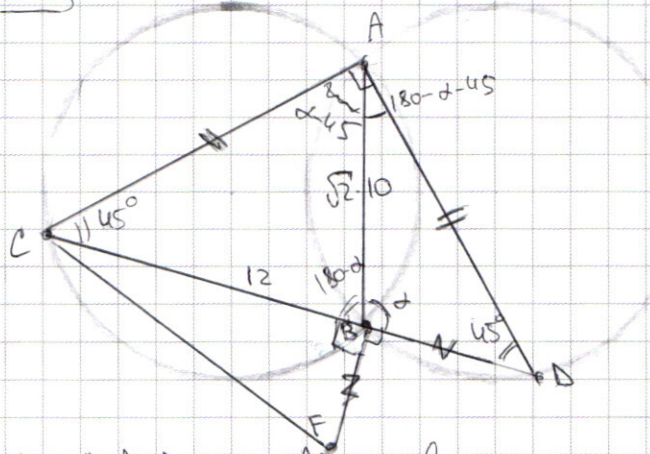
Рассмотрим $\triangle KSO$: $KO \perp SK$ как радиус и касательная,

$$KO = \frac{3d_1}{2}, \quad SO = d_1 + \frac{3d_1}{2} = \frac{5d_1}{2}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{\frac{3}{2}d_1}{\frac{5}{2}d_1} = \frac{3}{5}, \quad \angle KSO < 90^\circ$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

[56]



а) $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ вписаны в одинаковую окружность и содержат дугу хорды $AB \Rightarrow \angle ACD = \angle ADE$;

$\triangle CAD =$ прямоугольный, $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADE = 45^\circ$, $AC = AD$

В $\triangle ABD$ теорема синусов: $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2 \cdot 10 \Rightarrow AB = \sqrt{2} \cdot 10$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2AC^2 = BD^2 + CB^2 + 2BD \cdot CB - \text{теорема Пифагора}$$

По теореме косинусов в $\triangle CBA$: $AC^2 = 200 + CB^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \cdot CB \cdot \cos \alpha$

$$\text{В } \triangle ABD: AD^2 = AC^2 = 200 + BD^2 - 2 \sqrt{2} \cdot 10 \cdot BD \cdot \cos \alpha$$

$$2AC^2 = 400 + CB^2 + BD^2 + 2 \sqrt{2} \cdot 10 \cos \alpha (CB - BD)$$

$$BD \cdot CB = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos \alpha (CB - BD)$$

По теореме синусов для $\triangle ACB$ $\frac{\sqrt{2} \cdot 10}{\sin \alpha} \cdot \frac{CB}{\sin(\alpha + 45)} = 20$

$$\frac{BD}{\sin(\alpha + 45)} = 20 - \text{для } \triangle BAD$$

$$400 \sin(\alpha - 45) \sin(\alpha + 45) = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos \alpha (\sin(\alpha - 45) - \sin(\alpha + 45)) \cdot 20$$

$$2 \sin(\alpha - 45) \sin(\alpha + 45) = \sqrt{2} \cos \alpha (\sin(\alpha - 45) - \sin(\alpha + 45)) =$$

$$= \sqrt{2} \cos \alpha \left(2 \sin \frac{\alpha - 45 - \alpha + 45}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - 45 + \alpha + 45}{2} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \cos^2 \alpha$$

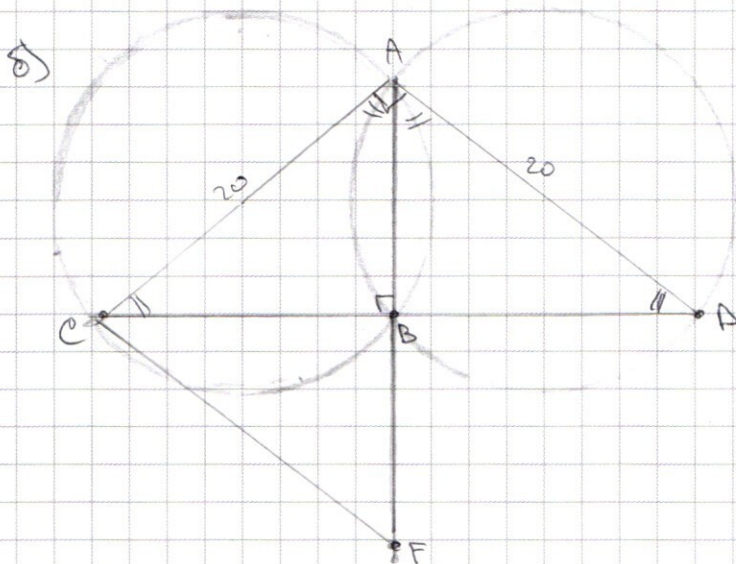
$$2 \left(\sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cos \alpha \cdot 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right)$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -2 \cos^2 \alpha$$

Продолжение на странице 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 56



$$2a^2 = (CB + BD)^2$$

$$a^2 = 200 + BP^2 - 2 \cdot BP \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \cdot \cos \alpha$$

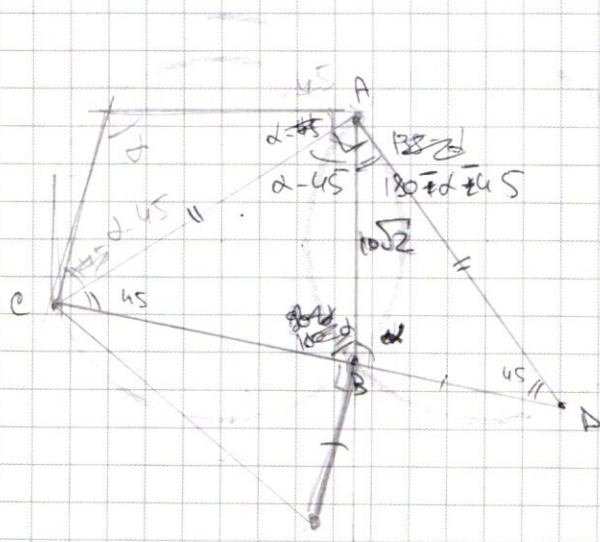
$$a^2 = 200 + 16c^2 + 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos 2$$

$$(BD + BC)^2 = 400 + BD^2 + BC^2$$

$$400 = 2BD \cdot Bc$$

$$BP - BC = 200$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 20$$



180-45-2

$$90 - 180 + 45 + d = 45 + d - 90 = d - 45$$

$$45 + 90 - 30 +$$

180-2-45

$$2790 - 12042 + 45 =$$

$$= 2 + 45 - 90 = 2 - 45$$

$$180 - 2 + 45 - 45 = 180 - 2$$

$$\frac{\cancel{CD} BD}{\sin(180 - \alpha - 45)} = \frac{BC}{\sin(180 - 180 + \alpha - 45)}$$

$$\frac{BD}{BE} = \frac{\sin(\alpha + 45)}{\sin(\alpha - 45)} = \frac{\sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin \alpha \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

180-180-1-65

$$180 - 2 \cdot 45 = 2 \cdot 45$$

28 51

1 3 3 1

1 3 3 1

3 1 1 3

3 3 1 1

3 1 3 1

1 3 1 3

1 3 1 3

1 3 3 1

1 3 1 3

1 1 3 3

1 3 3 1

1 3 1 3

6.5

3, 3, 1, 1, 1

3 3 1 1

~~3 3 1 1~~

~~3~~

1 1 1 1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

28

20

56

56

2

112

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $9261 \quad 9+2+6+1 = 9+9 = 18$

$$9261 = 3087 \cdot 3 = 3^7 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 =$$

$$= 3^3 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3$$

$3 \times 3, 3 \times 7, 2 \times 1$

~~~~~

кол-во способов  
выбора 2 из 8

$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$$

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56$$

$$C_8^3 = 56$$

$$56 \times 28 \times 56 =$$

$$56 \times 2 + 28 = 140$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3087} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 26 \phantom{00} \\ \underline{24} \phantom{00} \\ 21 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 343} \\ \underline{9} \phantom{00} \\ 12 \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 49} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \overline{) 140} \\ \underline{49} \phantom{00} \\ 14 \phantom{00} \\ \underline{14} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

②  $(x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(y x^2)}$   $y > 0, x > 0$

$$\ln(x^2 y)^{-\ln x} = \ln(y^{\ln(y x^2)})$$

$$\begin{aligned} x^{-2 \ln x} \cdot y^{-\ln x} &= y^{\ln y - 2 \ln x} \\ x^{-2 \ln x} &= y^{\ln y - 2 \ln x + \ln x} = y^{\ln y - \ln x} \end{aligned}$$

a)  $y = 2x$

$$\begin{aligned} x^{-2 \ln x} &= 2x^{\ln(2x) - 3 \ln x} \\ &= (2x)^{\ln(2x) - 2 \ln x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (2x)^{\ln 2 - \ln x} \\ &= 2^{\ln 2} \cdot 2^{-\ln x} \cdot x^{\ln 2 - \ln x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4.16)^{-\ln 2} &= 2^{\ln \frac{2}{2^2}} \\ \frac{-6 \ln 2}{2} &= 2^{\ln \frac{1}{2^2}} \end{aligned}$$

$$-6 \ln 2 = \ln 2^{-6}$$

$$\begin{aligned} (2^2 \cdot 2^2)^{-\ln x} &= 2^4 \\ 2^{-10 \ln x} &= 2^{2 \ln(\frac{2^2}{2^4})} \\ -10 \ln x &= \ln x \checkmark \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad (2) & \text{огз: } x > 0 \\ & y > 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (1)$$

$$1) : y^2 - y(4-x) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (4-x)^2 - 4(-2x^2 + 8x) = 16 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 4 + 4^2 =$$

$$= (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{4+x \pm (3x-4)}{2}$$

$$y = \frac{4+x+3x-4}{2} = 2x$$

$$y = \frac{4+x-3x+4}{2} = \frac{8-2x}{2} = 4-x$$

$$(y-2x)(y-4+x)=0$$

$$\textcircled{2} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\log_a b = c$$

$$b = a^c$$

$$\ln((x^2 y^4)^{-\ln x}) = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^2})})$$

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = \ln y \ln \frac{y}{x^2}$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y (\ln y - 2 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \ln y$$

$$-2t^2 - 4tp = p^2 - 2tp$$

$$p^2 + 2t^2 - 3tp = 0$$

$$p^2 - 3tp + 2t^2 = 0 \quad -\text{отн. } p$$

$$D = (3t)^2 - 4 \cdot 2 \cdot t^2 = 9t^2 - 8t^2 = t^2$$

$$p = \frac{3t \pm t}{2} = 2t$$

$$\ln y = \ln x$$

$$y = x$$

$$\ln y = 2 \ln x$$

$$y = x^2$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad - \text{нет в оз}$$

$$b) \begin{cases} y = x \\ y = 4-x \end{cases} \quad x=4-x \quad \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 = 2x \\ x=0 \end{matrix} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 = 4-x \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \quad D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$(2) \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x - \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\alpha + \beta = A \quad \alpha = A - \beta$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\alpha - \beta = B \quad A - 2\beta = B$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

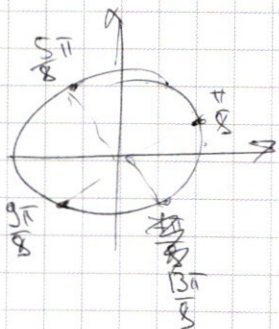
$$(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ) (\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)$$

$$= \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha +$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$$

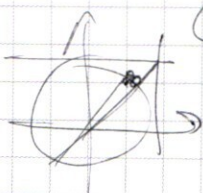


$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



$$\sqrt{5} \quad \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (2) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (1) \end{cases}$$

(1) Окр. центр ~~(12; 5)~~  $(12; 5)$   
Радиус  $\sqrt{a}$

(2) 1/2)  $\frac{x+y}{2}$

a)  $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$   
 $x+y+5+y-x+5=10$   
 $2y=0 \Rightarrow y=0$

$$x \geq -5$$

$$x \leq 5$$

b)  $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 = 0 \end{cases}$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10 \Rightarrow x=5$$

$$y \geq -10$$

$$y \leq 0$$

b)  $\begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$

$$-x-y-5+y-x+5=-10$$

$$-2x=-10$$

$$x=5$$

$$y \leq 0$$

$$y \geq -10$$

r)  $\begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases}$

$$-x-y-5-y+x-5=-10$$

$$-2y=-20$$

$$y=10$$

$$x \leq 5$$

$$x \geq -5$$

$$\frac{35+8}{36} = \frac{43}{36}$$

$$\frac{43+8}{36} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

1)  $x=12, x=-12$

$$(y-5)^2 = (y-5)^2$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

$$|y|-5=2$$

$$\frac{13}{169}$$

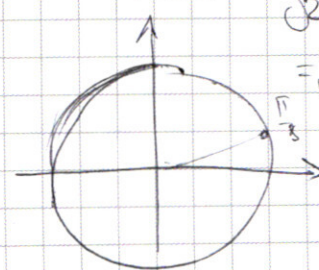
2 решения  $\rightarrow$  2 касания

1)  $\sqrt{a} = 12-5=7 \Rightarrow a=49$

2)  $r = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$$a = 13^2 = 169$$

$$\sqrt{20^2 - (2\sqrt{18})^2} = \sqrt{400 - 2 \cdot 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$



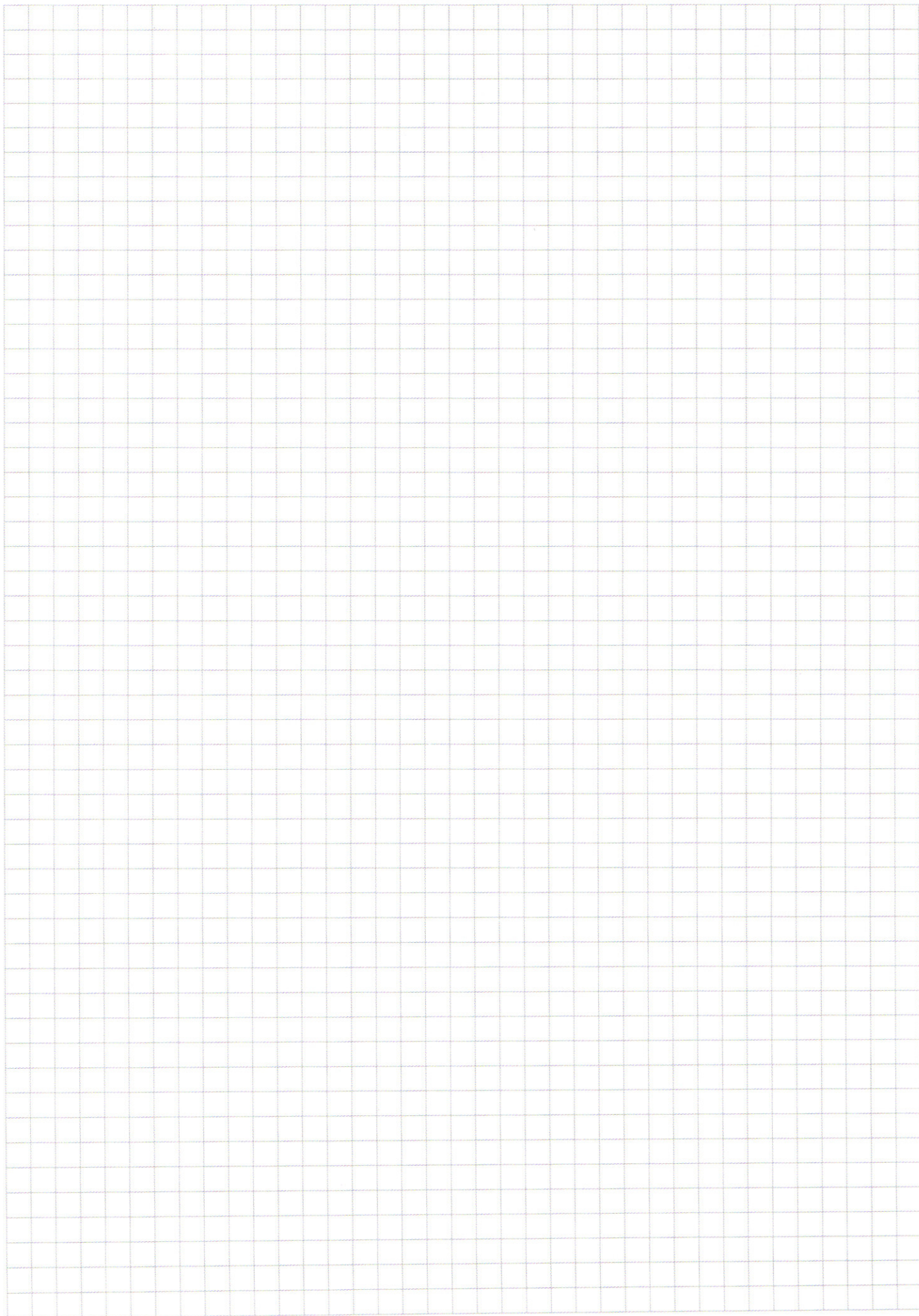
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 6

$$\sin^2 \alpha = 0$$

Углы  $\angle ABD$  и  $\angle EBA$  в одинаковых окружностях  
опираются на равные хорды

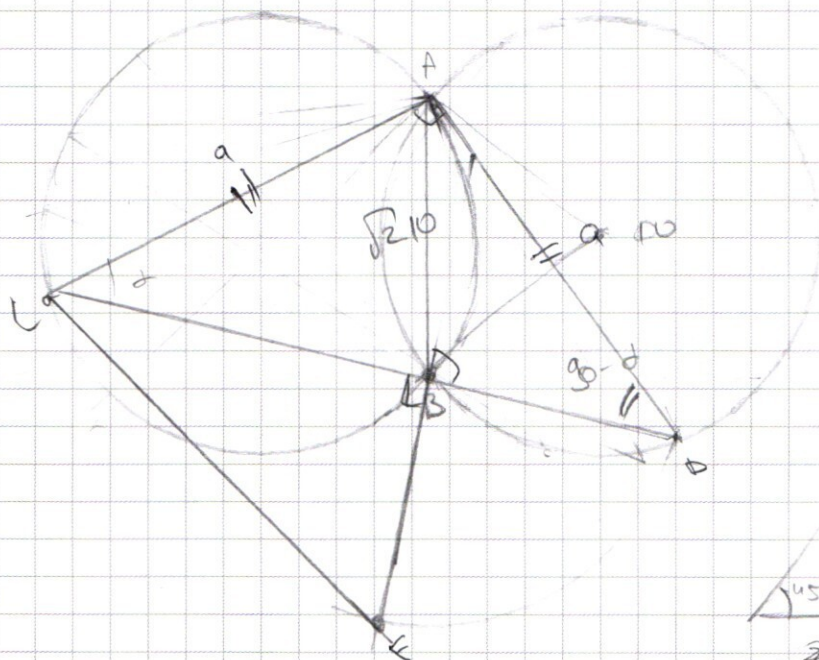
$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$



☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

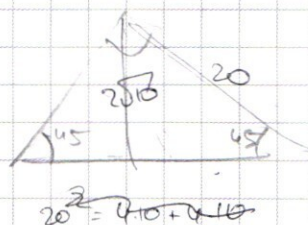
Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{aligned} CA^2 &= AD^2 = \\ &= (CB + BD)^2 = \\ &= CB^2 + BD^2 + 2CB \cdot BD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD^2 &= DB \cdot DC \\ CA^2 &= CB \cdot CD \end{aligned}$$



$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R \quad AB = 2R \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R \quad \frac{2R \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2R \Rightarrow \tan \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow CA = AD$$

$$AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} R = \sqrt{2} \cdot 10$$

$$AD^2 = DB \cdot DC = CB \cdot CD = 4,5$$

$$2AD^2 = (CB + BD)^2 = CB^2 + BD^2 + 2BD \cdot CD = CB^2 + BD^2 + 2AD^2$$

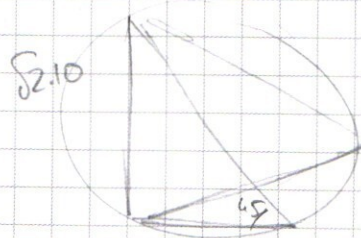
$$a^2 = DB \cdot DC$$

$$a^2 = CB \cdot CD$$

$$DB = DC$$

$$2a^2 = CD^2$$

$$CD = \sqrt{2}a$$



$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned} \cos d - \sin d &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - d) - \sin d}{\cos d - \cos(\frac{\pi}{2} - d)} = -2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{2d - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \\ &= -\sqrt{2} \cdot \sin\left(d - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$2 \sin 7x \cdot (-\sqrt{2}) \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(2 \sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x))(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)) = 0$$

$$\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin 7x - \cos(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin \frac{7x - 2x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{7x + 2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \cos\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x$$

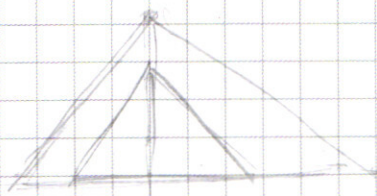
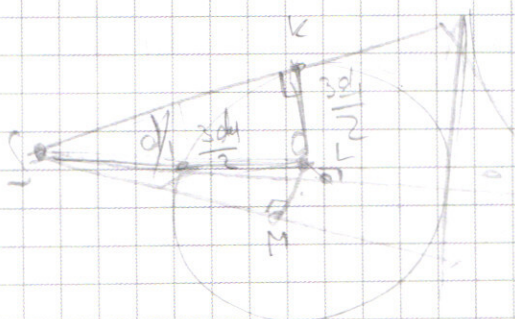
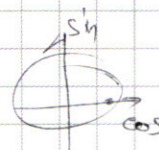
$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$$



$$\begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_2} &= \frac{d_1}{d_2} \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 h_1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} a_2 h_2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = 4d_1$$

$$d_2 - d_1 = 3d_1 = D$$