

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}(\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x) = 0$$

$$-2\sin 7x \sin 2x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x = 0 \quad (1) \\ 2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$$2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \quad | :2$$

$$\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0$$

мы можем $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда

$$\sin 7x - (\sin \varphi \cos 2x + \cos \varphi \sin 2x) = 0$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = \sin 2x, \\ \sin 7x = \sin(2x + \varphi) = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \end{array} \right.$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \varphi) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x \neq 0, \sin 2x = \Rightarrow \begin{array}{l} \text{tg } 2x = 1, 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 2\sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, 5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, x = \frac{2\pi n + \frac{\pi}{4}}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, 9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m, x = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{a}{8} + \frac{nk}{2}, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2nm + \frac{a}{4}}{5}, n \in \mathbb{Z},$

$x = \frac{\frac{3a}{4} + 2nm}{9}, m \in \mathbb{Z}$

N1

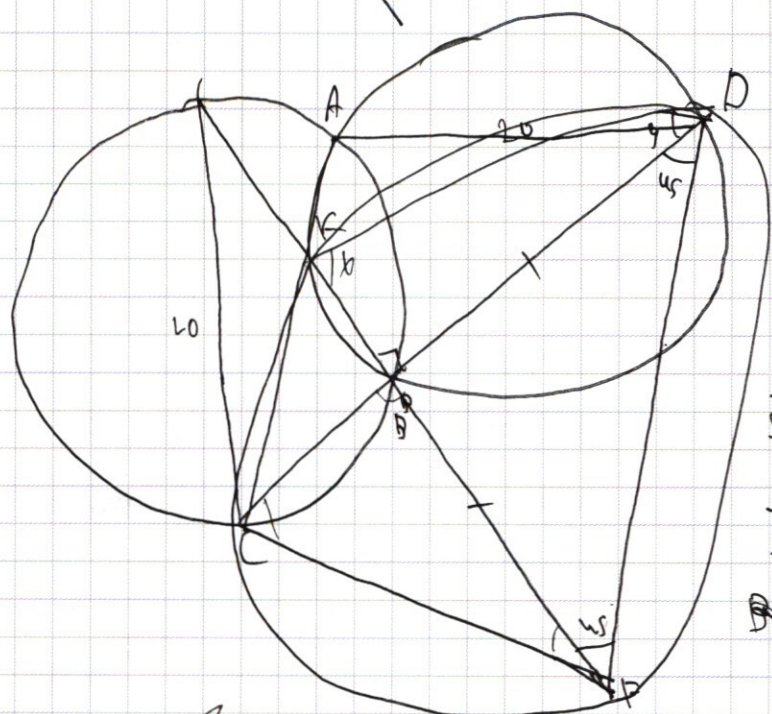
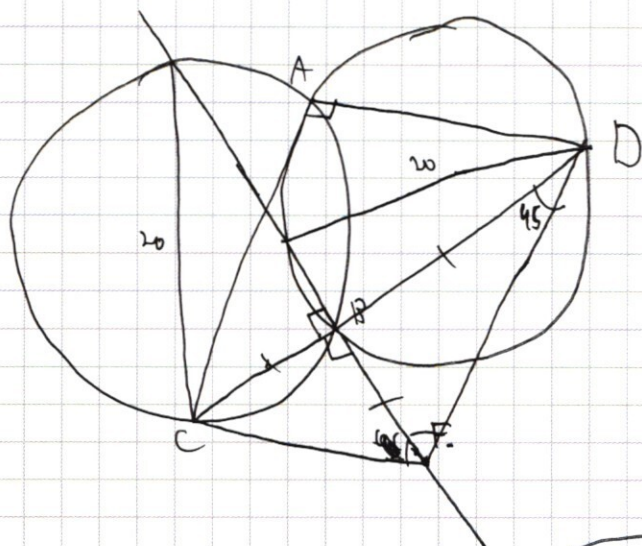
Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, а так как всевозможное, значит в числе цифр есть 2 единицы

$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2$, число представлено в виде 33377711,

Можно найти кол-во перестановок $P(7,3,2) = \frac{8!}{3!3!2!} = 2$
 $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 2} = 560$

Ответ: 560

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



S_2
 $\triangle CDF \sim \triangle BDF$
 $\frac{DB}{\sin 45} = \frac{20}{\sin 90} = 20$
 $\frac{DB}{\sin 45} = \frac{DF}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$
 $\frac{DB}{\sin 45} = \frac{DF}{\sin 45} = \frac{DF}{\sin 45}$
 $x + y = 90$



$$N^3 \begin{cases} (x^2 y^4)^{-1/\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad \text{or} \Rightarrow x > 0, \\ y^1 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x(1) \quad x^{-2/\ln x} y^{-4/\ln x} = y^{\ln y - 2/\ln x}$$

$$x^{-2/\ln x} y^{-4/\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2/\ln x}} \quad | \cdot y^{2/\ln x}$$

$$x^{-2/\ln x} y^{3/\ln x} = y^{\ln y} \quad | \ln$$

$\ln x$:

$$-2/\ln x + 3 \ln x \ln y = \ln y$$

$$a = \ln x, \quad b = \ln y$$

$$-2a + 3ab = b$$

$$-2a + 2ab = b - ab$$

$$+2a(b-a) = b(b-a)$$

$$(b-a)(b-a) = 0, \quad (b+2a)(b-a) = 0$$

$$(\ln y - 2/\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln y - 2/\ln x = 0 \Rightarrow \ln y = 2/\ln x, \boxed{y = x^2} \\ \ln y - \ln x = 0 \Rightarrow y = x, \boxed{y = x} \end{array} \right]$$

$$y^1 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$1) \quad y = x; \quad x^1 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0, \quad 2x(4-2x) = 0, \quad x=2, \quad x=0, \quad x \neq 0 \Rightarrow x=2, \quad y=2$$

$$2) \quad y = x^2, \quad x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0, \quad x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0, \quad x \neq 0, \quad | : x$$

$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$ ~~2~~ Заметим, что при $x=2$, уравнение выполняется, тогда:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x-2 \\ x^2 - 2x^2 & x^2 + x - 4 \\ \hline x^2 - 6x & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -4x + 8 & \\ -4x + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x^2 + x - 4)$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

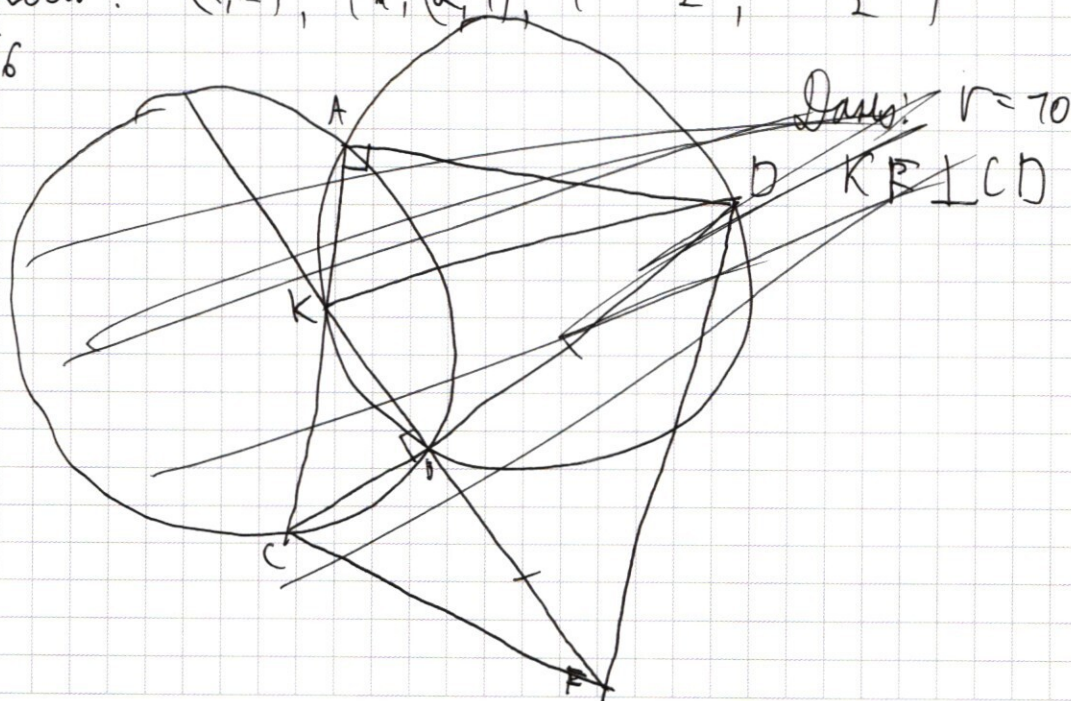
$$x > 0, x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2, y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \text{ н.к. } y > 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, y = 4, y = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1 + 17 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \neq 0$$

Ответ: $(2, 2), (2, 4), \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$
№6



N1

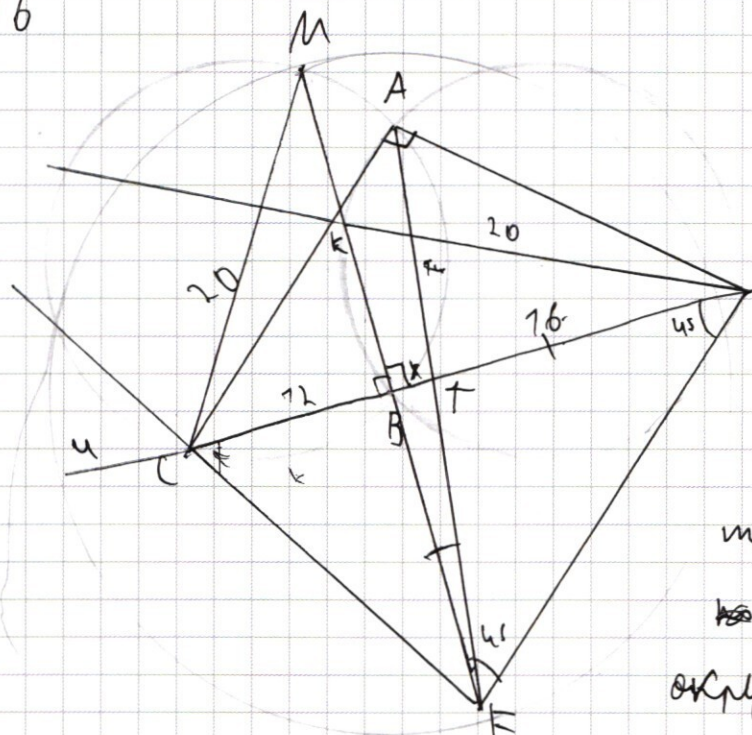
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} & | :2 \\ y < 26 + 2(2^{21} - 1)x & | :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{2} \geq 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{3x} \\ \frac{y}{2} < 28 + 3(2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)x \end{cases}$$

y

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6



Дано: $r=10$,
 $\angle CAD=90^\circ$,
 $BF=PD$, $MF \perp CD$

м-к диаметра изги
радиуса окружности
равен 20, $\angle KBD=90^\circ$,
то $KD=20$,
ошибкам следую
окружности MF как

диаметре, тогда $MB=BF$, м-к диаметра проходит
через точку K $\perp$ CD , $\Rightarrow MB=BF$, а м-к CB -
общая, то $\triangle CMB$ и $\triangle CBF$ - равные, а значит $CF=CM=$

20. ~~Обозначим $BF=x$, тогда:~~

то $BF=16$, по теореме Пифагора из $\triangle CBF$, $BD=16$

~~$$\cos \angle BCF = \frac{3}{5}, \quad CF = \sqrt{16^2 + 400} = \sqrt{256 + 400} = \sqrt{656} = 2\sqrt{164} = 2\sqrt{4 \cdot 41} = 4\sqrt{41}$$~~

~~$$CF = 544 - 400 \cdot \frac{3}{5} = 544 - 240 = 304$$~~

~~$$DF = \sqrt{28^2 + 20^2} = \sqrt{784 + 400} = \sqrt{1184} = 2\sqrt{296} = 2\sqrt{4 \cdot 74} = 4\sqrt{74}$$~~

~~$$= 784 + 400 - 072 = 784 - 242 = 542 = 26\sqrt{2}$$~~

~~$$DF = \sqrt{(28+x)^2 + 20^2} = \sqrt{784 + 56x + x^2 + 400} = \sqrt{1184 + 56x + x^2}$$~~

~~$$= 76^2 + 16^2 = 572$$~~

значит MF и AF - диаметр, AC

~~задача: для функции $f(x)$ в точке x_0 ,
найти $f'(x_0)$, $f''(x_0)$~~

Дано: а) $f(x) = 20$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5) \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-2)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$, x \approx 0 \quad |y+5| + |y+5| = 10$$

$$|y+5| = 5$$

$$y \approx 0, y \approx -10$$

$$y \approx 0:$$

$$(x+5) + (1-x+5) = 10$$

$$x=5$$

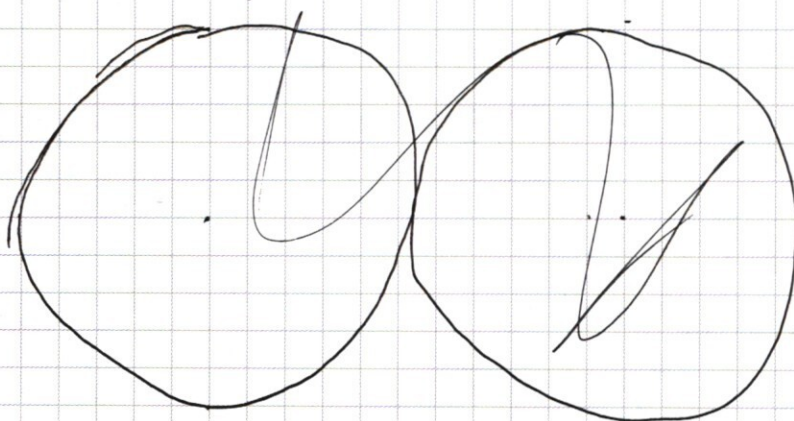
$$2x = 10$$

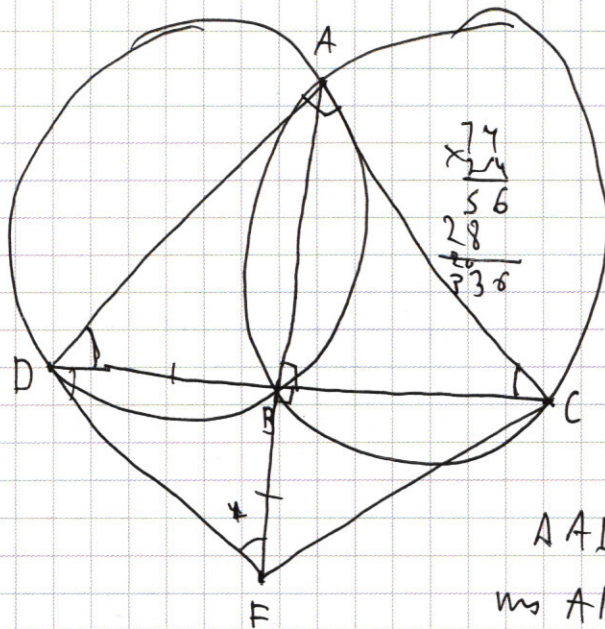
$$x = 5$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad | :5$$

$$y^2 - xy - 2$$

$$y^2 - xy - 2$$





$$\begin{array}{r} 74 \\ \times 24 \\ \hline 56 \\ 28 \\ \hline 1736 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \\ 72 \\ \hline 108 \end{array}$$

AC - диаметр, AD -
диаметр = 20, м.к
 $\angle ABC = 90^\circ$

$$BC = 20\sqrt{2}$$

ADC - п/д, м.к AD = AC = 20,

то AB - ~~м.к~~ медиана и биссектриса,

$$196 + 400 - 2 \cdot 14 \cdot 20 \sin \angle A \Rightarrow \text{м.к высота} \Rightarrow BC = BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ABC \Rightarrow DB = 10\sqrt{2}$$

$$596 - 776 = 280$$

$$BC = 10\sqrt{2}, \angle A = (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 =$$

$$= 20 \text{ Ответ:}$$

$$\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad | -2 \\ (y^2 - 8y + 16) - (4x^2 - 76x + 76) + y^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

$$(y-4)^2 - (2x-11)^2 + y(4-x) = 0$$

$$\begin{cases} y \geq 2^0 + 3 \cdot 2^4 \\ y < 76 + 2 \cdot 2^3 - 11x \end{cases}$$

$$y < 2(38 + (2^{16} + 1)(2^8 - 1)x)$$

$$y < 2(38 + (2^{16} + 1)(2^8 - 1)(2 + 71)x)$$

$$y < 2(38 + (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 71)7x)$$

$$y < 2(38 + (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)3x)$$

$$y < 2(38 + (2^{16} + 1)(2^8 + 1)(2^4 + 1)255x)$$

$$y < 2(38 + 2^{32} - 1)$$

$$y < 2(38 + 3)$$

$$y < 28 + 2x - 2x$$

$$\begin{aligned} 2^4 - 1 &= (2^2 + 1)(2^2 - 1) \\ &= (2^2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 8 \\ \hline 96 \\ 72 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 257 \\ \times 255 \\ \hline 1285 \\ 514 \\ \hline 65535 \end{array}$$

$$65537 \cdot 257 \cdot 17 \cdot 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{26} \\ 78 \\ \underline{81} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 9} \\ \underline{42} \\ 72 \\ \underline{72} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{343} \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4}{6 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3^1 \cdot 2^6} = 9 \cdot 64 = 576$$

$$P(3, 3, 2) = \frac{8!}{3! 3! 2!} = \frac{40320}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 560$$

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ -2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x &= 0 \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) &= 0 \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) &= 0 \\ \left[\begin{array}{l} 1) \cos 2x - \sin 2x = 0, \cos 2x = \sin 2x \\ 2) 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{array} \right. \\ 2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x = 0 \quad | : 2 \\ \sin 7x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \sin 7x - (\sin \varphi \cos 2x + \cos \varphi \sin 2x) = 0 \\ 2) \sin 7x = \sin (2x + \varphi) = \sin (2x + \frac{\pi}{4}) \\ \sin 7x - \sin (2x + \frac{\pi}{4}) = 2 \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \Rightarrow x > 0, y > 0 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad | \cdot 2 \\ y^2 - 4y + y^2 - 2xy - 4x^2 + 8x = 0 \quad + 4 \quad + 4 \\ (y-2)^2 - (2x-4)^2 + y^2 - 2xy = 0 \quad + 20 \\ (y-2)^2 - 4(x-2)^2 + y^2 - 2xy = 20 \end{cases} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{aligned} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y &= 0 \quad | \cdot 2 \\ 2y^2 - 2xy - 4x^2 + 16x - 8y &= 0 \\ (y^2 - 2y + 16) - (4x^2 - 16x + 16) - 2xy &= 0 + 16 - 16 \\ (y-4)^2 - (2x-4)^2 - 2xy &= 0 \\ (y-4+2x-4)(y-4-2x+4) &= 2xy \\ (y+2x-8)(y-2x) &= 2xy \end{aligned}$$

$$y+2x > 8, y-2x > 0$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$\ln(x^2 y^4) = 2 \ln x + 4 \ln y$$

$$x^{-2 \ln x} y^{-4 \ln x} = \frac{y^{\ln y}}{x^{2 \ln x}} \quad | \cdot y^{2 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} y^{3 \ln x} = y^{\ln y} \quad | \ln$$

$$\ln x^{-2 \ln x} + \ln y^{3 \ln x} = \ln^2 y$$

$$-2 \ln^2 x + 3 \ln y \ln x = \ln^2 y$$

$$\begin{cases} 3 \ln y \ln x = \ln^2 y + 2 \ln^2 x \\ (y+2x-8)(y-2x) = 2xy \end{cases}$$

$$(y+2x-8)(y-2x) = 2xy$$





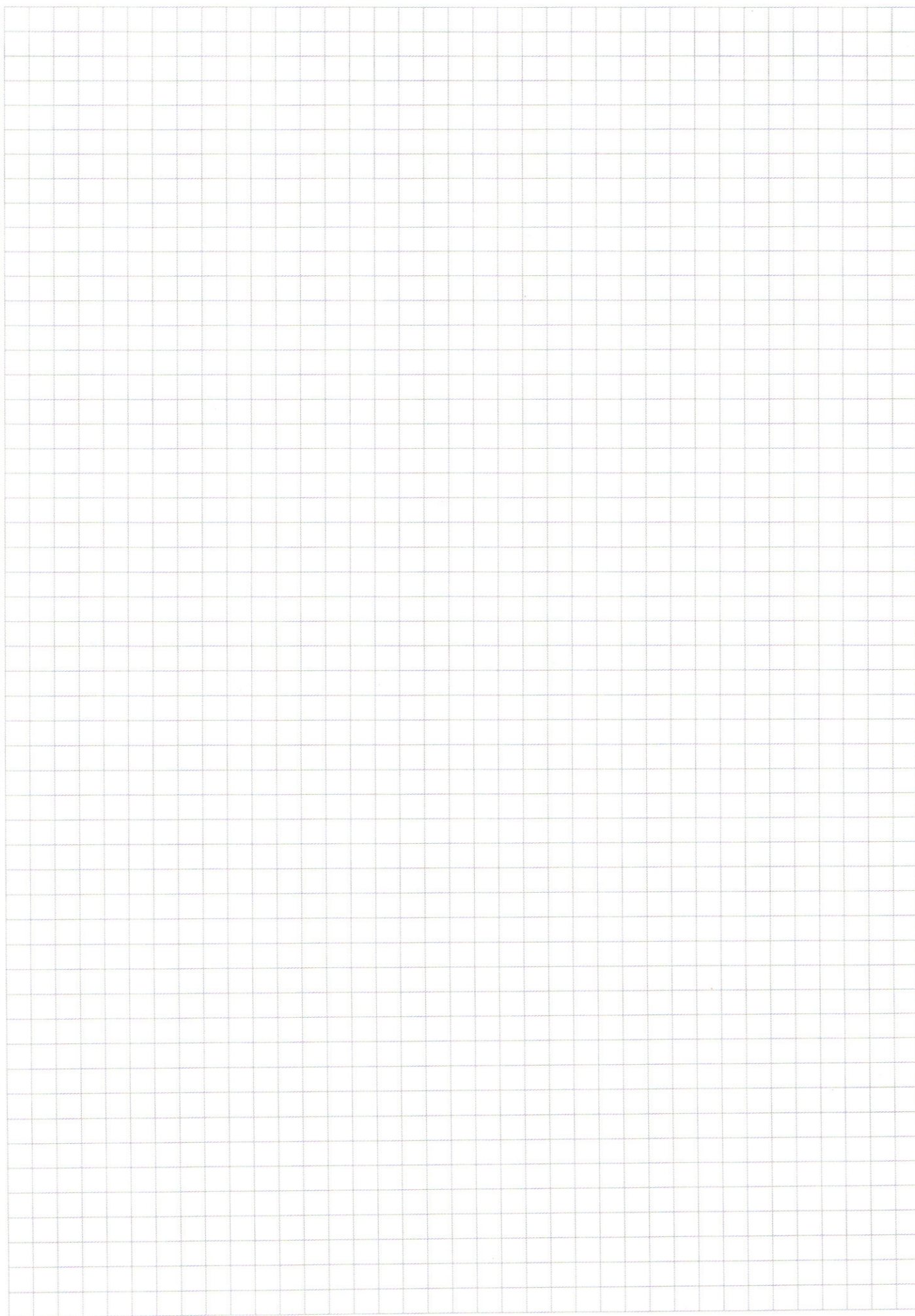
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)