

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$1) \quad \cos 2x = \sin 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin 7x = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\sin 7x - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{9}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2.1) \sin(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2.2) \cos(\frac{9}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$\frac{9}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{2\pi k - \frac{\pi}{4}}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad 2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5};$$

$$x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\sin 7x = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\sin 7x = \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x = \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}) \cdot \cos(\frac{9}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$2) \quad \sin(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$5x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{2\pi k - \frac{\pi}{4}}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \quad \sin(\frac{9}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{9}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$9x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$$

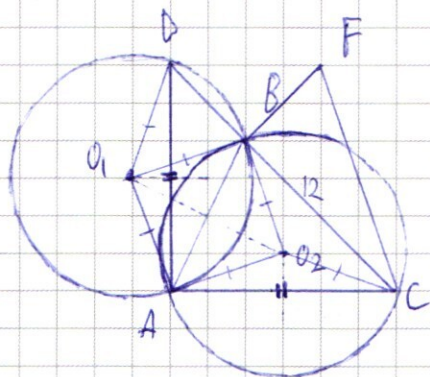
$$x = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi k}{9}; x = -\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\boxed{56}$$

a)


$$\sigma_{Kp1}(O_1; r=10) \text{ пер. } \sigma_{Kp2}(O_2; r=10) \text{ в } 1/4 \text{ и } 1/8$$
$$C \in \text{окр}_2; D \in \text{окр}_1 \quad B \in CD$$
$$BF \perp DC; BF = DB \quad \text{cf-?}$$

из Т. Ситков:

$$\frac{DA}{\sin DBA} = D_1; \frac{AC}{\sin CBA} = D_2$$

$$\sin DBA = \sin CBA; D_1 = D_2 \Rightarrow AD = AC$$

из т. черточек:

~~$$\frac{BD^2}{\sin DAB} = \frac{BC}{\sin DAC} \quad (\text{TX. } D_1 = D_2)$$~~
~~$$BD^2 \quad AD^2 + BC^2 = 2AD^2 / \sin^2 DAB$$~~

$$\frac{BD}{\sin DAB} = 2r = 20; \quad \frac{BC}{\sin BAC} = 2r = 20$$

$$BD^2 + BC^2 = 20^2 (\sin^2 DAB + \sin^2 BAC) = 20^2$$

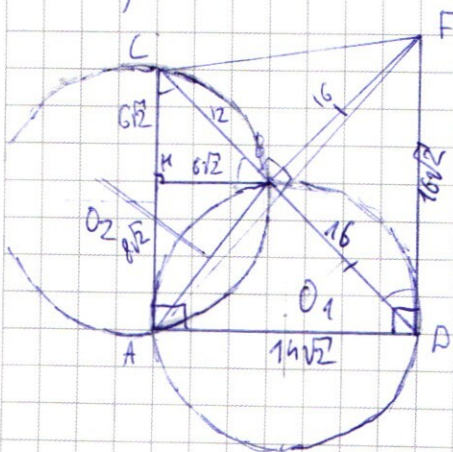
$$\sin DAB = \cos BAC, \text{ t.k. } \angle DAC = 90^\circ$$

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 = 20^2$$

$$CF = 20$$

Orlen: $CF=20$

c) $BC = 12$



~~$AD = AE =$~~

D.n. BH + CA

$\angle ADF = 90^\circ$, T.K. $\angle CDF = \angle CDA = 45^\circ$

из т.а.и.у.с.в.:

$$\frac{CB}{\sin CAB} = 2R = 20 \Rightarrow \sin CAB = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$u_{\text{снв}}: CH=HB = 6\sqrt{2}^1; HA = \frac{HB}{1g \text{ снв}} = \frac{6\sqrt{2}}{(2)} = 3\sqrt{2}$$

$$AD = AC = 14\sqrt{2} ; CD = \sqrt{(14\sqrt{2})^2 + (14\sqrt{2})^2} = 28 \Rightarrow BD = 28 - 12 = 16$$

$$FD = 16\sqrt{2}, \quad S_{\triangle ADF} = \frac{AD \cdot DF}{2} = \frac{14\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2}}{2} = 112$$

$$S_{\text{tr. CADF}} = \frac{AC+FD}{2} \cdot AD = \frac{14\sqrt{2}+16\sqrt{2}}{2} \cdot 14\sqrt{2} = 15 \cdot 14 \cdot 2$$

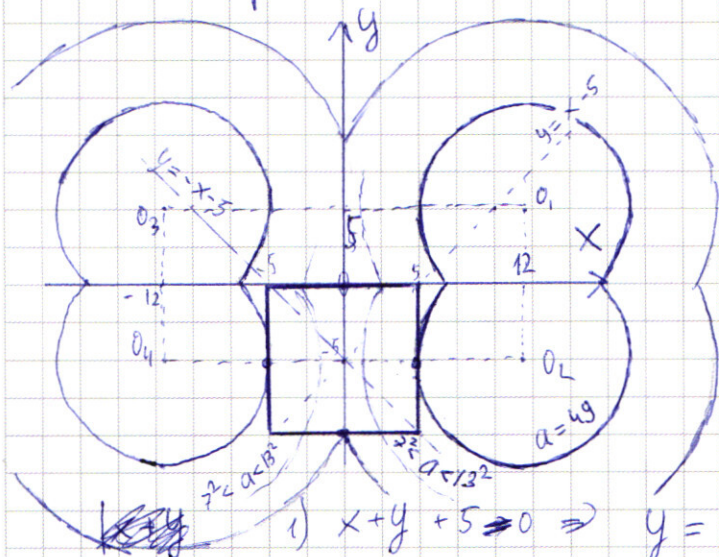
$$\int_{\Delta} ACF = S_{TP} CADF - S_{\Delta} ADF = 15 \cdot 14 \cdot 2 - 14 \cdot 16 = 14(30-16) = 14^2$$

Over: $S_{ACF} = 196$

№55

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

при к. а имеют ровно 2 решения.



1) $x+y+5=0 \Rightarrow y=-x-5$

++ $y=0$

2) $y-x+5=0 \Rightarrow y=x-5$

+- $x=5$

-+ $x=-5$

-- $y=-10$

~~при~~ $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$

имеет вид окружности с центром в $(12; 5)$, радиусом $\sqrt{a}$, симметричной относительно Ox и Oy .

При $a < 0$: точек нет
 $a = 0$: 4 точки

$0 < a < 7^2$: ни одна из частей фигур не входит до абсциссы

$a = 7^2$: 2 решения $\Rightarrow a = 49$ $(5; -5)$ и $(-5; -5)$

$7^2 < a < 13^2$: 4 решения, по 2 слева и справа от Oy

$a = 13^2$: 2 решения, $(0; -10)$ и $(0; 0) \Rightarrow a = 169$

$a > 13^2$: решений нет

Ответ: при $a = 49$ и $a = 169$

№53

решим 2-е ур-е:

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-2x)(y+x) - 4(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

1) $y = 2x$

2) $y = 4 - x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x$

$$(x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2x}{x^2} \right)}$$

$x > 0$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6} \right)}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln 2 - \ln x^6}$$

$$16^{-\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln 2}$$

$$2^{-4 \ln x} = 2^{\ln 2 - 6 \ln x} \cdot x^{\ln 2}$$

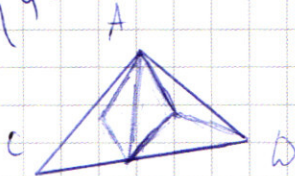
$$1 = 2^{\ln 2} \cdot 2^{-2 \ln x} \cdot x^{\ln 2}$$

156

~~Sin α + cos α~~

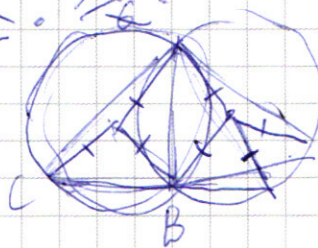
14
+14

28
196



.....

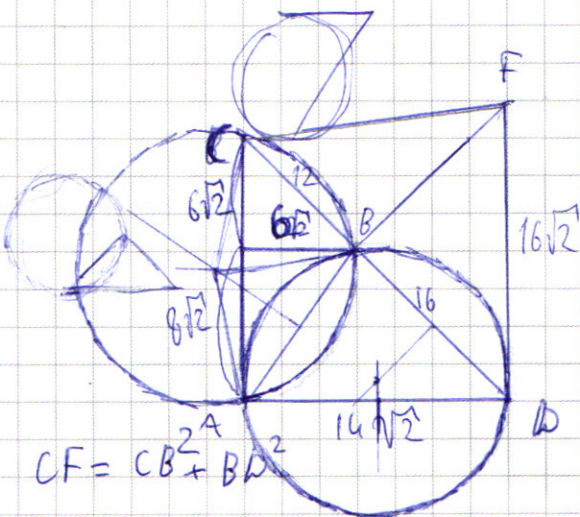
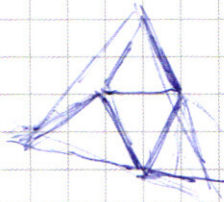
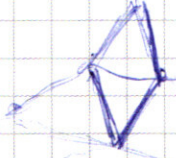
8.7.8. 5.4.3A =
6



10.50 = 560
21

441
21

441
1882
9261



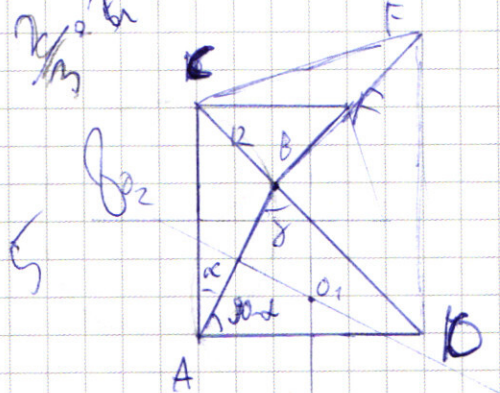
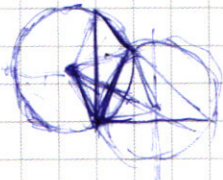
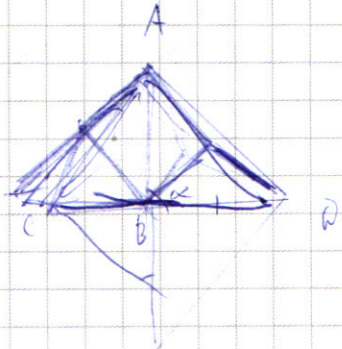
$$CF = CB^2 + BD^2$$

$$R_{\text{вн. окр}} = \frac{AB}{\sin \alpha}$$

14
+14

28
56
+14

196
2.3.6 = 12



$$\frac{DB}{\sin \alpha} = 20 ; \quad \frac{BC}{\sin \beta} = 20$$

$$\frac{AD}{\sin \gamma} = 20$$

$$DB^2 = 20^2 \sin^2 \alpha + 10^2$$

$$AD = CA = 20 \cdot \sin \gamma$$

$$\frac{12}{\sin \alpha} = 20 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$2\sqrt{2} = 14\sqrt{2} = 14 \cdot 2$$

$\sin \alpha + \cos \alpha =$

$$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha = 12^2$$

$$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = BD^2$$

$$BD^2 - CB^2 = 2AB \cdot AB \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

~~$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$~~

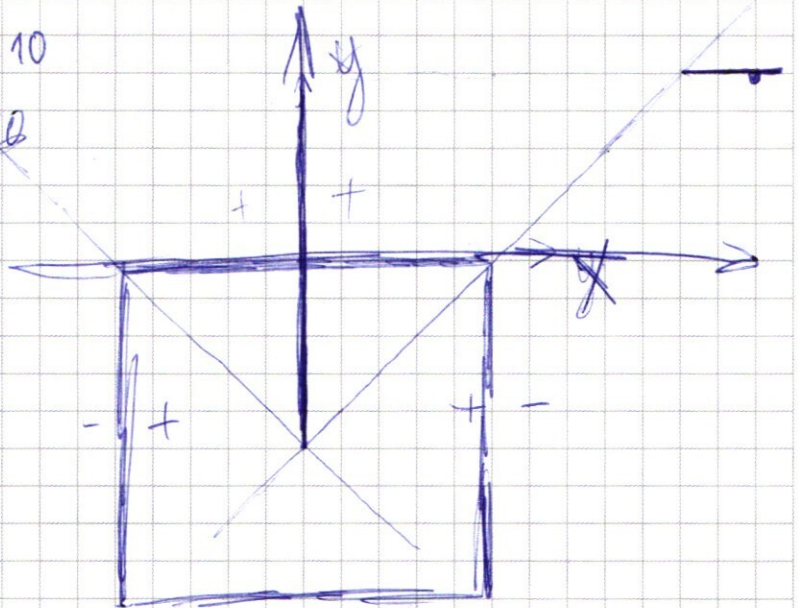
~~$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$~~

левая +, а $y \geq -x-5$

- , а $y < -x-5$

прав +, а $y \geq x-5$

- , а $y < x-5$



$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$

++ : $x+y+5+y-x+5=10$

$y=0$

+ - : $x+y+5-y+x-5=10$

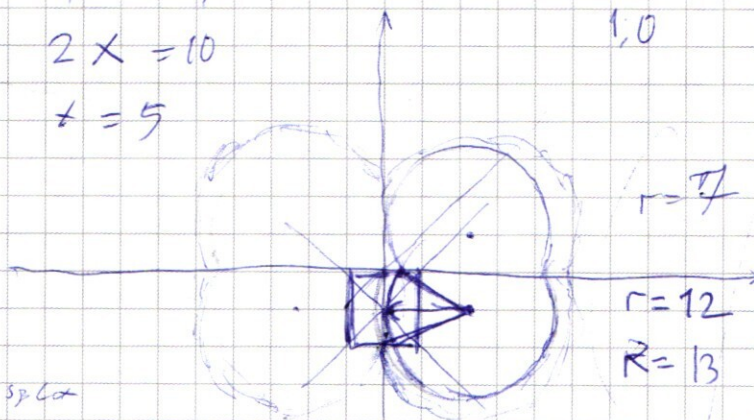
$a=144$

$2x=10$

$x=5$

$11^2 \times 5^2$

$C_8^4 \cdot C_4^3$



1,0

27.74

24

10.5

9.40

16

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

$\alpha + \beta = 9^\circ$

$\alpha - \beta = 5^\circ$

$\alpha = 7^\circ$

$\beta = 2^\circ$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

$\alpha = 7^\circ$

$\beta = 2^\circ$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 = 1$$

$$(y - 2x)(y + x) + 4(2x - y) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x) - 4(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$y = 2x$$

$$y = 4 - x$$

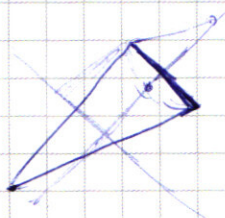
$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(16x^6)}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = 2^{\ln 2 - \ln x^6}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} = \frac{2^{\ln 2}}{2^{\ln x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2x \\ \alpha - \beta &= 2x - \frac{\pi}{4} \\ 2x &= 9x - \frac{\pi}{4} \\ \alpha &= \frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$



$$\sin \alpha + \cos \beta$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sqrt{2} \cos(2x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos x + \sin x)$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad 2 \sin 7x = \sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi \frac{k}{2}$$

$$\ln \frac{2}{x^6} = \ln 2 - \ln x^6$$

$$e^{\ln 2 - \ln x^6} = e^{\ln 2} \cdot e^{-\ln x^6}$$

$$\ln \frac{2}{32} = \log_2 \frac{2}{32} = \log_2 2 - \log_2 32$$

$$\sin(x + \beta) = \sin x \cos \beta + \cos x \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin(x + \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 9x \\ \alpha - \beta &= 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

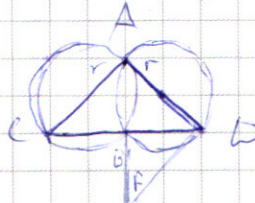
$$x + \beta = 9$$

$$\cos x + \cos 9x$$

$$\sin \alpha + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{4})$$



$$CF = ?$$



$$\alpha + \beta = 2x$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{2} - 2x = \frac{\pi}{4} \quad 2\beta = 4x - \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = 2x - \frac{\pi}{4}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 4x = \cos(9x - 5x) = \cos 9x \cdot \cos 5x + \sin 9x \cdot \sin 5x$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \cos 9x \cdot \cos 5x + \sin 9x \cdot \sin 5x + \sin 5x - \cos 5x$$

1 +

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 4x - 4y = 0$$

$$\cos^2 x = \cos x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

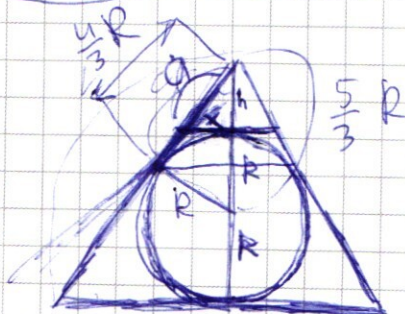
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{36} = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9}$$

$$\alpha + \beta = \frac{x+y}{2} \quad \alpha - \beta = \frac{x-y}{2}$$

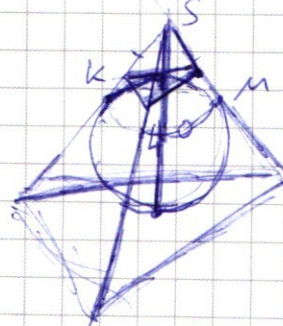
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right)$$



$$\cos \frac{9\pi}{20} - \cos \frac{5\pi}{20} + \frac{\sin 9\pi}{20} + \sin \frac{5\pi}{20} = \sqrt{2}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{h+2R}{4a}$$

$$4h = h + 2R \quad h = \frac{2R}{3}$$



$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10 \quad x = -5$$

$$\sin = \frac{R}{\left(\frac{5}{3}R\right)} = \frac{3}{5}$$

$$(\alpha = \arcsin \frac{3}{5})$$

$$\frac{2}{3}R = \frac{10}{15}R$$



$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\cos \frac{9\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{9\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{2} = \sqrt{2} \cos \frac{2\pi}{2}$$

$$9261/9$$

$$3, 9, 27$$

$$7, 49, 343$$

$$9 \overline{) 1029} 3$$

$$261 \overline{) 9} 343$$

$$26 \overline{) 12} 28$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$11 \overline{) 63} 69$$

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$C \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6}$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3$$

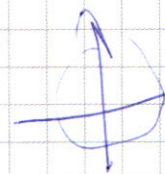
$$\left(-\frac{\pi}{20} \right), \left(\frac{\pi}{36} \right)$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$



$$\cos x + \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = 9x$$

$$\alpha - \beta = 4x$$

$$2\alpha = 13x$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha + \beta = 7x$$

$$\alpha - \beta = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\alpha - \beta = x$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - 2x$$

$$\beta = \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$5k = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}}$$

$$2\alpha = 9x - \frac{\pi}{4} \quad \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 9x\right) + \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\alpha = \frac{9x}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$2\beta = 5x + \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = \frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 9x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 9x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos 4x$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - 9x$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} - 5x$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - 14x$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - 7x$$

$$2\beta = -4x$$

$$\beta = -2x$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos(-2x) = \cos 4x$$

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x \right) \cos 2x = \cos 4x$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) \cdot \cos 2x = \cos 4x$$