

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 1.

$$7261 = 7^3 + 2^3$$

Ищем наименьшее число, произведение цифр которого равно 7261 может состоять из трёх 7, трёх 3 и двух 1. цифр из одной 9, одной 3, трёх 7 и трёх 1.

Найдём количество чисел, составленных из цифр для первого случая. 7 можно разместить в числе $\frac{8 \cdot 7}{2}$ способами, тогда разместим 3 будет $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}$ размещений, 4 займут оставшиеся места. Искомое число для цифр из первого случая будет $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 80 \cdot 4 = 560$

Найдём количество чисел, составленных из цифр для второго случая. 7 можно разместить 8 различными способами, 3 можно разместить 4 различными способами, 4 займут оставшиеся места. Искомое число для цифр из второго случая будет $8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 760 \cdot 4 = 7720$

Итого всего возможных чисел $560 + 7720 = 7680$

Ответ. 7680

$$1) (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \quad (1)$$

$$2) x^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

А) Исключим переменную (1):

$(x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$, так как для удобства логарифмирования
 $(x > 0, y > 0 \text{ и } \ln x \neq \ln y)$, поэтому применяем
 логарифмирование по основанию e

$$\ln(x^2 y)^{-\ln x} = \ln y^{\ln(y/x^2)}$$

$$-\ln x (2 \ln x + \ln y) = \ln y \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - \ln x \ln y = (\ln y)^2$$

$$-2 \ln^2 x - \ln x \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \ln y$$

$$\ln y - 2 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln y = \ln x \\ \ln y = 2 \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \\ x > 0 \end{cases}$$

Вернемся к системе

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \\ x^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 4x = 0 \\ x > 0 \\ y = x^2 \\ x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x > 0 \\ y = x^2 \\ x(x^3 - 2x^2 + x - 4) = 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \\ y=x \\ x=0 \\ x=2 \\ x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \\ y=x \\ x=2 \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \\ y=y \\ x=2 \\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

ответ $(2, 2), (2, 4), (\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2})$

или

$$(\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x) = 0$$

$$-2 \sin 4x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 2x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x + \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cos 2x + \sin 2x = 0$$

$$(\cos 2x + \sin 2x) / 2 \sin 4x - (\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x) = 0 \quad 1; 2$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) / \sin 4x - (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) / \sin 4x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sqrt{1/2} x \\ \sqrt{1/2} x - \frac{\sqrt{11}}{2} = 0 \\ \sqrt{1/2} x + \frac{\sqrt{11}}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \frac{5}{2} x - \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{9}{2} x + \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2} + \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\sqrt{11}}{9} + \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5}{2} x = \frac{\sqrt{11}}{2} + \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{9}{2} x = \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{11}}{9} + \frac{\sqrt{11} n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\sqrt{11}}{5} + \frac{2}{5} \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{9} \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Итак, $x = \frac{\sqrt{11}}{9} + \frac{\sqrt{11} n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\sqrt{11}}{5} + \frac{2}{5} \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{9} \sqrt{11} n, n \in \mathbb{Z}$$

или

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1) \\ (|x|-1)^2 + (|y|-5)^2 = 25 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим случаи (1), формулы (2) и (3)

$$\begin{cases} y \geq -5 \\ x \geq y+5 \\ x+y+5 + x-y-5 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -5 \\ y \leq x-5 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -5 \\ -(y+5) \leq x \leq y+5 \\ x+y+5 + y-x-5 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -5 \\ y \geq x-5 \\ y \leq x-5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -5 \\ x \leq -(y+5) \\ -x-y-5 + y-x+5 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -5 \\ y \leq -x-5 \\ x = -5 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y < -5 \\ x \geq -(y+5) \\ y+y+5+x-y-5=70 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y < -5 \\ y \geq -x-5 \\ x=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 5 \\ y+5 < x < -(y+5) \\ -y+5-x+x-y-5=10 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

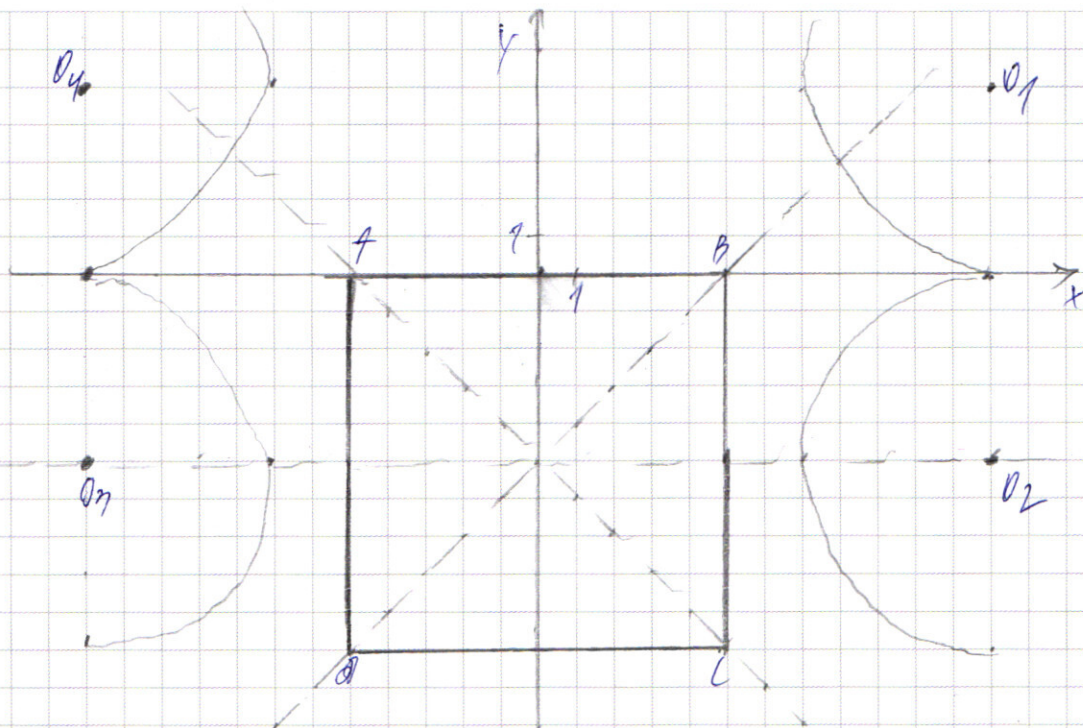
$$\begin{cases} y < -5 \\ y < x-5 \\ y < -x-5 \\ x=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -5 \\ x < -(y+5) \\ -y-5-x-x+y+5=00 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} y < 5 \\ y \geq x-5 \\ x=-5 \end{cases}$$

Графиком системы (2) будут являться четыре точки (центры тяжести) $O_1(72, 5)$, $O_2(72, -5)$, $O_3(-72, 5)$ и $O_4(-72, -5)$. Построим в азимутальной (полярной) системе координат ρ, α , построим в этой системе координат график этих уравнений.



Выяснить что график функции $y = \frac{1}{x}$ является кривой
 с центром в точке $(0;0)$, график функции
 симметричен относительно O_x и график
 функции $y = \frac{1}{x^2}$ симметричен относительно O_y .
~~Таким образом как и у функции $y = \frac{1}{x}$ все пересечения~~
~~в одной точке, следовательно будет иметь четное~~
~~число решений, потому что каждая точка~~
~~числа точек, в правой части будет одна точка~~
~~в левой части, следовательно, необходимо учесть~~
 и для каждой переменной необходимо отдельно учесть
 количество корней каждой переменной.

Рассмотрим если в уравнении $x^2 + y^2 = 1$ центр
 O_2 касается стороны BC и окружности (фигуры)
 O_1 не касается квадрата и сама окружность
 (центр O_1 содержит точку D , а окружность C
 касается O_2 не пересекает квадрат.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Координаты точек $A(1, 0)$, $B(5, 10)$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{16 + 100} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{116} = \sqrt{a^2}$$

Координаты точек $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $P(-5, -10)$

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{(-5 - 12)^2 + (-10 - 5)^2} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{(-17)^2 + (-15)^2} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{289 + 225} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{16} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{116} = \sqrt{a^2}$$

$$a = 17^2 + 15^2$$

$$a = 17^2 + 25$$

$$\sqrt{a^2} = 49$$

$$\sqrt{a^2} = 514$$

Находим при $a = 49$ и при $a = 514$ итерации ищем
ребро 2 решения.

ответ. при $a = 49$ и $a = 514$

5-10

50=

X-12 Y-15

-152 -115

14

14

119

146

209

225

451

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$326 \overline{) 13}$
 $3 \overline{) 84} 3$
 $7 \overline{) 029} 3$
 $3 \overline{) 43} 14$
 $4 \overline{) 4} 1$

$3 \text{ no } 4$
 $3 \text{ no } 3$
 $2 \text{ no } 1$

$3 \text{ no } 4$
 $7 \text{ no } 6$
 $7 \text{ no } 3$
 $3 \text{ no } 1$

$$\text{Answer; sum 1} \quad \frac{2.4}{2} \quad \text{sum 3} \quad \frac{6.5.4}{6!} \quad \text{sum}$$

[illegible]

$$\begin{aligned} 1003x - 1015x - \sqrt{2}1004x + \sqrt{2}1014x - \sqrt{2}1014x &= 0 \\ -2\sqrt{2}1014x + \sqrt{2}1014x + 2\sqrt{2}1014x + 1002x - \sqrt{2}1004x &= 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{r} 3 \quad 35 \quad 27 \\ 5 \end{array}$$

$$2\sqrt{10}x + (10\sqrt{2}x - \sqrt{12}x) - \sqrt{2}(10\sqrt{2}x) = 0$$

$$L_{\text{opt}2x} = \frac{1 + 10\sqrt{4x}}{2} \quad \frac{1 - 10\sqrt{4x}}{2} \quad t^2 = 1 - 2\sqrt{10x + 100x^2}$$

$$\begin{aligned} \beta \sin 4x \cos 2x - \cos 2x &= \frac{\sin 4x}{\cos 2x} \\ \sin 3x + \sin 4x &= \frac{\sin 4x}{\cos 2x} \end{aligned}$$

$$(x^2 y)' = -\ln x \quad \ln(x^2/x^2)$$

$$\cancel{4x^2 - 4xy - 2x^2 + 4x - 4x} \quad \cancel{4x^2 - 2x^2} - 2(x - 2) = 4 + xy$$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln x) = (\ln x + 4\ln x) \ln x$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x = 12x - 2 \ln x \quad \ln y = \ln x$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln y = 2 \ln x$$

135

$$\text{given } y=x$$

$$x^2 - x - 2x^2 + 2x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 9x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 2 \\ 2x &= 2 \end{aligned}$$

$$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 4x = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x^2 + 2x = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 0 = 0$$

$$+24 - 9 + 10 + 2$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$x^0 - \ln x$$

$$x^2 \ln(x^5)$$

$$2b - \ln 2$$

$$-\ln 2 = b$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 2 & x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 4 \\ \hline x^2 - 6x & \\ x^2 - 2x & \\ \hline -4x + 2 & \\ -4x + 8 & \\ \hline -6 & \end{array}$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 2$$

$$0 - 4 - 2 + 2$$

$$-64 = 76 + 24 + 2$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

(3)

x > 0

$$x + y + x + y = 10$$

$$x > x \quad x > 0$$

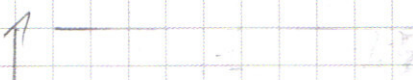
$$y = x + x + y = 10$$

$$x = 5$$

x < x

$$x = 5$$

$$x + y + x - y =$$



$$x + 5 <$$

$$x + 5 > 0$$

$$x > x + 5 \quad y < x - 5$$

$$x + y + 5 - 5 - x + x = 10$$

$$x = 5$$

$$x < x + 5 \quad x > x - 5$$

$$x > x - 5 \quad x > x - 5$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$x = 0$$

$$x < x - 5$$

$$-5 - y - x + y - x + 5 = 10$$

$$x = -5$$

01 - minimum

02 - maximum

03 - maximum

04 - maximum