

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

- ✓ имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

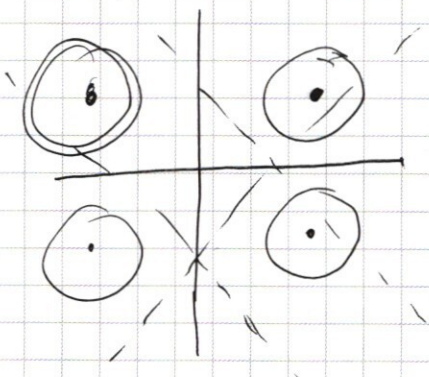
$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 129 \\ \underline{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 28} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$CF^2 = BD^2 + BC^2$$



$$\begin{array}{r} 7 \cdot 7 \cdot 7 = \\ 6 \\ 49 \\ \cdot 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 343 \\ \cdot 7 \\ \hline 2401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \cdot 27 \\ \hline 2401 \\ + 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\frac{BC}{BF} = n = \frac{BC}{BD}$$

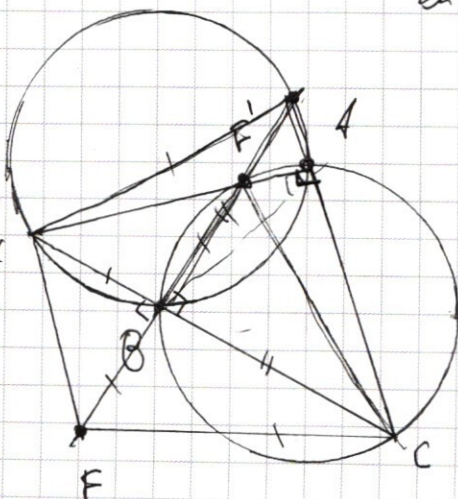
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$x + y > 5$$

$$y - x > -5$$

$$y > -5 + x$$



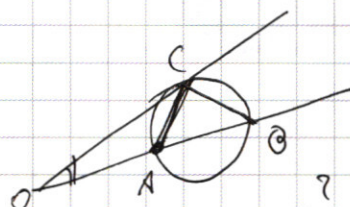
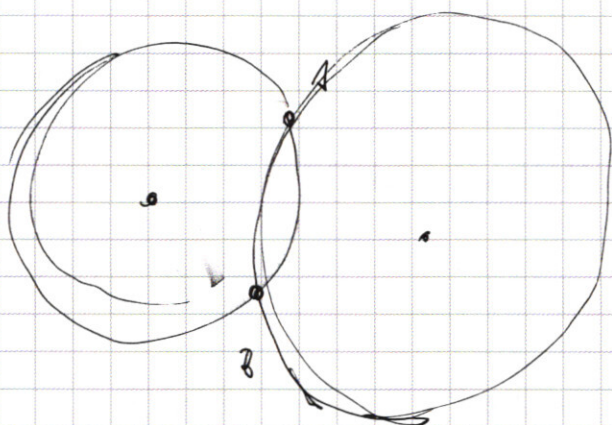
$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3} + \frac{8 \cdot 7}{3} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 4 + 8 \cdot 7 \cdot 4$$

$$\begin{aligned} & 8 \cdot 7 \left(\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3} \right) = \\ & = 8 \cdot 7 \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{3} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 8 \cdot 7 (5 \cdot 4 \cdot 3) = \\ & = 56 \cdot 60 = 3360 \end{aligned}$$

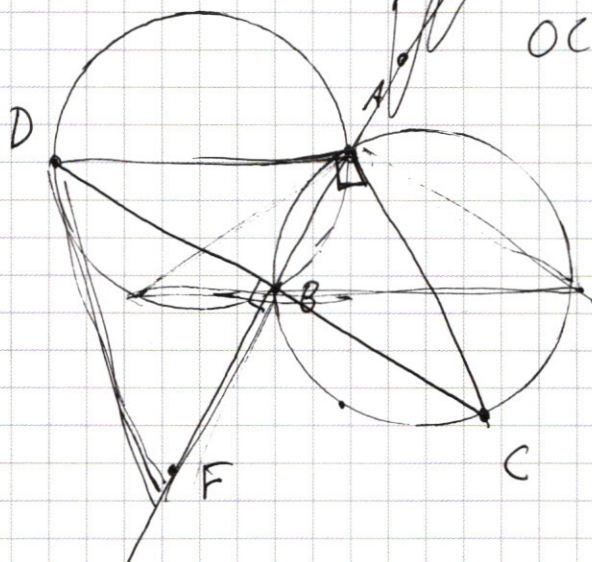
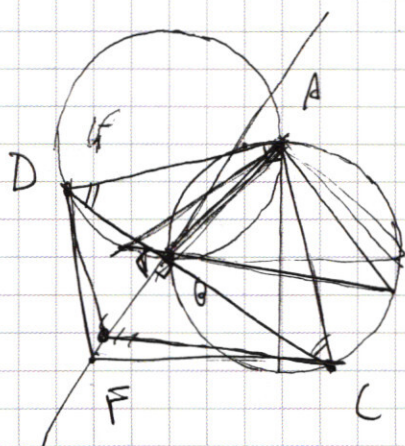
$$\begin{array}{r} 56 \\ \cdot 60 \\ \hline 3360 \end{array}$$



$$OC^2 = OA \cdot OB$$

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC}$$

$$OC^2 =$$



$$CF = \sqrt{BD^2 + BC^2}$$

$$AD^2 = \dots$$

$$AD^2 = DB \cdot DC$$

$$AC^2 = AC^2 + AD^2 = CD^2$$

$$AC^2 + BC^2 - \sqrt{2} AC \cdot BC = \dots$$

$$AD^2 + BD^2 - \sqrt{2} AD \cdot BD = \sqrt{2} \cdot 10$$

$$BC^2 + BD^2 + CD^2 - \sqrt{2} CD \cdot BC = \sqrt{2} \cdot 10$$

$$CF^2 + CD^2 - \sqrt{2} AC \cdot CD = \sqrt{2} \cdot 10$$

$$CF^2 =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Разложим 9261 на простые множители:

$$9261 : 9 \Rightarrow 9261 = 3 \cdot 3 \cdot 1019 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = \\ = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

То есть простые числа могут состоять либо из набора цифр $\{3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1\}$, либо из набора цифр $\{9; 3; 7; 7; 7; 1; 1; 1\}$.

В первом случае возможно тройки расставить

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3}$ способами, а также $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3}$ способами, а единицы займут оставшиеся места. Тогда

$$C_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{9}$$

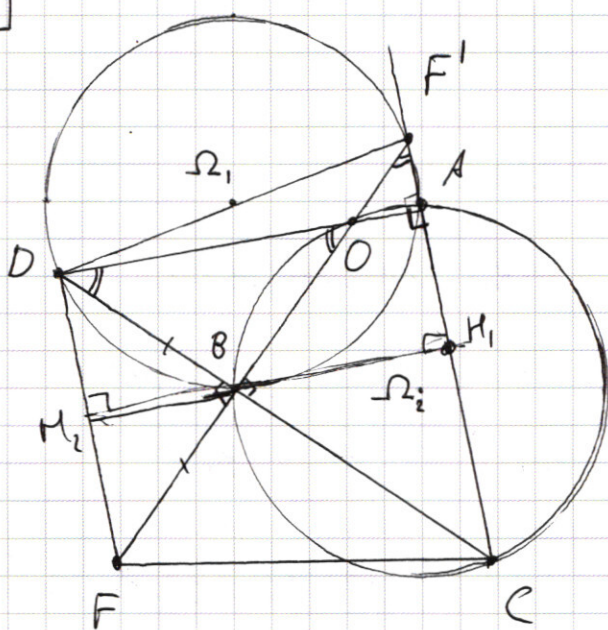
Во втором случае можно 8 способами, на оставшиеся места тройку 7 м.; на оставшиеся а также $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3}$ м.; на оставшиеся единицы:

$$C_2 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3}$$

тогда всего способов составить такое восьмизначное число:

$$C = C_1 + C_2 = 8 \cdot 7 (2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 4) = 2240 + 4480 \\ \text{Ответ: } 4480$$

6



Дано:

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$B \in CD \quad R = 10$$

$$BF = BD$$

$$BF \perp CD$$

$$CF = ?$$

Решение.

$$\text{Пусть } F' = FB \cap \Omega_1;$$

$$O = BF' \cap AD.$$

$$\angle AB = \angle BF'A = \angle BCA \quad (\text{от } \angle \text{ вписанн. в } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2 \text{ от отраженных равных дуг})$$

$$\angle AB(\Omega_1) = \angle AB(\Omega_2), \text{ так как } \Omega_1 = \Omega_2 \quad \left\{ \triangle ABO_1 = \triangle ABO_2 \Rightarrow \angle ABO_1 = \angle ABO_2 \right\}$$

$$\angle ADB = \angle ACB \Rightarrow \triangle ACD - \text{равноб.} \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ODB = 45^\circ \\ \angle OBD = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle BOD = \angle AOF' = 45^\circ \quad (180^\circ - 90^\circ - 45^\circ)$$

вертикаль

$$\left. \begin{array}{l} \angle BF'A = 45^\circ \\ \angle F'OA = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle OAF' = (180^\circ - 45^\circ - 45^\circ) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle F'AC = \angle F'AO + \angle CAD = 180^\circ \Rightarrow F' \in AC.$$

$$\angle CF'B = \angle BCF' = 45^\circ \Rightarrow \triangle BCF' - \text{равноб.} \Rightarrow BF' = CB$$

$$\left. \begin{array}{l} BF' = CB \\ BD = BF \\ \angle F'BD = \angle FBC \text{ (вертикаль)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BF'D = \triangle FCB \Rightarrow FC = F'D.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим сечение фигуры плоскостью

SOL :

видно, что $SP_2 = SP_1 + 2R$

$$2R = (k-1)SP_1$$

$$R = \frac{3}{2}SP_1$$

$$SO = SP_1 + R = \frac{5}{2}R$$

$$SL^2 = SO^2 - OL^2 = \frac{25}{4}R^2 - \frac{4}{4}R^2 = \frac{21}{4}R^2$$

$$SL = \sqrt{\frac{21}{4}}R$$

$$\angle SLH = \angle SHL = 90^\circ; \angle LSH = \angle OSL$$

$$\triangle SLH \sim \triangle SLO \Rightarrow$$

$$\frac{SH}{SL} = \frac{SL}{SO} = SH = \frac{SL^2}{SO} = \frac{\frac{21}{4}R^2}{\frac{5}{2}R} = \frac{21}{10}R$$

$$KLM \parallel \pi_1, \parallel \pi_2 \Rightarrow$$

$$\text{Пусть } KLM \cap S_a = A$$

$$KLM \cap S_b = B$$

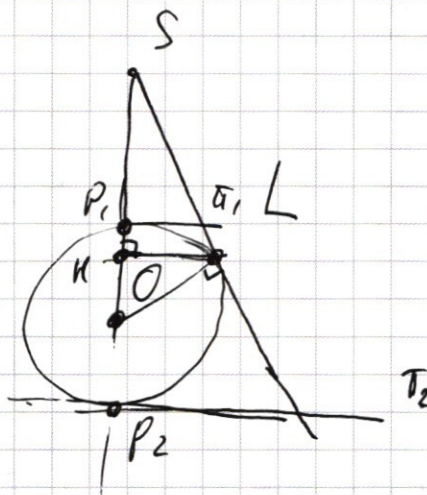
$$KLM \cap S_c = C$$

$$ABC \sim G \sim Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{SH}{SP_1}\right)^2 \cdot S_1 =$$

$$= \left(\frac{21}{10} : \frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

Ответ: $\frac{49}{25}$

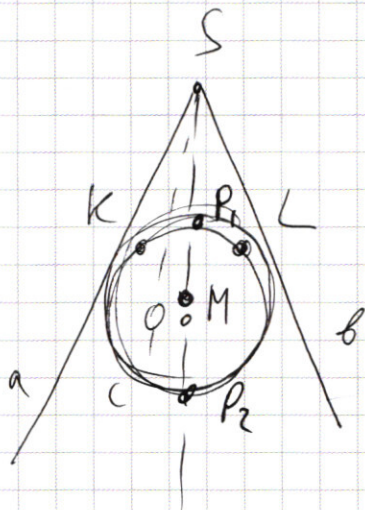


Пусто $LH \perp SO$

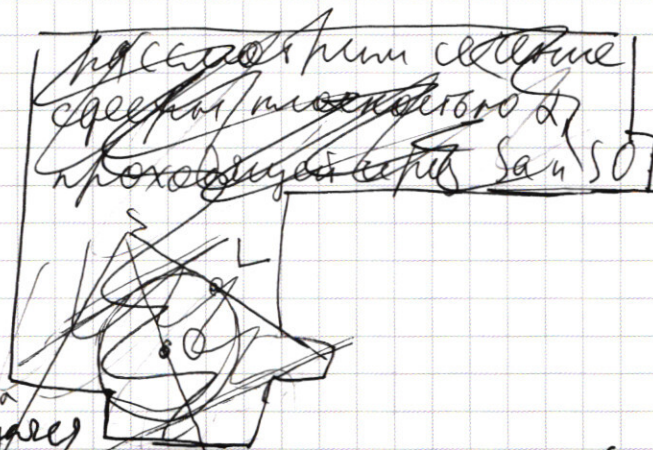
тогда $LH \parallel \pi_1 \Rightarrow LH \in KLM$
 $L \in LH$

Обер: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; k \in \mathbb{Z};$
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}; m \in \mathbb{Z}.$

4)



пусть трехгранный
угол образован лучами
 $Sa; Sb; Sc.$



Пусть π_1 - первая плоскость, касающаяся
сферы в точке P_1 и перпендикулярная SO . Площадь сечения угла $\pi_1 = S_1$,
 π_2 - вторая плоскость, касающаяся сферы в точке P_2
 и перпендикулярная SO . Площадь сечения угла $\pi_2 = S_2$
 тогда трехгранный G и Q , ~~отсюда~~ образующие

данным углом π_1 и π_2 соответственно,
 подобны, поскольку $\pi_1 \parallel \pi_2$, ведь $\pi_1 \perp OS; \pi_2 \perp OS$
 коэффициент подобия $k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = 4$. тогда соответствующие

SP_1 и SP_2 относятся как k : $SP_1 = \frac{SP_2}{4}$

таким образом $OKML$ - равнобедренный ($OK = OM = OL = R$)

$\angle KLM \perp OS \Rightarrow KLM \parallel \pi_1 \parallel \pi_2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0; \text{ но } 0 \nmid x \neq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x^3 - x^2 - 6x + 8) : (x - 2) = x^2 + x - 4$$

$$\Downarrow \\ (x^3 - x^2 - 6x + 8) = (x^2 + x - 4)(x - 2)$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ но } 0 \nmid x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2; y = 4 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}; y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 4); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$$

$$2) \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0 \parallel$$

по формулам
суммы $\cos$ и
разности $\sin$

$$\cancel{2 \sin 5x} - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

воспользуемся формулой двойного угла.

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - (\sqrt{2})^2 \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cancel{(\cos 2x - \sin 2x)}$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 7x - 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$9x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{5}; m \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle F'BD$ - вписанный; $\angle DBF' = 90^\circ \Rightarrow DF'$ - диаметр,
 $\Rightarrow FC = F'D = 2R = 20$.

$$S_{ACF} = \frac{AD \cdot AC}{2}$$

Пусто h_2 - высота $\triangle FDB$
 h_1 - высота $\triangle F'BC$

$$\angle FDC = \angle F'CD \Rightarrow F'C \parallel DF$$

$$S_{ACF} = \frac{AD \cdot AC}{2} = \frac{h_1 h_2 \cdot AC}{2}$$

$$= \frac{h_1 h_2 \cdot (F'C - AD)}{2} = \frac{h_1 h_2 (h_1 + h_2) \cdot (F'C - (AD - OD))}{2}$$

$$OD = \sqrt{2} \cdot OB \text{ (} \triangle OBD \text{ - равнобедренный)} = 16\sqrt{2}$$

$$h_2 = \frac{OB}{\sqrt{2}}$$

$$h_1 = \frac{CB}{\sqrt{2}} \quad AD = h_1 h_2$$

$$BD = \sqrt{BF'^2 - BF'^2} = 16$$

$$h_1 h_2 = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

$$F'C = \sqrt{2} \cdot BC = 12\sqrt{2}$$

$$S = \frac{10\sqrt{2} \cdot (16\sqrt{2} - 12\sqrt{2} - (10\sqrt{2} - 16\sqrt{2}))}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 18\sqrt{2}}{2} = 180$$

Ответ: а) $FC = 20$, б) $S_{ACF} = 180$.

$$3) \begin{cases} (x^2 \cdot y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; \frac{y}{x^2} > 0 \Rightarrow x > 0, y > 0$$

упрощения / возведение:

$$\frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}}$$

(по св.лам степеней и логарифмов)

$$\frac{y^{2\ln x}}{y^{4\ln x} \cdot x^{2\ln x}} = y^{\ln y} \cdot \frac{y^{2\ln x}}{x^{2\ln x}} = y^{\ln y}$$

$$\frac{y^{2\ln x}}{x^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x}} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{2\ln x} = y^{\ln y - \ln x}$$

т.к. $\frac{y}{x} > 0$ и $y > 0$, прологарифмируем обе части по натуральному основанию

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right)^{2\ln x} = \ln y^{\ln \frac{y}{x}}; \quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) \cdot 2\ln x = \ln y \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} y = x \quad (x \neq 0) \\ y = x^2 \quad (y \neq 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \quad (x \neq 0) \\ y = x^2 \quad (y \neq 0) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

или $y = x$

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0; y = 0 \text{ (не по ОДЗ)} \\ y = 2; y = 2 \end{cases}$$

или $y = x^2$

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x^4 - x^5 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \end{cases}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

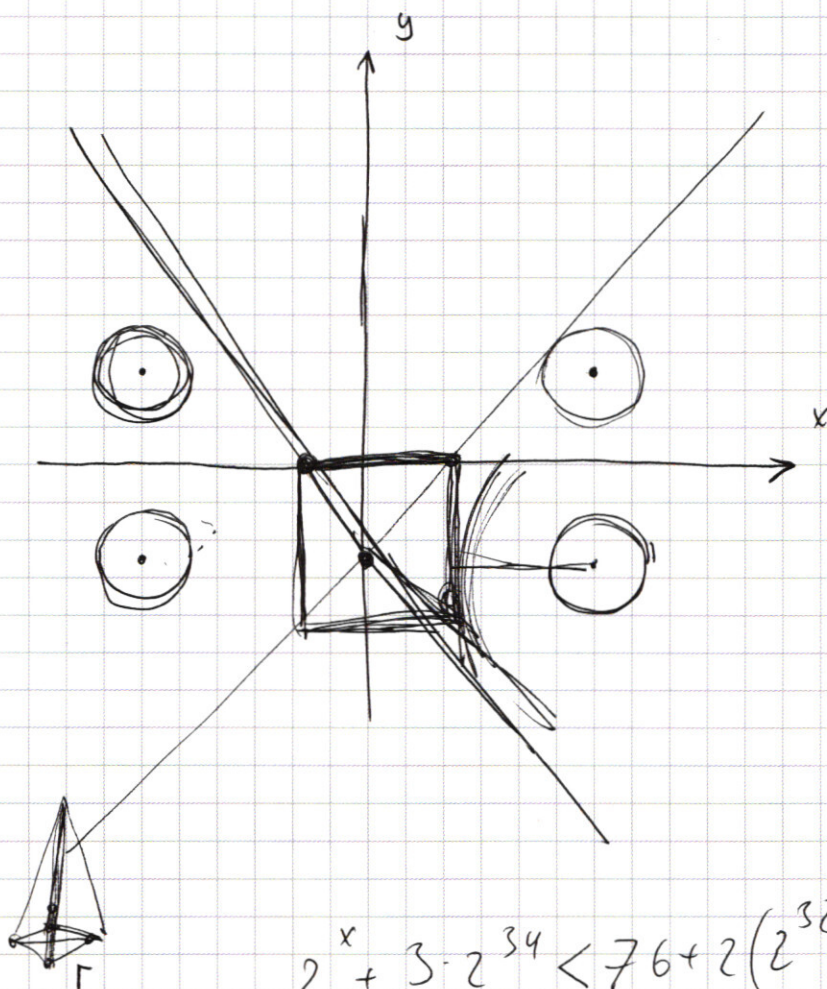


☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



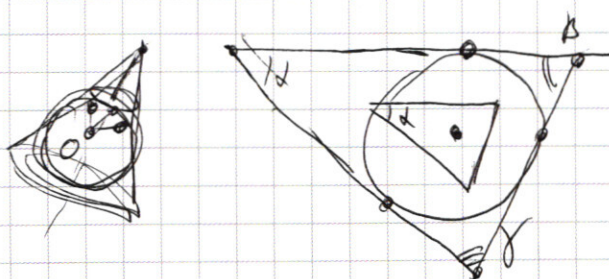
$$y - x + 5 - x - y - 5 = 0$$

$$-2x = 10$$

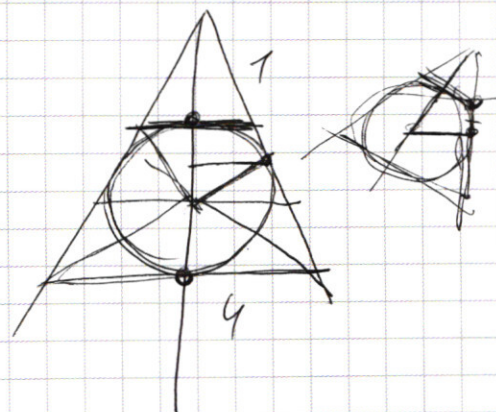
$$x = -5$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^x - (2^{33} - 2)x - 3$$



а, б



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5) \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

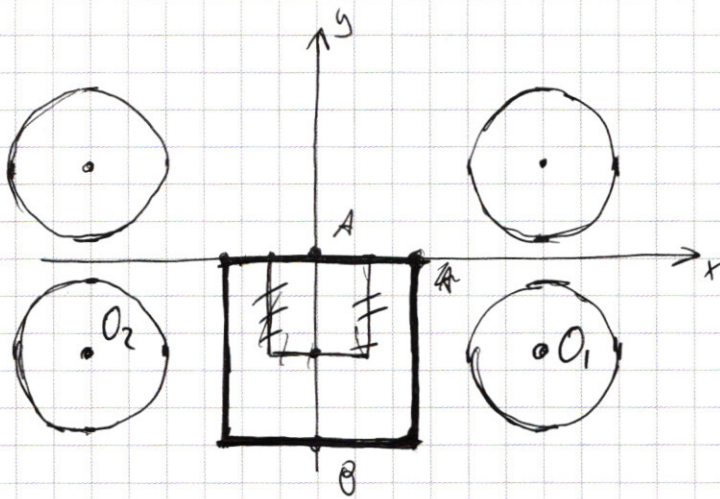
Второе ~~Первое~~ уравнение задает
4 окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и ~~тем~~ центрами
в точках $(12; 5), (-12; 5), (-12; -5), (12; -5)$.
Они существуют как да в своей координатной
четверти (только в своей).

Второе же при $(x+y+5) > 0$ и $(y-x+5) > 0$
задает $y = 0$

при $(x+y+5) < 0$ и $(y-x+5) > 0$
задает $x = -5$

при $(x+y+5) > 0$ и $(y-x+5) < 0$
задает $x = 5$

при $(x+y+5) < 0$ и $(y-x+5) < 0$
задает $y = -5; 10$



может иметь два решения, когда

- внутренние окружности касаются квадрата внешним образом.

тогда $\sqrt{a} = 12 - 5 = 7 \Rightarrow a = 49$

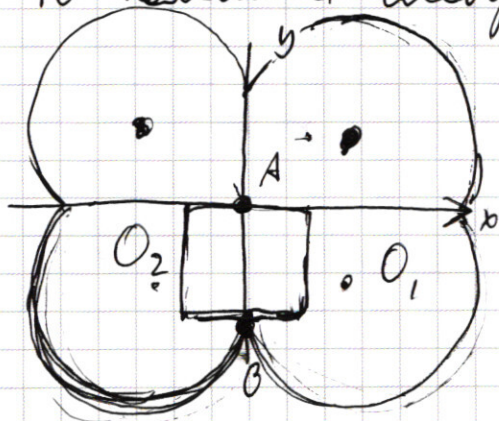
~~- внутренние окружности касаются по сторонам A, B~~

это возможно, т.к.

$r(O_1A) + r(O_2B) = r(O_1A) = r(O_2B)$ тогда $\sqrt{a} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \Rightarrow a = 169$

~~Ответ: $a = 49, 169$.~~

- Если заметить, что $r(O_1A) = r(O_2B) = r(O_1B) = r(O_2A)$, то получится следующее решение:



$$\sqrt{a} = r(O_1A) = r(O_2B) = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} \Rightarrow a = 169.$$

Во всех случаях существует решение или 0.

Ответ: $a = 49, 169$.