МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(a^x)' = a = (e^{\log_e a \cdot x})' = e^{\log_e a \cdot x} \cdot \log_e a =$
$= \ln a \cdot a^x$

$2^x = \log_e 2 = e^{\log_e 2} = 2$

$2^{x \log_e 2} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$

$x \log 2 = 1$

$x = \frac{1}{\lg 2}$

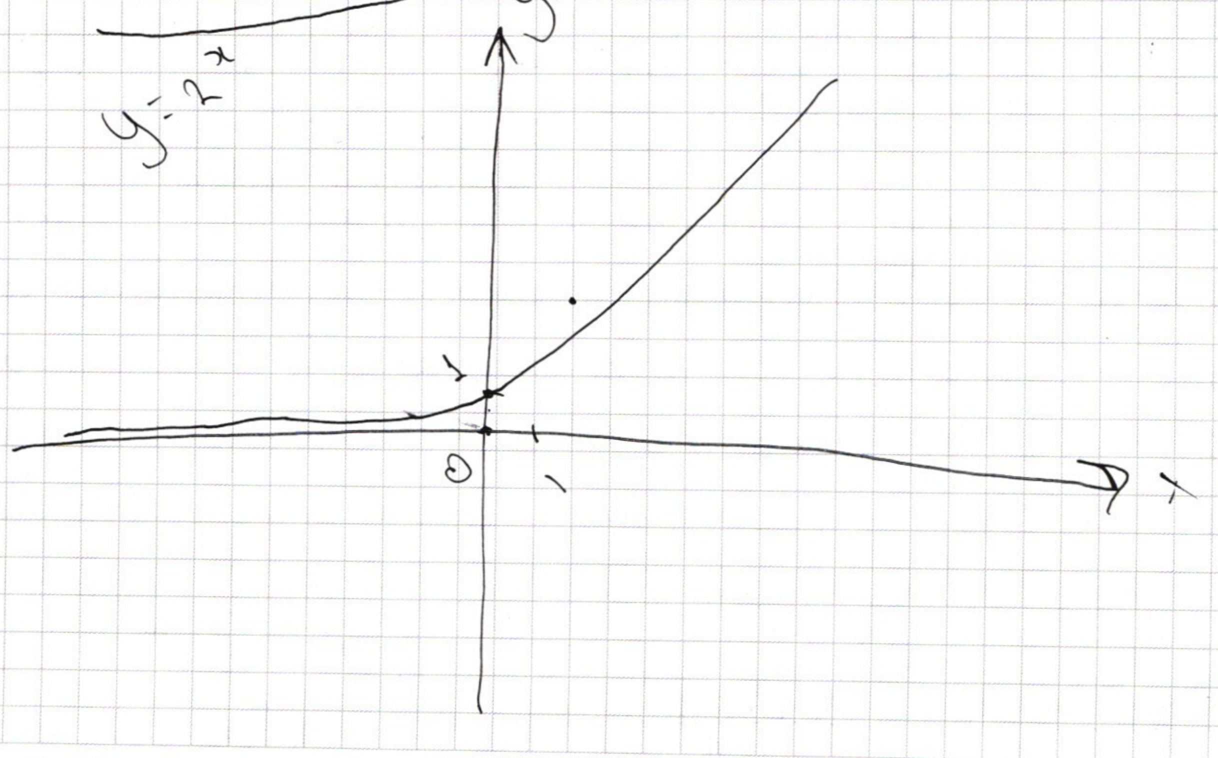
$1 \cdot \frac{1}{\lg 2}$

$\frac{\log_e(\log_e 2)}{\log_2 \frac{1}{\log_2 e}} = \log_2 1 = 0$

$\log_2(\log_2 e)$

$\frac{2^1}{2^{\frac{1}{\lg 2}} = \log_2 e} = \frac{2}{e} + 5 \cdot 2^{33} + 2 - 2 \cdot \frac{1}{\ln 2} - 76 =$

$\frac{2}{e} + 5 \cdot 2^{33} +$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№1

$9261 = 7^3 \cdot 3^3$. Получается, что наше восьмизначное число точно состоит из трёх семёрок (мы не можем взять $7 \cdot x$, т.к. $7 \cdot 2$ уже > 9) и либо трёх троек и двух нулей, либо девятки, тройки и трёх нулей. Домножить тройку на что-то ещё, кроме одной тройки нельзя, т.к. $3 \cdot 4 > 9$.

I случай: три семёрки, три тройки и два нуля. Сначала выбираем 3 места из восьми (там будут стоять наши семёрки), а затем 3 места из оставшихся пяти (там будут находиться тройки). На оставшиеся места ставим нули. В этом случае может получиться так, что ноль стоит на первой ~~или первой и второй~~ позиции, что нам не подходит, поэтому вычитаем эти случаи:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 - C_7^3 \cdot C_4^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} - \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} \cdot \frac{4}{1} = 560 - 140 = 420$$

II случай: три семёрки, девятка, тройка ~~три тройки~~ и ~~два~~ 3 нуля. Теперь мы выбираем 3 места из восьми, затем ещё 3 места из 5 для нулей и домножаем на 2, ~~чтобы~~ так как для каждого такого случая 9 и 3 можно поменять местами. Также вычитаем случаи, когда 0 первый.

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 - C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_7^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5! \cdot 2}{3! \cdot 2!} - \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 1120 - 210 = 910$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Sigma = 420 + 910 = 1330$

Ответ: 1330 чисел

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x = 0 \,|:2$

$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$\sin 7x\cdot(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = 0 \\ \sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ 2\cdot\sin \cancel{\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}} \left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{array}\right.$ $k, n, l \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n \\ \frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi l \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi l \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi l$, $k, n, l \in \mathbb{Z}$

№3

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) ~~ОДЗ: $x>0$, $\frac{y}{x^7}>0$~~, y Заметим, что $x>0$, т.к. $\exists \ln x$, $y>0$, т.к. $\exists \ln\left(\frac{y}{x^7}\right)$ и $x>0$. *

$x = e^{\log_e x}$, $y = e^{\log_e y}$

$(e^{2\log_e x} \cdot e^{4\log_e y})^{-\log_e x} = e^{\log_e y \cdot (\log_e y - \log_e x^7)}$

$e^{(2\log_e x + 4\log_e y)\cdot -\log_e x} = e^{\log_e y(\log_e y - 7\log_e x)}$

$\log_e x = t$, $\log_e y = a$

$-t(2\cdot t + 4\cdot a) = a\cdot(a - 7t)$

$-2t^2 - 4at = a^2 - 7at$

$a^2 - 3at + 2t^2 = 0$

$D = 9t^2 - 8t^2 = t^2$

I случай. $t = 0 \Rightarrow$

$\log_e x = 0 \Rightarrow x = 1, \Rightarrow a = 0 \Rightarrow y = 1$ ~~тогда~~

(2): $1 - 1 - 2 + 8 - 4 \neq 0 \Rightarrow$ не подходит

II случай. $t \neq 0 \Rightarrow$

$a_1 = \frac{3t+t}{2} = 2t \qquad a_2 = \frac{3t-t}{2} = t$

II.1 $a_1 = 2t$

$\log_e y = \log_e x^2 \Leftrightarrow y = x^2$

(2): $x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ (т.к. $x > 0$, из-за *, то): $|:x$

$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$

$x = 2$ - корень $\Rightarrow y = 4$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & x^2 + x - 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \\ -\ \underline{x^2 - 2x} \qquad & \\ -4x + 8 & \\ -\ \underline{-4x + 8} & \\ 0 & \end{array}$$

$x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$x_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} > 0$ (подх.) $\Rightarrow y = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{2}$

$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$ (не подх.)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II. 2. $a_2 = t$

$\log_e y = \log_e x \Leftrightarrow x = y$

(2): $x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$

$x^2 - 2x = 0$, т.к. $x > 0$ из-за *, то

$x = 2 \Rightarrow y = 2$ (подх.)

Ответ: $(2;2)$; $(2;4)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{18-2\sqrt{17}}{2}\right)$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Решаем графически:

(1): $|x+y+5| + |x-y-5| = 10$

1. $\begin{cases} x \geq -y-5 \\ x \geq y+5 \end{cases} \Rightarrow x = 5$

2. $\begin{cases} x \geq -y-5 \\ x \leq y+5 \end{cases} \Rightarrow y = 0$

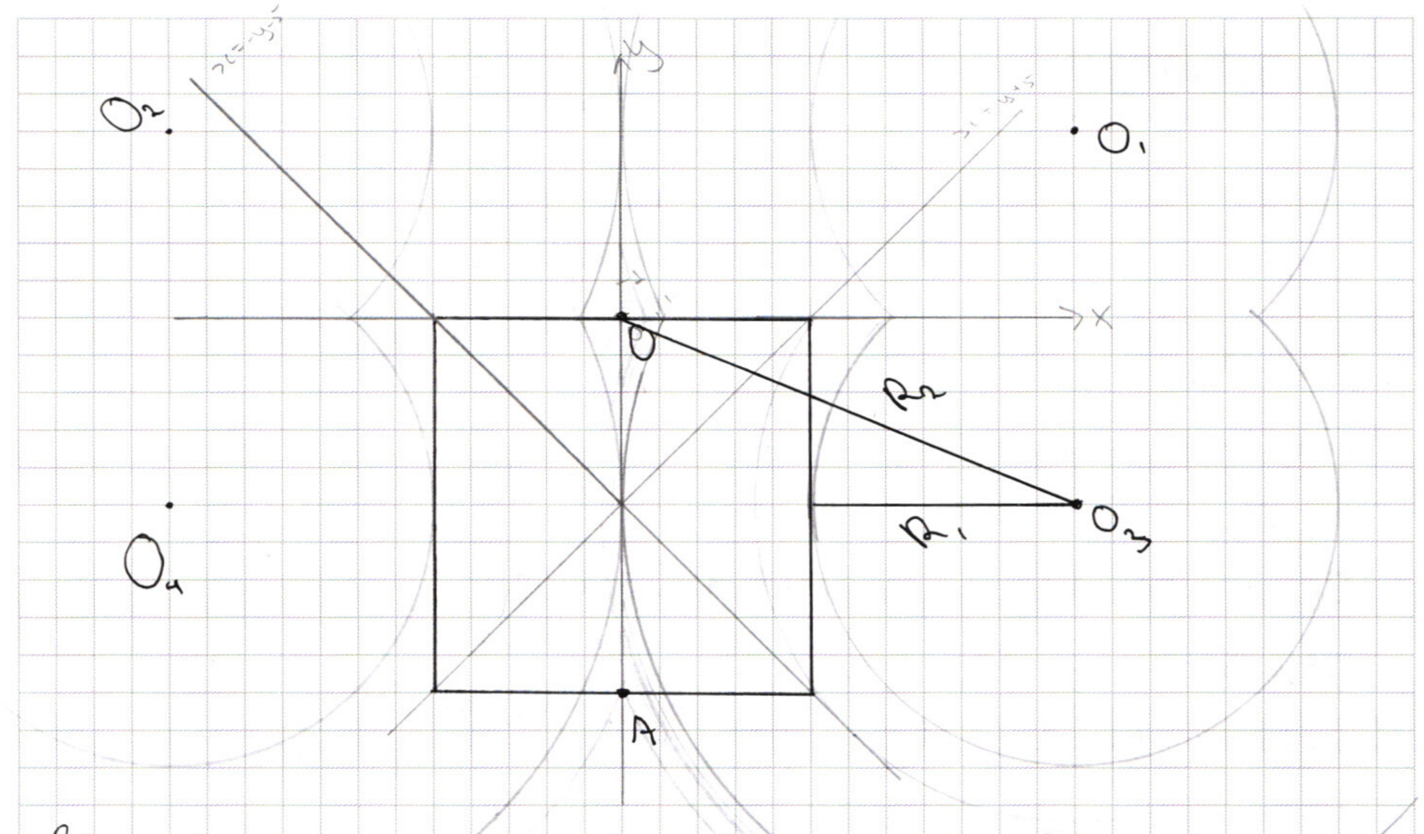
3. $\begin{cases} x \leq -y-5 \\ x \geq y+5 \end{cases} \Rightarrow y = -10$

4. $\begin{cases} x \leq -y-5 \\ x \leq y+5 \end{cases} \Rightarrow x = -5$

Получается квадрат

(2) Рисуем в I четверти. Рассматриваем $a > 0$, т.к. если $a < 0$ то (2) не имеет решений
часть окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и центром $(12;5)$
И симметрично отражаем относительно OX, а потом OY.

Заметим, что если часть окружности с центром O_3 пересекает квадрат, то часть окружности с центром O_4 пересекает этот квадрат



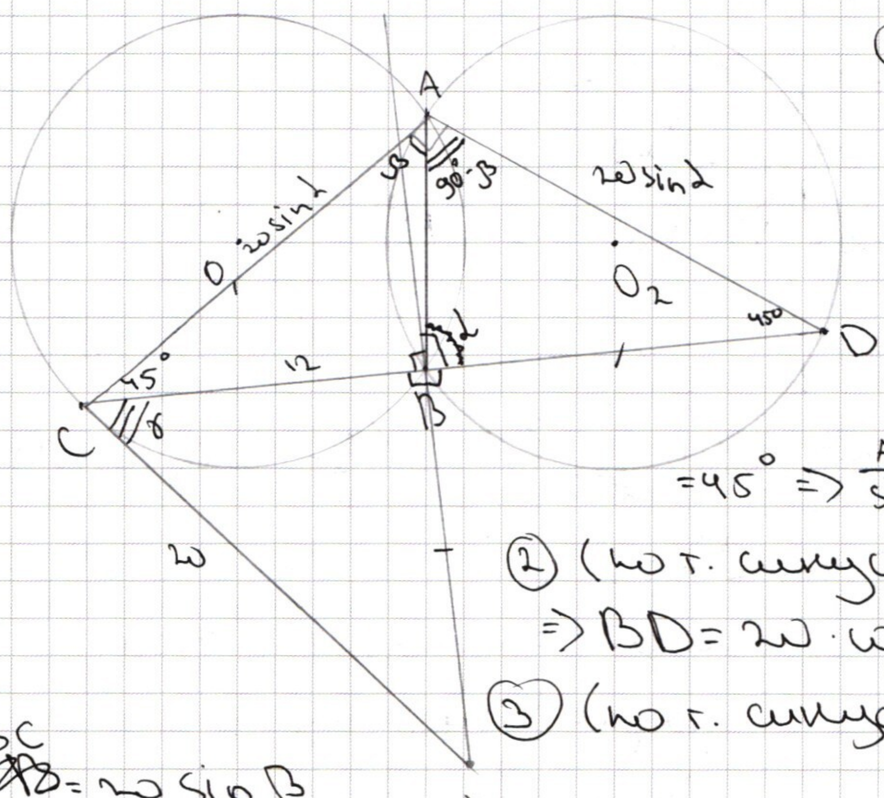
в симметричных относительно OY точках. Первый раз ровно два решения будут, когда O_3 ~~и~~ O_4 касается стороны квадрата $\Rightarrow$ $R_1 = 12 - 5 = 7 \Rightarrow a = 49$. Потом как видно из картинки только O_3 начнёт пересекать квадрат дважды, а следовательно и O_4, когда R станет $= 12$ ~~то~~ части окружностей коснуться друг друга и точек пересечения ~~стан~~ будет 4, далее их будет продолжать оставаться 4, пока R не станет равен $R_2 =$ $= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \Rightarrow a = 169$. В этом случае у системы будет 2 решения: т. A и т. O, т.к. $(0; 0)$ подходит в $(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169$. Далее когда радиус больше R_2, то точек пересечения, а следовательно корней нет.

Ответ: 49 и 169

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



(1) ~~в $\triangle$ACD~~ (по т. синусов): $\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow$ $AD = 20\sin\alpha$, $\frac{AC}{\sin(180°-\alpha)} = 2R \Rightarrow$ $AC = 20\cdot\sin\alpha \Rightarrow$ $\triangle CAD$ - р/б $\Rightarrow \angle ADC = 45° \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45°} = 2R \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}$

(2) (по т. синусов): $\frac{BD}{\sin(90°-\beta)} = 2R \Rightarrow BD = 20\cdot\cos\beta$

(3) (по т. синусов): $\frac{BC}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow$ $BC = 20\sin\beta$

(4) $CF^2 = CB^2 + BF^2$ (по т. Пиф. в $\triangle CBF$): $CF^2 = 400\sin^2\beta + 400\cos^2\beta \Rightarrow CF^2 = 400 \Rightarrow CF = 20$

(5) ~~$\sin\gamma =$~~ $\cos\gamma = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, $\sin\gamma = \frac{4}{5}$

(6) $CB = 12 = 20\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow$ т.к. $\alpha = 180° - 90° - 45° + \beta = 45° + \beta$, то $\sin\alpha = \sin(45°+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \Rightarrow AC = 14\sqrt{2}$

(7) $S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot\sin(\gamma+45°) = \frac{1}{2}\cdot 14\sqrt{2}\cdot 20\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot 14\sqrt{2}\cdot 20\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10} = 14\cdot 7\cdot 2 = 14\cdot 14 = 196$

Ответ: 20; 196

№7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} & (1) \\ y < 76 + 2\cdot(2^{32}-1)x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ -y > -76 - 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

$0 > 2^x + 3\cdot 2^{34} - 76 - 2^{33}x + 2x$

$f(x) = 2^x + 3\cdot 2^{34} - 76 - 2^{33}x + 2x$

$\cancel{f(x) = 2^x + 2^{33}(6-1) - 76 + 2x = 2^x + 5\cdot 2^{33} + 2x - 76}$

$\cancel{f(x) < 0}$

$\cancel{f'(x) = \ln 2\cdot 2^x - 2 = 0}$

$\cancel{2^x = \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow x = \log_2 \frac{2}{\ln 2} = 1 - \log_2(\log_e 2)}$

$\cancel{f(x) = 2^x - (2^{33}-2)x + 3\cdot 2^{34} - 76}$

График первой функции выглядит так:

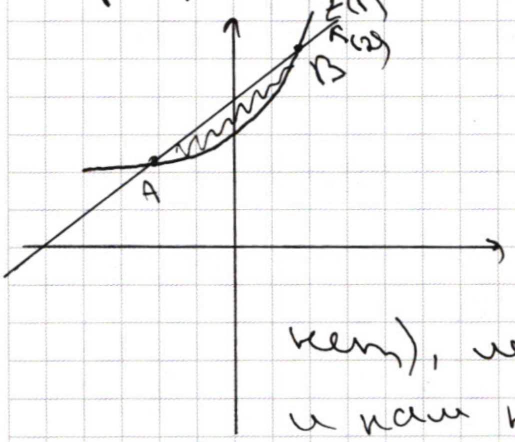
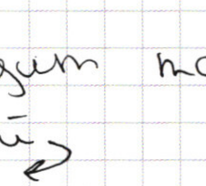


график второй

Эти две функции либо касаются друг друга (тогда пара максимум одна), либо не пересекаются (тогда пар нет), либо пересекаются в 2-х точках и нам надо ~~будет~~ посчитать количество пар в заштрихованной области, либо иметь $\cancel{2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2\cdot(2^{32}-1)x}$ одну общую точку, но тогда условие некорректно:  (пар бесконечно много)

Проверим на касательность пусть в т. x_0. Тогда в этой точке функции равны и их производные равны.

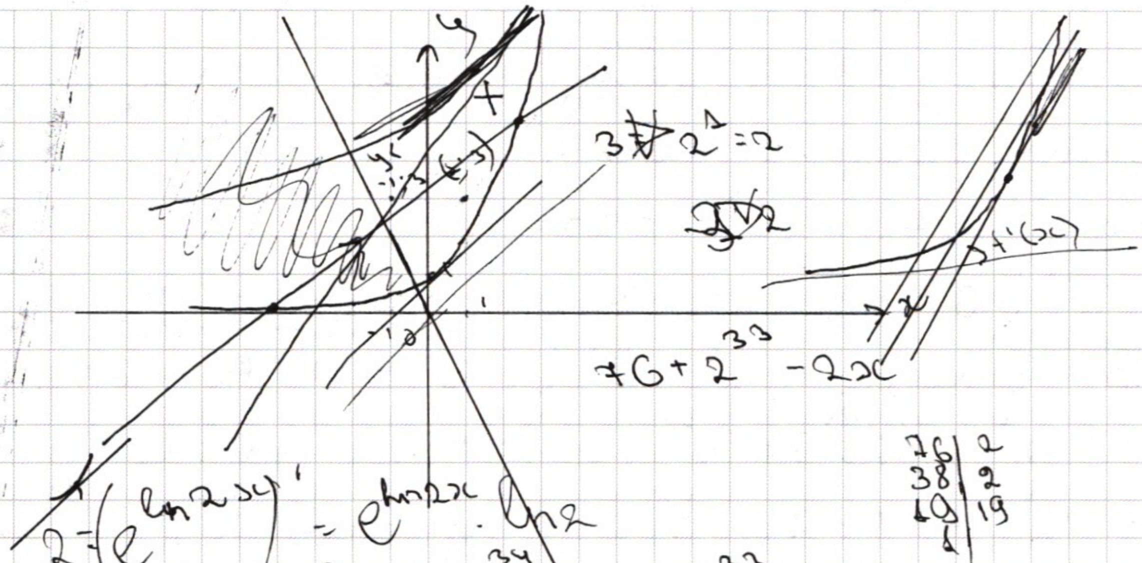
☐ черновик ☑ чистовик Страница №7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3 \cdot 2^1 = 2$

$76 + 2^{33} - 2x$

$2 = (e^{\ln 2x})' = e^{\ln 2x} \cdot \ln 2$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} - 2x$

$2^x + 2x = 76 + 2^{33} \cdot 6$

$x = 0,\ y = 76 \qquad 2^x =$

$x = 0,\ y = 3 \cdot 2^{34}$

$f(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \ldots$

$$\begin{cases} 2^{x_0} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) x_0 \\ \ln 2 \cdot 2^{x_0} = 2^{33} - 2 \end{cases}$$

$2^{x_0} = \frac{2^{33} - 2}{\ln 2} \qquad x = 6$

$2^x + 2^{33}(6 - x) + 2x - 76 = 0$

$64 + 12 = 76$

$128 + 14 = 142$, $142 - 76$

$6 \quad 4 \cdot 2^{24} \cdot 3$

$\frac{6 + 24}{2} = 15 > \sqrt{4 \cdot 6 \cdot 6} = 62$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 2^{x_0} + 3\cdot 2^{34} = 76 - 2\cdot(2^{32}-1)x \\ 2^{x_0}\cdot \ln 2 = -2^{32}+2 \end{cases}$$ такого быть не может, т.к. ~~слева~~ справа отрицательное число, а справа положительное. $\Rightarrow$ они точно не касаются $\Rightarrow$ они либо имеют ~~одну~~ две общие точки, либо не имеют общих точек.

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 - 2^{33}x - 2x$

$2^x + 2^{33}(6-x) + 2x - 76 = 0$ — одна точка есть $\Rightarrow$ ищем вторую $\Rightarrow$ ~~47~~

$x = 6$ - общая $(2^6 + 2^{33}(6-6) + 12 - 76 = 64 + 12 - 76 = 0)$

$x = 7$: $2^7 + \cancel{3\cdot 2^{34}} \ldots 2^{33}(6-7) + 2x - 76 \not= 0$

$2^7 - 2^{33} + 14 - 76 < 0 \Rightarrow$ график $2^x + 3\cdot 2^{34}$ лежит ниже прямой $\Rightarrow$ мы нашли т. A

~~$2^{33} + 2^{33}\cdot 6 - 2^{33\cdot 2} + 2^{34} - 76$~~ Теперь надо определить до какого x это будет верно и посчитать точки.

$x = 16$: $2^{16} + 2^{17} - 10\cdot 2^{33} - 76 = 0$

~~$x = 20$: $2^{20} + 2$~~

$2^x + 3\cdot 2^{34} \geqslant \sqrt{2^x\cdot 3\cdot 2^{34}} = 2^{17}\sqrt{3\cdot 2^x}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\sin\beta} - \cancel{\cos\alpha\sin\beta}$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

№ 1

~~9261 | 3~~
~~3087 | 3~~
~~129 | 3~~
~~43~~

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & \end{array}$$

$7^3\cdot 3^3 = 9261$

№2

$\cancel{\left(x^2\left(\frac{y^4}{y}\right)\right)^{-\ln x} = y^{\ln\frac{y}{x}}}$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x = 0 \,|:2$

$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos^2 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin^2 2x = 0$

$\cos 2x\left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x\right) - \sin 2x\left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 0$

$\sqrt{2}\cdot\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cdot\cos 4x - \sqrt{2}\cdot\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin\left(\frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) - \cos 4x = 0$

$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cdot\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{7}^3 \cdot 3^3 = 9261$

$\begin{array}{r} 343 \\ \times 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$

В него входят обязательно 3 семёрки и либо 3 тройки, либо 9 и 3. Получаем 2 случая:

$\begin{array}{r} 560 \\ -140 \\ \hline 420 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1120 \\ -210 \\ \hline 910 \end{array}$

1) 3 семерки и 3 тройки и 2 нуля.

$C_8^3 \cdot C_5^3 = \cancel{\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 3!} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 20 \cdot 7 = 140}$ $1120 - 120$

2) случай: 3 семёрки, 9, 3 и 3 ноля.

ноль первый: 0

$\begin{array}{r} 210 \\ -120 \\ \hline 90 \end{array}$ 930 983

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$ $\cancel{C_7^3 \cdot C_4^3}$ $\begin{array}{r} 56 \\ \times 20 \\ \hline 1120 \end{array}$

$C_2^1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!}$ $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \cdot 2 = 20$ $\sqrt{2}$ $\cancel{0}$ C_7^3 – семёрки $\cdot C_3^1 \cdot C_3^1$

$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x = \sqrt{2} \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$

$\sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$(\cos 2x - \sin 2x)(\sin 7x - (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x)) = 0$

$(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x) \cdot (\sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x)) = 0$

$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot 2 \cdot \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ \frac{5}{2} x - \frac{\pi}{8} = \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n \\ \frac{9}{2} x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi l \end{array} \right.$$

sin, cos

$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\pi}{20}$

$\frac{4\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{2}{9}$

$\sqrt{3}$

$\ln = \log_e x$ $\quad x^{\log_e x} = x^{\frac{1}{\log_x e}}$ $\quad x = e^{\log_e^2 x}$

$\log_e x = c : e^c = x$

$(xy^2)^{-2\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7 \cdot \ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - \cancel{48}\,32x = 9x^2 - \cancel{400}\,24x + 16$ $\quad 32 - 8 = 24$

$(e^{2\log_e x} \cdot e^{4\log_e y})^{-\log_e x} = e^{\log_e y \cdot (\log_e y - 7\log_e x)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$e^{(2\log_e x+4\log_e y)\cdot -\log_e x} = e^{\log_e^2 y - 7\log_e y\cdot\log_e x}$$

$-2\log_e^2 x - 4\log_e y\cdot\log_e x = \log_e^2 y - 7\log_e y\cdot \log_e x$

$\log_e x = t$, $\log_e y = a$ $\qquad x=2, y=4$

$-2t^2 - 4at = a^2 - 7at$ $\qquad 4-4-8+16-8 = 0$

$a^2 - 7at + 4at + 2t^2 = 0$ $\qquad 16-\cancel{8}-\cancel{8}+\cancel{16}-16=0$

$a^2 - 3at + 2t^2 = 0$

$D = 9t^2 - 8t^2 = t^2$ $\qquad$ I сл. $t=0 \Rightarrow \log_e x = 0 \Rightarrow x=1$

$a = \frac{3t}{2} = 0 \Rightarrow y=1$

$1-1-2+8-4 = 9-7$ не подх.

$a_1 = \frac{3t+t}{2} = 2t$

$a_2 = t$

I сл. $\log_e y = \log_e x^2$ $\qquad$ II сл. $y = x$

$y = x^2$ $\qquad$ $\cancel{y^2}\cancel{-xy}$ $x^2 - \cancel{x^2} - 2x^2 + 8x - 4x = 0$

$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$ $\qquad -x^2 + 4x - 2x = 0$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$ $\qquad -x^2 + 2x = 0$

$x = 0$ не подх: $x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$ $\qquad x = 2 \Rightarrow y = 2$

$-1-1-6+8$

$8-4-12+8$

$64-16-24+8$

$\frac{2}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{3}{\cancel{8}_4}$

$\cancel{(x-2)(x^2+bx+c)=0}$

$\cancel{x^3+bx^2+cx-2x^2+b2x-c2=0}$

$\cancel{\begin{cases} b-2=-1 \\ c+b2=-6 \\ -c2=8 \end{cases}} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} b=2-1 \\ c+2^2-2=-6 \\ c2=-8 \end{cases}}$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x-2 \Rightarrow y=4 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2+x-4 \\ x^2 - 6x + 8 & \\ \underline{x^2 - 2x} & \\ -4x+8 & \\ \underline{-4x+8} & \\ 0 & \end{array}$$

$D = 1+16 = 17$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{18-2\sqrt{17}}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y-5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1). 1) $x \geq -y-5$; $x+y+5+x-y-5=10$; $x=5$

$x \geq y+5$

$x=-y-5$, $y=-x-5$

$x=y+5$, $y=x-5$

2) $x \geq -y-5$; $x \leq y+5$: $x+y+5-x+y+5=10$; $y=0$

3) $x \leq -y-5$; $x \geq y+5$: $-x-y-5+x-y-5=10$; $-2y=20$; $y=-10$

4) $x \leq -y-5$; $x \leq y+5$: $-x-y-5-x+y+5=10$; $-2x=10$; $x=-5$

(2) $(x-12)^2+(y-5)^2=a$

$(-x-12)^2+(y-5)^2=a$

$(x-12)^2+(-y-5)^2=a$

$(-x-12)^2+(-y-5)^2=a$

$x+y+5-x+y+5=10$

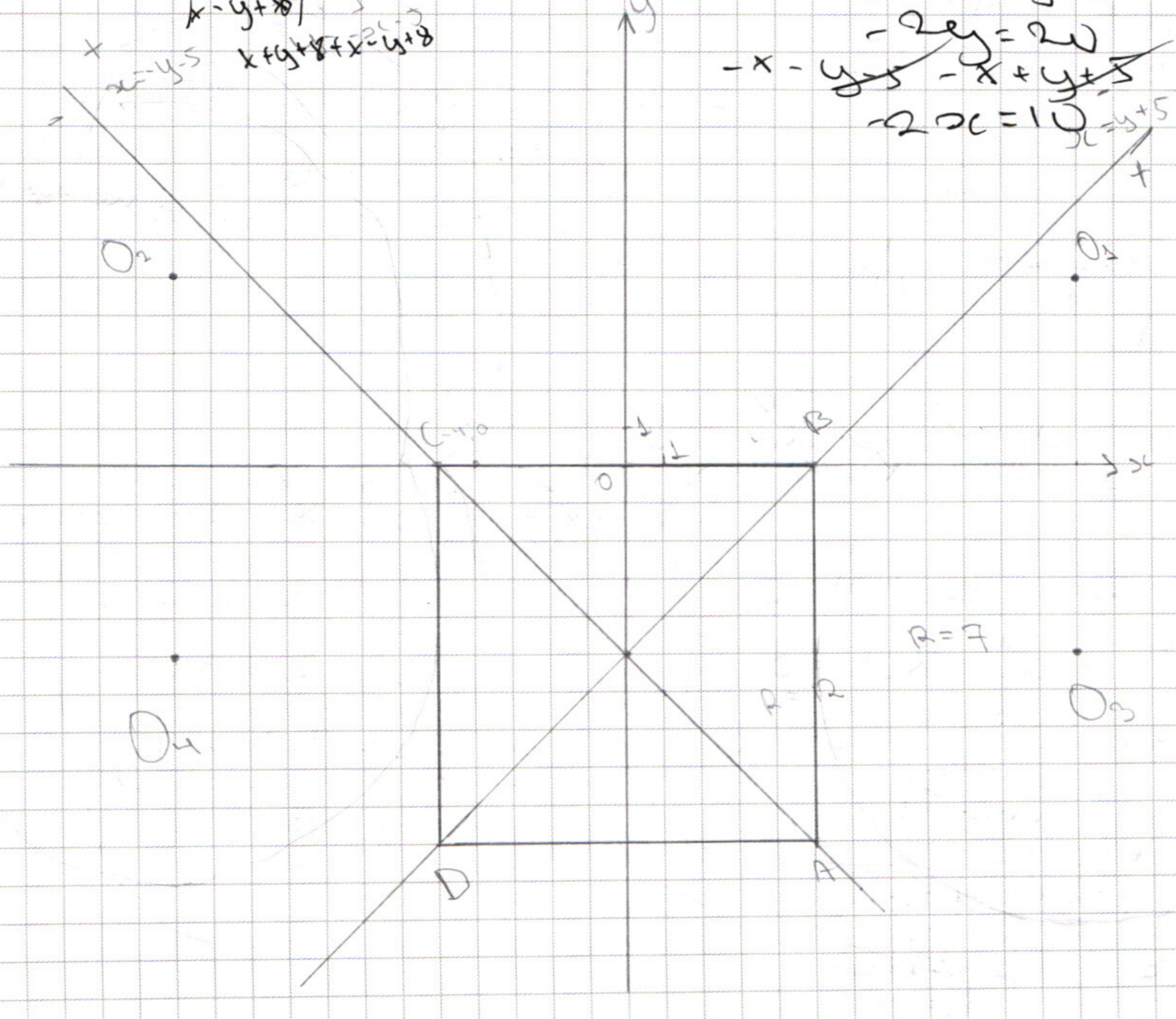
$y=0$

$-x-y-5+x-y-5$

$-2y=20$

$-x-y-5-x+y+5$

$-2x=10$



- [x] черновик
- [ ] чистовик

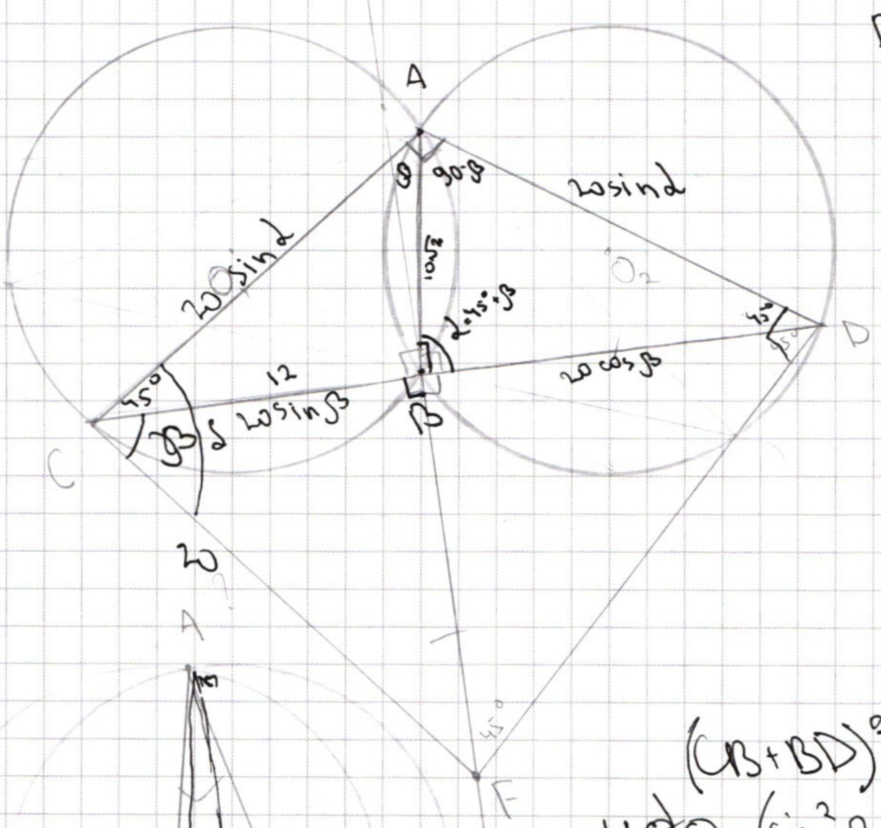
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

56

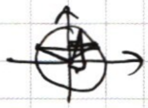


$R=10$

CF – ?

$\frac{AD}{\sin\alpha}=20$

$\frac{AC}{\sin(180-\alpha)}=20$

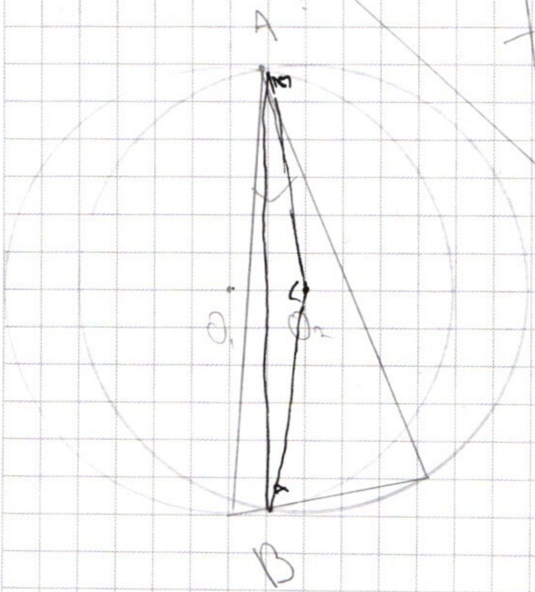


$AC=20\sin\alpha$

$\frac{DB}{\sin(90-\beta)}=20$

$DB=20\cos\beta$

$CB=20\sin\beta$



$(CB+BD)^2=2\cdot400\sin^2\alpha$

$\cancel{400}\cdot(\sin^2\beta+\cos^2\beta+\sin2\beta)=2\sin^2\alpha$

$\sin2\beta=2\sin^2\alpha-1$

$\sin2\beta=-\cos2\alpha$

$\sin2\beta+\cos2\alpha=0$

$\cos(90-2\beta)+\cos2\alpha=0$

$2\cdot\cos\frac{90-2\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{90-2\beta-2\alpha}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos(45°+\alpha-\beta)=0\\ \cos(45°-\alpha-\beta)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}45°+\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ 45°-\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right. \Rightarrow$

$\alpha=45°+\beta+\pi k \Rightarrow \alpha=45°+\beta$; $\alpha=\cancel{45}\ \beta-\cancel{45°}+45°-180°=\beta-135°$ W

$-\alpha=45°+\beta+\pi k \Rightarrow \alpha=-45°-\beta+180°=135°-\beta$

$\frac{AB}{\sin45°}=20 \Rightarrow AB=10\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

I сл. $\alpha = 45^\circ + \beta$

$CF^2 = CB^2 + BD^2 = 800\sin^2\alpha$

~~$CF = 20\sqrt{2\sin^2\alpha}$~~

$3{,}5 \cdot$

$11.37 + 1.30 =$
$= 12.37 + 23 + 7 =$
$= 13.07$

$135^\circ - \beta + 90 - \beta + 45 = 180$

$90 - 2\beta = 0$

$\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 \cdot (1 + \sin 2\beta)$

$\beta = 45^\circ$

$\sin(45^\circ + \beta) = \frac{\sqrt2}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt2}{2}\sin\beta$

$200 = \left(20 \cdot \left(\frac{\sqrt2}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt2}{2}\sin\beta\right)\right)^2 + 400\cos^2\beta -$

$\frac{\sqrt2}{2} \cdot 400 \cdot \cos\beta \cdot \left(\frac{\sqrt2}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt2}{2}\sin\beta\right)$

~~$200 = 400 \cdot \frac{1}{2}\cos^2\beta + 400 \cdot \frac{1}{2}\sin^2\beta + 400\sin\beta\cos\beta$~~

~~$- 400\cos^2\beta - \frac{1}{2} \cdot 400\cos^2\beta - \frac{1}{2} \cdot 400\cos\beta\sin\beta$~~

$200 = 400\left(\frac{1}{2}\cos^2\beta + \frac{1}{2}\sin^2\beta + \sin\beta\cos\beta\right) + 400\cos^2\beta$

$- 400\cos\beta\left(\frac{1}{2}\cos\beta + \frac{1}{2}\sin\beta\right)$

$400\cos^2\beta - 200\cos^2\beta + 400\sin\beta\cos\beta - 200\sin\beta\cos\beta = 0$

$\cos^2\beta + \sin\beta\cos\beta = 0$

$\cos\beta = 0$ или $\cos\beta = -\sin\beta$

$2\sin^2\beta = 1 \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{1}{2}$ $\beta = 135^\circ$

~~$200 = 400\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\sin\beta\cos\beta\right) + 400\cos^2\beta -$~~

~~$-400 \cdot \cos\beta\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos\beta + \frac{\sqrt2}{2}\sin\beta\right) \cdot \frac{\sqrt2}{2} = 0$~~

~~$1 + \sin 2\beta = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \sin 2\beta)$~~

$CF^2 = 400\sin^2\beta + 400\cos^2\beta = 400$

$CF = 20$

$20\sin\beta = 12 \Rightarrow \sin\beta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt2}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{7\sqrt2}{10} \Rightarrow AC = 14\sqrt2$

~~$\sin\gamma$~~ $\cos\gamma = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\sin(\xi) = \sin(45^\circ + \gamma) = \frac{\sqrt2}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt2}{10}$

$90 - \beta$

$S = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt2 \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt2}{10} =$

$= 49 \cdot 4 = 160 + 36 = 196$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)