

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

ВАРИАНТ 7

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

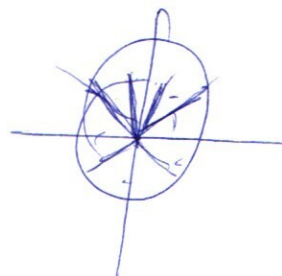
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .

- $$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \sin^2 x - \sqrt{2} \cos^2 x$$

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$



6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .

- б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{10} = \frac{\pi(1+8)}{10} = \frac{9\pi}{10}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\frac{\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 3 \\ \hline 1 & & & & & & \\ \hline 1 & & 1 & & 1 & & \\ \hline & & & & & & \end{array}}{2} - 2 \log \frac{\theta^2}{\alpha} = C$$

$$2 \ln 6 = \ln 6^2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

То есть в числе присутствуют:

либо

либо

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

3-й раз из 3-й раз

остаток

3-й раз, 1-й раз и 1-й раз

раскладываем 3-й раз:  $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56$  для 7 = 56

в ост. 5 раз 3 3-й раз

13-й раз и 12-й раз

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$$

$$5 \cdot 4 = 20$$

Ответ:  $56 \cdot 10 + 56 \cdot 20 = 1680$

№2

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) (\cos 2x - \sin 2x)$$

1)  $\cos 2x = \sin 2x \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$

2)  $\sin(7x) = \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$$\pi - 7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

ответ

$\mu = 3$ 

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ:

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$(2) \quad y^2 - y(x+y) - 2x(x-4) = 0$$

$$y = \frac{x+y \pm |3x-4|}{2} = \begin{cases} 2x \\ y-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} \\ (x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^4}} \end{cases}$$

Т.к. площади отличаются в 16 раз, то линейные размеры в  $\sqrt{16} = 4$  раза.

 $\mu = 4$ 

$$46 + 2x^3 - 2x - 2^x + 6 \cdot 2^{33} = 0$$

$$19 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^{33} + x(2^{33} - 2) - 2^x = 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

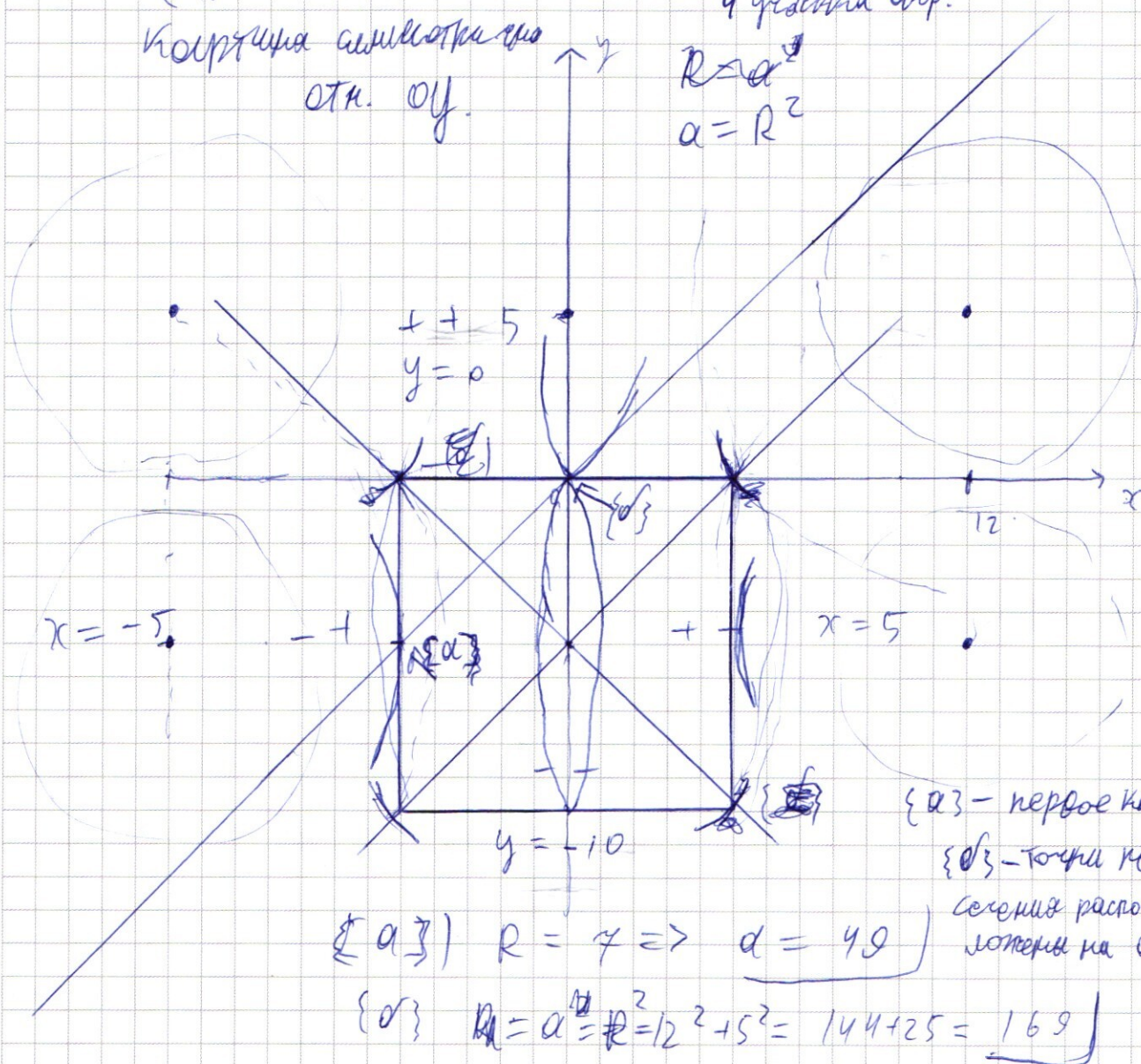
№ 5

$\alpha$  - ? два кр.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & \text{— квадрат} \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = \alpha & \text{— окр. центра точка.} \\ & \text{4 участка окр.} \end{cases}$$

Коррктная симметрия по  
отн. оу.

$$R = \alpha^{\frac{1}{2}} \\ \alpha = R^2$$



$\{\alpha\}$  — первое касание.  
 $\{\beta\}$  — точки пере-  
сечения распо-  
ложенны на оу.

$$\{\alpha\} \quad R = 7 \Rightarrow \alpha = 49$$

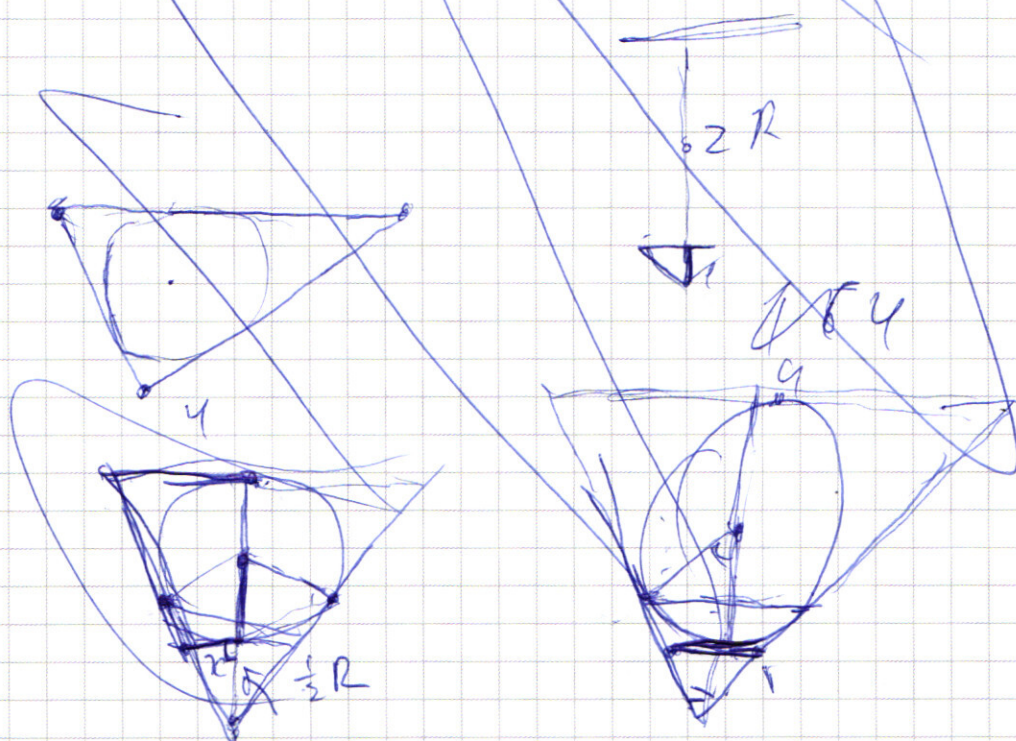
$$\{\beta\} \quad R = \alpha^{\frac{1}{2}} = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

Ответ:  $\alpha = 49, 169$ .

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 - 2^{33} - 2x$$

$$2^x + 5 \cdot 2^{33} + 2x < 76$$

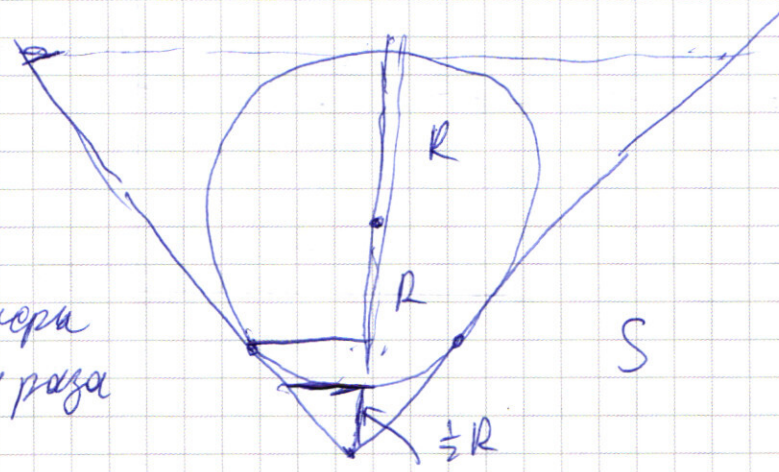
$$2^x + 2^2(5 \cdot 2^{31} - 19) + 2x < 0$$



$n=0$

Т.к.  $\frac{S_1}{S_2} = 16$ , то

линейные размеры  
отличаются в 4 раза



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1  
9621 - делится на 9

$$9621 = 3^2 \cdot 13^2$$

Т.к. число 9621 должно быть представлено в виде произведения цифр (1, 2, ..., 8, 9),  
то множитель 13 получить не можем  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Ответ: 0

$$\begin{array}{r} 9621 \div 9 = 1069 \\ 9621 \div 13 = 739 \end{array}$$

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 7x (\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x \sin 7x - \sin 2x \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin^2 2x = 0$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

1-е реш:  $\cos 2x = \sin 2x$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin(2x)$$

$$\sin 7x = \sin(\frac{\pi}{4} + 2x)$$

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} - 2x = 2x + 2\pi k$$

$$\frac{\pi}{4} + 2x = 7x + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k$$

№3

ОДЗ:  $x > 0$   
 $y > 0$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0$$

$$y = \frac{x+4 \pm \sqrt{x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x}}{2} =$$

$$= \frac{x+4 \pm \sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{2} = \frac{x+4 \pm |3x-4|}{2}$$

$$y = \begin{cases} 2x \cdot \frac{x+4+|3x-4|}{2} \\ \frac{x-4-|3x-4|}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x & (a) \\ 4-x & (b) \end{cases} \rightarrow (1)$$

$$a) \quad (x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

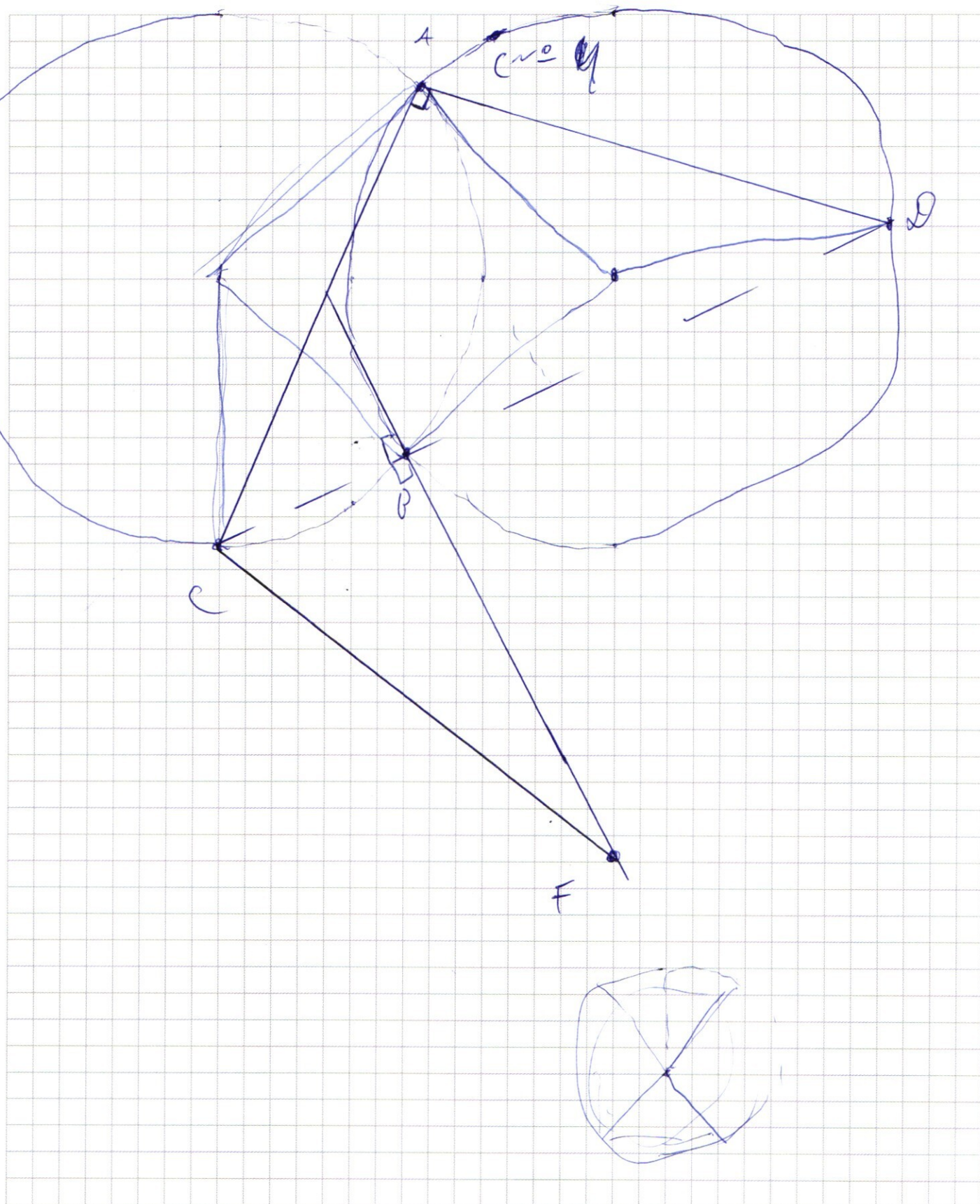
$$((4x^3)^2)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

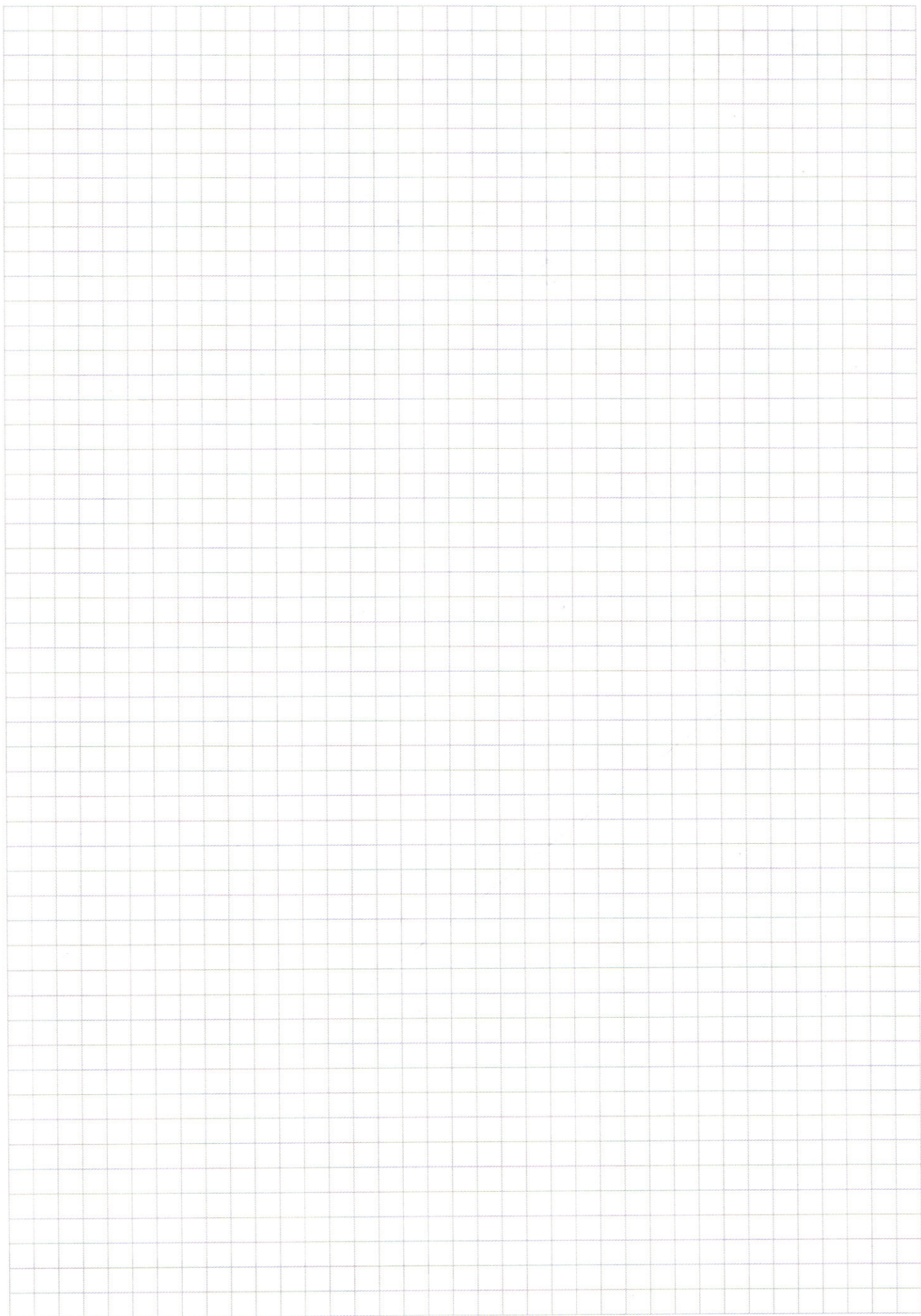
$$(4x^3)^{\ln \frac{1}{x^2}} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$4^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^2}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$2^{\ln \frac{1}{x^4}} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^2}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☒ черновик      ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten work on graph paper showing mathematical derivations and calculations.

**Top Left:** A system of inequalities is written and solved:

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 - 2^{3x} \\ y < 75 - 2(2^x - 1) \end{cases}$$

**Top Right:** A function is defined and its value is calculated:

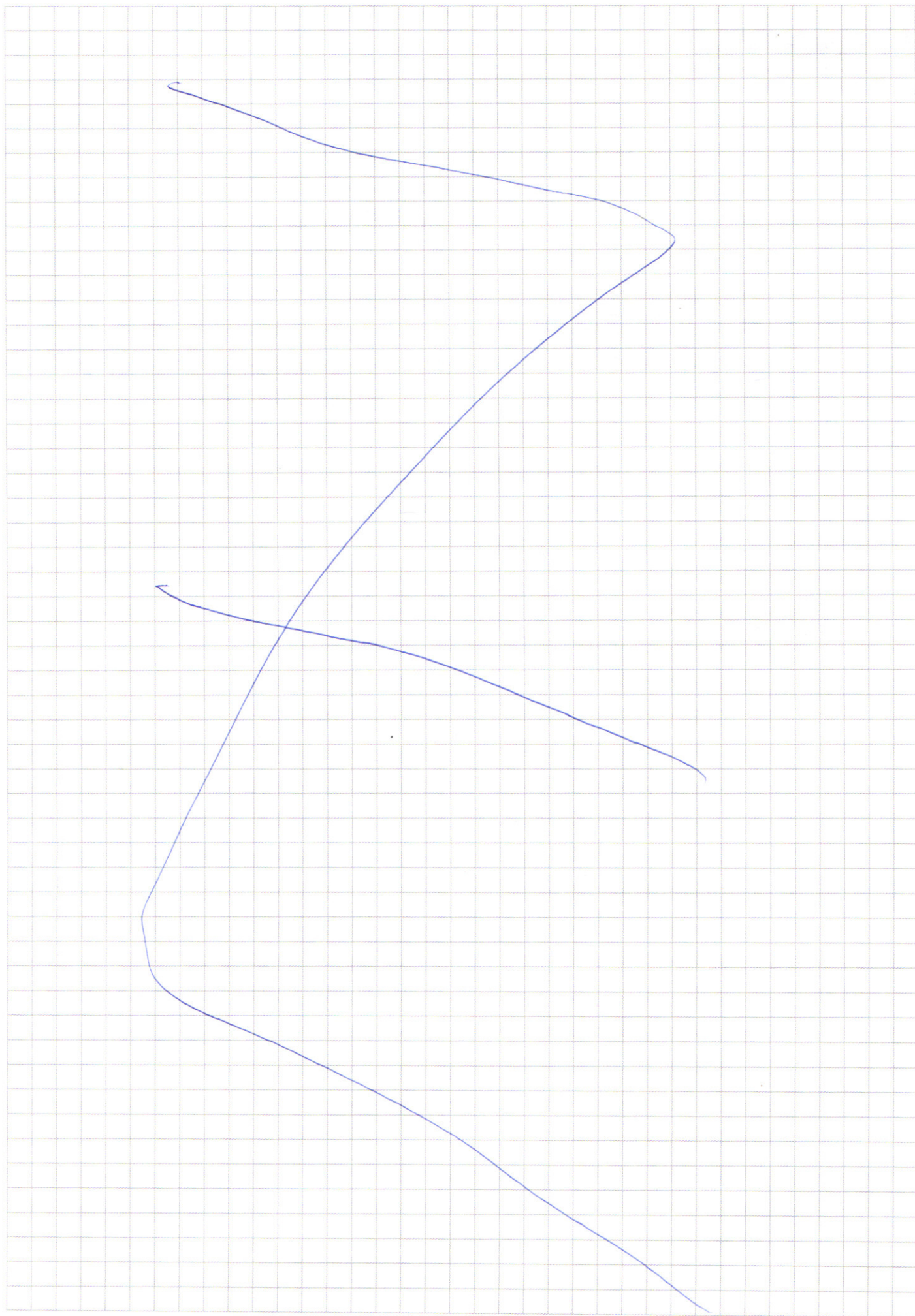
Заметим что  $f(x) = 2^x + 3 - 2^{3x}$

$f(1) = 2 + 3 - 2^3 = 5 - 8 = -3$

**Middle:** A large, complex handwritten expression is shown, possibly a derivative or a complex function, with various terms and exponents.

**Bottom Left:** A graph is plotted on the grid, showing a curve that starts at the origin and increases, with a dashed line indicating a tangent or asymptote.

**Bottom Right:** Several vertical calculations are shown, including long division and multiplication of large numbers, such as  $363 \div 3 = 121$  and  $343 \times 7 = 2401$ .



☒ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)