МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

Согласие законного представителя (родителя) на обработку персональных данных несовершеннолетнего

Я, Никитина Ева Львовна
(ФИО родителя или законного представителя)

паспорт 4519 428574 выдан ГУ МВД России по г. Москве
(серия, номер) (когда и кем выдан)
03.10.2019

(в случае опекунства указать реквизиты документа, на основании которого осуществляется опека или попечительство)

зарегистрированный по адресу: г. Москва, Ясный проезд д. 8, к4, кв 352

даю свое согласие Образовательному Фонду «Талант и успех», зарегистрированному по адресу: Российская Федерация, 354349, Краснодарский край, г. Сочи, Олимпийский проспект, д. 40, являющемуся оператором по формированию и ведению государственного информационного ресурса о детях, проявивших выдающиеся способности (далее – оператор), на обработку следующих персональных данных:

- фамилия, имя, отчество (при наличии) ребенка;
- дата рождения ребенка;
- реквизиты документа, удостоверяющего личность ребенка;
- наименование организаций, осуществляющих образовательную деятельность, в которых обучается ребенок;
- класс / курс;
- наименования образовательных программ, по которым обучается ребенок;
- сведения об обучении по индивидуальному учебному плану в организации, осуществляющей образовательную деятельность;
- сведения об индивидуальных достижениях ребенка по итогам участия в олимпиадах и иных интеллектуальных и (или) творческих конкурсах, мероприятиях, направленных на развитие интеллектуальных и творческих способностей, способностей к занятиям физической культурой и спортом, интереса к научной (научно-исследовательской), творческой, физкультурноспортивной деятельности, а также на пропаганду научных знаний, творческих и спортивных достижений, подтвержденных соответствующими документами, выданными организаторами указанных мероприятий;
- страховой номер индивидуального лицевого счета страхового свидетельства обязательного пенсионного страхования ребенка;
- контактные данные ребенка (телефон, адрес электронной почты);
- мои контактные данные (телефон, адрес электронной почты).

Я даю свое согласие на использование персональных данных несовершеннолетнего исключительно в целях размещения их в государственном информационном ресурсе о детях, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга его дальнейшего развития.

Настоящее согласие предоставляется мной на осуществление действий, включающих: сбор, систематизацию, накопление, хранение, уточнение (обновление, изменение), использование, обезличивание, блокирование, уничтожение персональных данных, а также на передачу такой информации третьим лицам, в случаях, установленных законодательными и нормативными правовыми документами.

Персональные данные, предоставлены мной сознательно и добровольно, соответствуют действительности и корректны.

Подтверждаю, что мной дано согласие на рассылку рекламного, информационного характера от оператора и уполномоченных оператором лиц на указанный электронный адрес.

Я проинформирован(а), что оператор гарантирует обработку персональных данных в соответствии с действующим законодательством РФ.

Настоящее согласие действует бессрочно, но может быть отозвано в любой момент по соглашению сторон или в случае нарушения оператором требований законодательства о персональных данных.

(Подпись) Никитина Е.Л.
(Расшифровка подписи)

22 февраля 2020г
(Дата)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$-(x^2-8x+16)$

$x=\frac{-4y}{2}\cdot y^2-\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}$

$-2\sin 7x\sin$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-\cancel{2}\sin 4x}{2}$

$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\frac{+}{2}\cos\frac{-}{2}-\sin\frac{+}{2}\sin\frac{-}{2}$

$\cos\left(\frac{\beta+\alpha}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=$

$\cos\frac{+}{2}\cos\frac{-}{2}+\sin\frac{+}{2}\sin\frac{-}{2}$

$\cos 9x+\sin 9x=$

$=\sqrt{2}\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 5x-\cos 5x=-\sqrt{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x=0$

$18-2\sqrt{17}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{+}{2}\cos\frac{-}{2}$

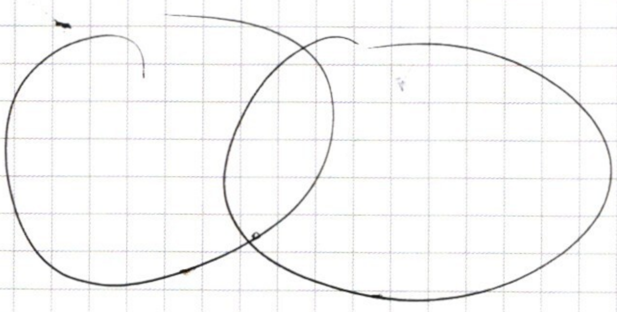
$\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}=0$

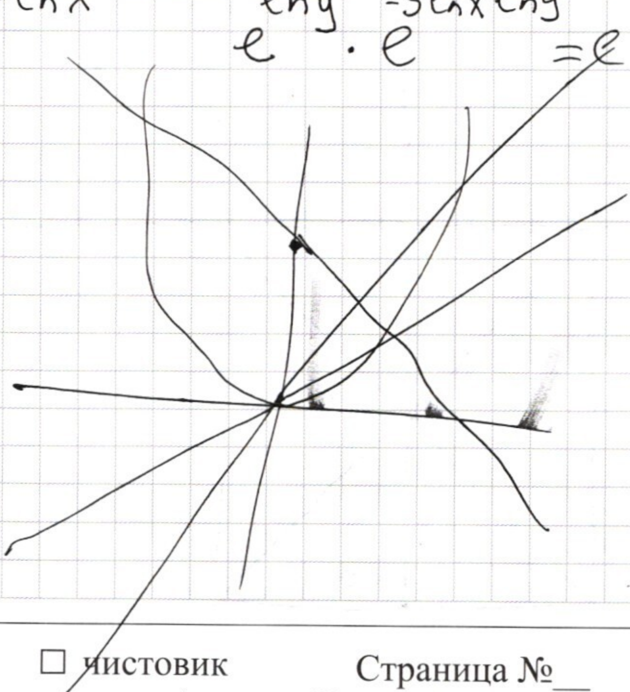
$y=2x^2$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x}=y^{\ln y}\cdot y^{-7\ln x}$

$e^{\ln^2 y}\cdot e^{-3\ln x\ln y}=e$

$x^{-2\ln x}=y^{\ln y}\cdot y^{-3\ln x}$





$\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{2}\sin\frac{+}{2}\cos\frac{+}{2}$

$-2\sin 2x\sin 7x + 2\sin 7x\cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x$

$2\sin 7x\cos(2x+\frac{\pi}{4}) = \cos 4x$ $\quad \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} - 2x)$

$\cos 9x + \sin 5x \quad 2x+\frac{\pi}{4}$

$\cancel{\cos 4x\cos 5x - \sin 4x\sin 5x + \sin 4x\cos 5x + \cos 4x\sin 5x =}$

$+(\sqrt{2}\cos 4x + \cos 5x - \sin 5x)$

$\sqrt{2}\cos(5x+\frac{\pi}{4})$

$\cos 4x + \cos(5x+\frac{\pi}{4}) = \sin(9x+\frac{\pi}{4})$

$\cos 4x + \cos(5x+\frac{\pi}{4}) = \sin 4x\cos(5x+\frac{\pi}{4}) + \cos 4x\sin(5x+\frac{\pi}{4})$

$\cancel{\cos 4x(1-\sin(5x+\frac{\pi}{4})) + \cos(5x+\frac{\pi}{4})(1-\sin 4}$

$\cos^2 4x + \cos(5x+\frac{\pi}{4})^2 + 2\cos 4x\cos(5x+\frac{\pi}{4}) =$

$=$

$a_1a_2\ldots a_8 \quad a_i \neq 0$

$a_1\cdots a_8 = 9261$

$9261 = 3^3\cdot 7^3$

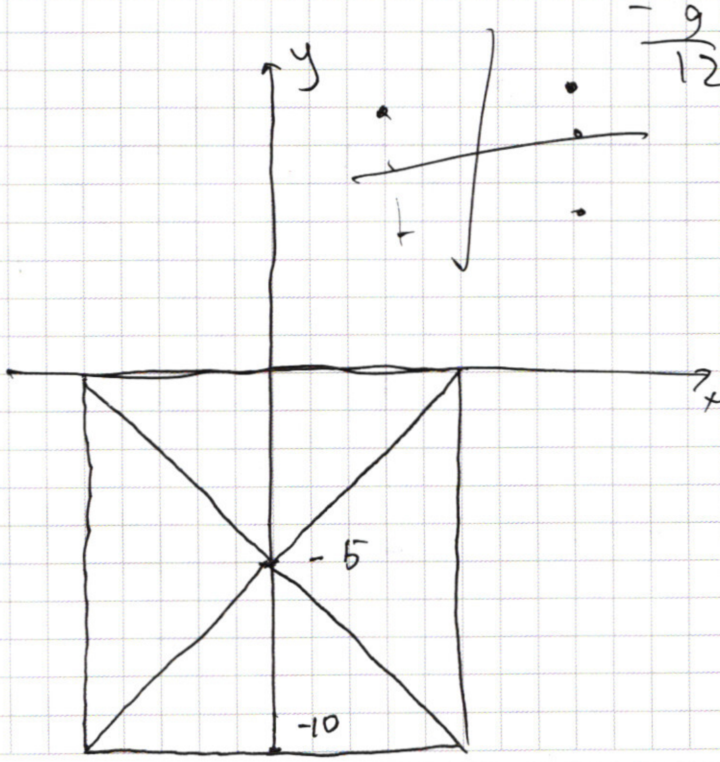
$9261 \mid 9 \to 1029$; -18; 81

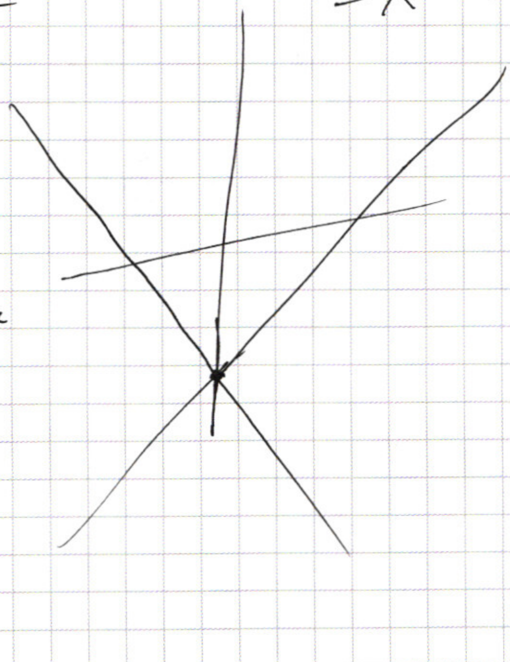
$1029 \mid 3 \to 343$; -9; 12

49×7

$x-5$

$-x-5$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x=34: \quad y \geq 2^{36}$

$y < 76 + 2\cdot 34 \cdot 2^{32} - 2\cdot 34$ $4\cdot 17$, 68

$\cancel{2^{36} < 8 + 2^{36}\cdot 17}$

$x=35$

$7\cdot 2^{33} - 6\cdot 2^{33}$ $2^{34}\cdot 5 < 76 + 35\cdot 2^{34} - 70$

2^{33} $2^{34}\cdot 5 < 5\cdot 2^{34} + 6$ $2^{35}\cdot 9 + 4$

$x=36: \quad 2^{34}\cdot 7 < 76 + 2\cdot 36 \cdot 2^{32} - 72$ $4\cdot 9$

$7\cdot 2^{33} - 6\cdot 2^{33}$

$x=37: \quad 3+8=11$

$2^{34}\cdot 11 < 76 - 74 + 2\cdot 37\cdot 2^{32}$

$2^{34}\cdot 11 <$ $3+16$, 19

$x=38:$

$2^{34}\cdot 18 = 2^{34}\cdot 19 < 2\cdot 38 \cdot 2^{32} = 2^{34}\cdot 19$ $4\cdot 19$

$2^{34}\cdot 18 < 2^{34}\cdot 19$

$\cancel{x=39: 2^{34}}$

$x=10: \quad 2^{16} + \cancel{3\cdot 2^{34}} < 76 + 4\cdot 5\cdot 2^{32} - 20$ $\cancel{5\cdot 2^{34}}$ 2^{34}

$x=6: 2^{6} + \cancel{3\cdot 2^{34}}$

$< 76 - 12 + \cancel{3\cdot 2^{34}}$ 64 2^{35} $2\cdot 12$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

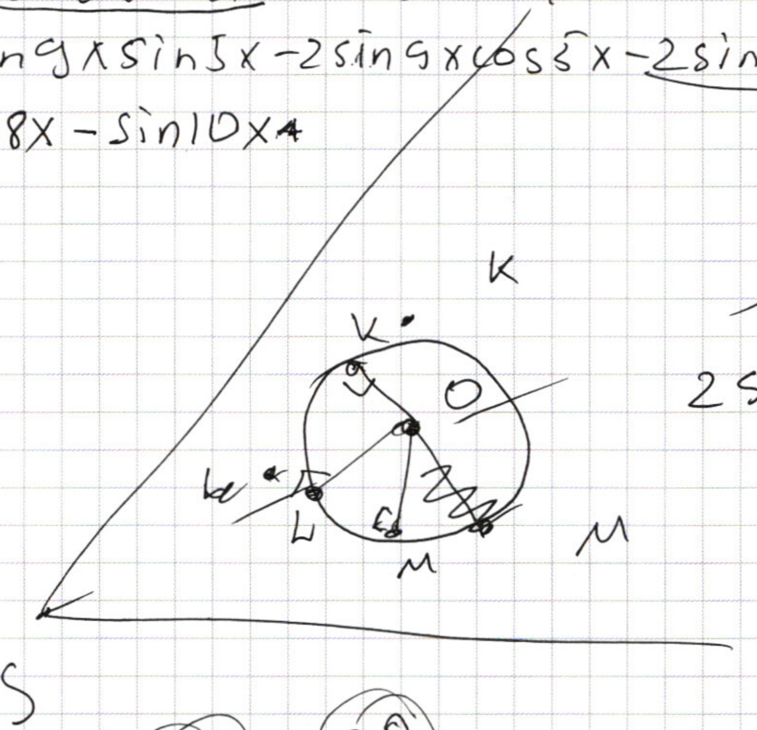
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\cos 4x$

$2 + 2\cos 9x \sin 9x + 2\cos 9x \sin 5x - 2\cos 9x \cos 5x +$

$+ 2\sin 9x \sin 5x - 2\sin 9x \cos 5x - 2\sin 5x \cos 5x = 2\cos^2 4x$

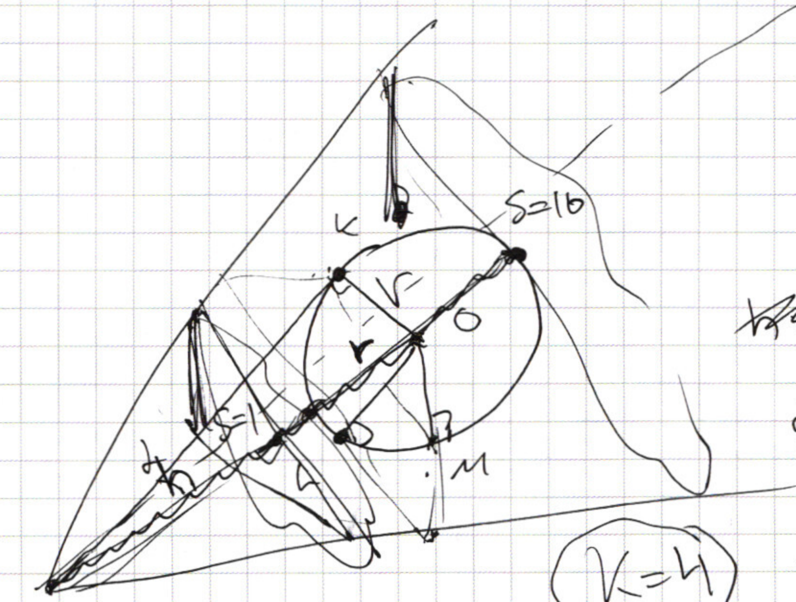
$2 + \sin 18x - \sin 10x$



$2\sin 4x \cos 14x$

$23 + 12 = 35$

27



$\sin\alpha = \frac{r}{h+r} = \frac{1}{\frac{h}{r}+1} = \frac{1}{\frac{8}{3}+1}$

$\frac{3}{11}$

$K = 4$

$h \quad h \quad h + 2r$

$\frac{h}{h+2r} = \frac{1}{4}$

$4h = h + 8r$

$3h = 8r$

$\frac{h}{r} = \frac{8}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

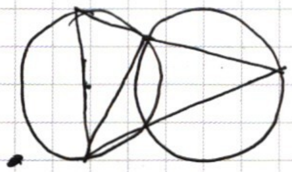
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

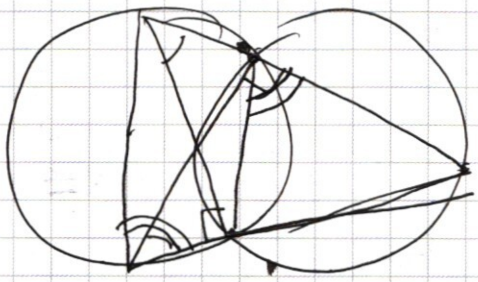
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

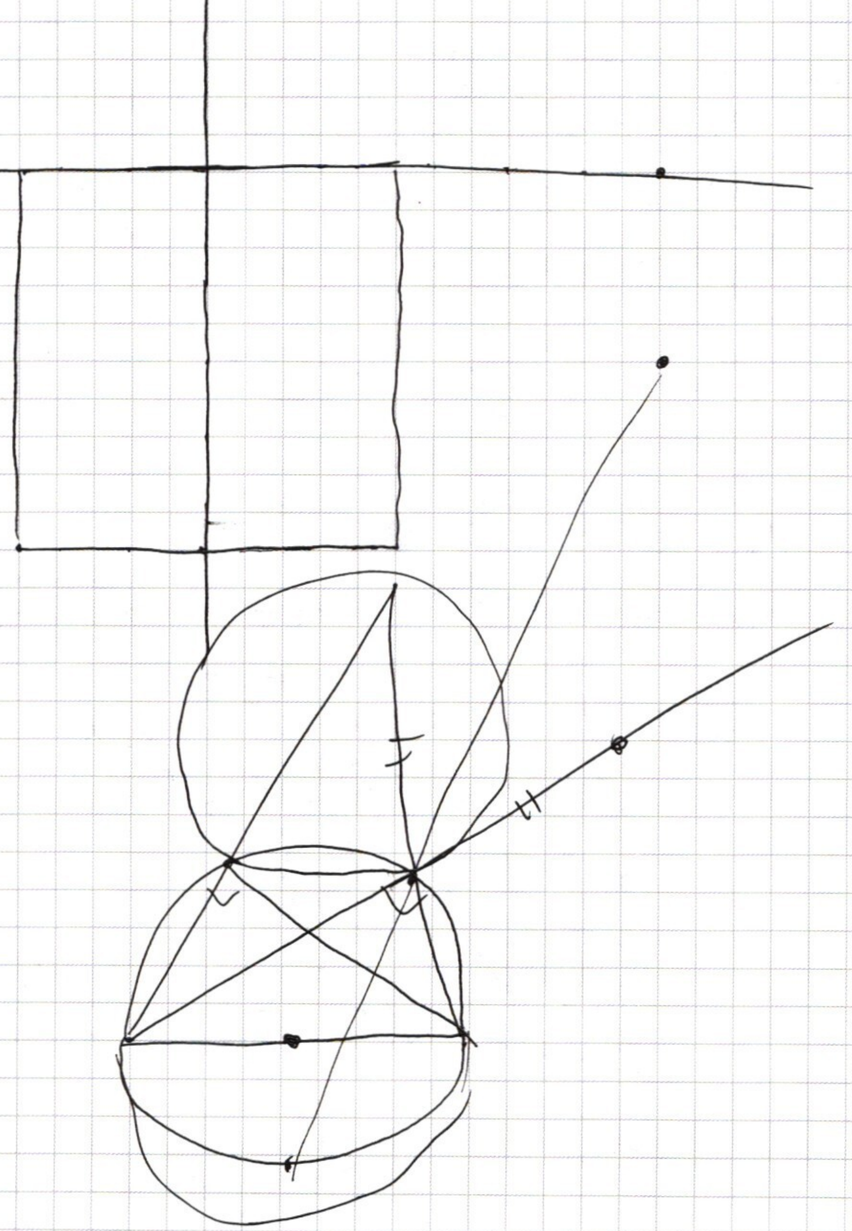
$$\begin{array}{r} 225 \\ +\,289 \\ \hline 514 \end{array}$$

$289+25=314$

$314:2=157$





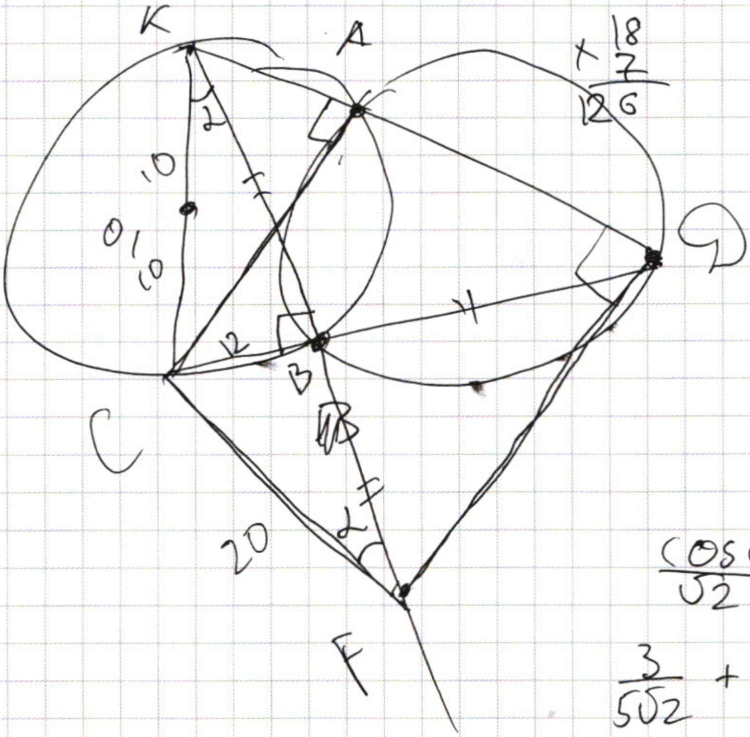


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha =$

$=$

$\frac{8}{5\sqrt{2}} \vee 1$

$8 \vee 5\sqrt{2}$

$64 \vee 50$

$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}} -$

$\frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} =$

$2^x + 3\cdot 2^{34} \le 76 + 2x(2^{32}-1)$

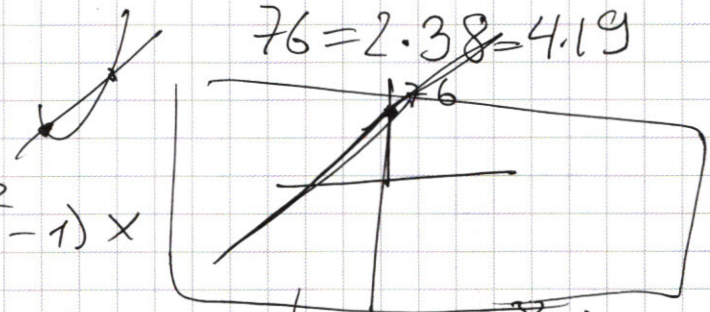
$x, y \in \mathbb{Z}$ $2\sqrt{3\cdot 2^{34+x}} \le 2^x + 3\cdot 2^{34} \le y < 76 + 2x(2^{32}-1)$

~~$76 = 2\cdot 38 = 4\cdot 17$~~

$76 = 2\cdot 38 = 4\cdot 19$

$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32}-1)x$



$y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \geqslant 3\cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2x(2^{32}-1) \le 76 + x\cdot 2^{33} - 2x$

$76 + 2(2^{32}-1)x \le$

$= 76 + 2^{33}x - 2x$

$3\cdot 2^{34} < 76 + x2^{33} - 2x$

$x\cdot 2^{33} > 3\cdot 2^{34} - 75$

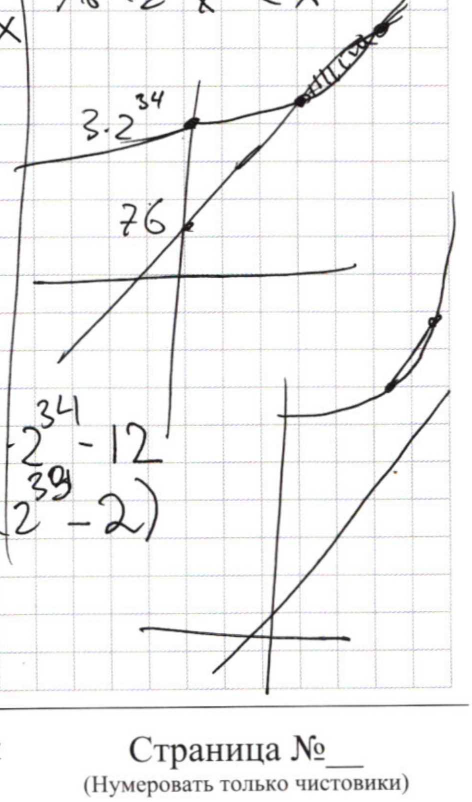
$x > 3\cdot 2 - \frac{75}{2^{33}}$

$x \geqslant 7$

$x(2^{33}-2) > 3\cdot 2^{34} > 3\cdot 2^{34} - 12$

$6(2^{33}-2)$

$x > 6 \Rightarrow x \geqslant 7$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 2.~~

Решить у-ние: $\cos(9x)-\cos(5x)-\sqrt{2}\cos(4x)+\sin(9x)+\sin(5x)=0$

Решение: ~~$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$~~ ~~$=\sqrt{2}\cos$~~

1) $\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$=\sqrt{2}\cos\left(\alpha \mp \frac{\pi}{4}\right)$ $\left[\begin{array}{l}\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.$

2) у-ние $\Leftrightarrow [\cos 9x+\sin 9x]-[\cos 5x-\sin 5x]-\sqrt{2}\cos 4x=0$

$\sqrt{2}\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos 4x=0 \mid :\sqrt{2}$

$\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos(4x)=0$

используя (*): $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ (*)

$-2\sin\frac{9x-\frac{\pi}{4}+5x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{9x-\frac{\pi}{4}-5x-\frac{\pi}{4}}{2}-\cos 4x=0$

$-2\sin 7x\cdot\sin\frac{4x-\frac{\pi}{2}}{2}-\cos 4x=0$

$-2\sin 7x\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x=0$

$\sin 7x\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 4x$

Задача 2.

$\cos 9x-\cos 5x-\sqrt{2}\cos 4x+\sin 9x+\sin 5x=0$

Решение: 1) ~~$\cos\alpha\pm\cos\beta$~~ $\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)$

2) $(\cos 9x+\sin 9x)+(\sin 5x-\cos 5x)-\sqrt{2}\cos 4x=0$

$\sqrt{2}\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\cos 4x=0 \mid :\sqrt{2}$

$2\sin 7x\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 4x$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

2) $\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\cos 4x \,|$ в квадрат

$\cos^2 9x + \sin^2 9x + \sin^2 5x + \cos^2 5x + 2\cos 9x \sin 9x + 2\cos 5x \sin 5x -$

$- 2\cos 9x \cos 5x + 2\sin 9x \sin 5x - 2\sin 9x \cos 5x - 2\sin 5x \cdot \cos 5x = 2\cos^2 4x$

$2 + \sin 18x - \sin 10x - 2\sin 4x - 2\cos 14x = 2 - 2\sin^2 4x$

$2\sin^2 4x - 2\sin 4x - 2\cos 14x + \sin 18x - \sin 10x = 0$

(*) Продолжение на странице N13

Задача 3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Решить систему

Решение: 1) Ограничения: $\ln x \Rightarrow x > 0$; $\ln \frac{y}{x^7} \Rightarrow \frac{y}{x^7} > 0$ $\Rightarrow y > 0$

Итого: x и $y > 0$

2) $(2)|\cdot(-1)$: $2x^2 + x(y-8) - y^2 + 4y = 0$

$2x^2 + x(y-8) - y^2 + 4y \;\big|\; x - \frac{y}{2}$; частное: $2x + 2y - 8$

$-(2x^2 - xy)$

$2xy - 8x - y^2 + 4y$

$-(2xy - y^2)$

$-8(x - \frac{y}{2})$

$-(-8(x - \frac{y}{2}))$

0

Итого $(2) \Leftrightarrow (x - \frac{y}{2})(2x + 2y - 8) = 0$

$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4 - x \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) (1): $(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} \to x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$

$e^{-2\ln^2 x} = e^{\ln^2 y} \cdot e^{-3\ln x \ln y}$ | Прологарифмируем по осн. e $(x \text{ и } y > 0)$

$a^{\ln a} = e^{\ln^2 a}$

$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \ln y$

$2\ln^2 x - 3\ln x \ln y + \ln^2 y = 0$

$(2\ln x - \ln y)(\ln x - \ln y) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} y = 2x & (a) \\ y = 4 - x & (б) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{ll} y = x^2 & (в) \\ y = x & (г) \end{array}\right. \end{array}\right.$

1сл: $\exists\ y \overset{(г)}{=} x \to$ (а) и (б): $\left[\begin{array}{l} x = 2x \\ x = 4 - x \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right.$

2сл: $\exists\ y \overset{(в)}{=} x^2 \to$ (а) и (б): $\left[\begin{array}{l} x^2 = 2x \\ x^2 = 4 - x \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right.$ $\quad y = 0 \quad y = 4$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(x;y)$: $(0;0)$; $(2;2)$; $(2;4)$; $\to$

Продолжение ответа: $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\ \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$

Задача 1.

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ a_i – цифры

Решение:

$a_1\cdot\ldots\cdot a_7\cdot a_8=9261=3^3\cdot7^3$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 27 \\ \underline{81} & 343=7^3 \\ 116 & \\ \underline{108} & \\ 81 & \\ \underline{81} & \\ 0 & \end{array}$$

1) Заметим, что $a_i\neq0$ $\forall i\in[1;8]$, $i\in\mathbb{N}$

Заметим, что $a_i=3^\alpha\cdot7^\beta$, но т.к. a_i – цифры, то $a_i=\{1;3;9;7\}$ – одним из этих чисел.

2) Мы имеем 3 цифры в нашем числе, которые равны 7, тогда кол-во вариантов выбрать 3 цифры: $C_8^3=\frac{8!}{5!\cdot3!}=\frac{8\cdot\cancel{6}\cdot7}{\cancel{3\cdot2}\cdot1}=56$

Далее мы имеем ост. „5" мест:

$b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5$

1 сл: $\{b_1;b_2;\ldots;b_5\}=\{3;3;3;1;1\}$

Тогда выбираем 2 места куда ставить „1", а в остальные однозначно ставятся 3:

кол-во способов: $C_5^2=\frac{5!}{3!\cdot2!}=\frac{5\cdot4}{2}=10$

2 сл $\{b_1;b_2;\ldots;b_5\}=\{3;9;1;1;1\}$

Выбираем 2 места под „3" и „9":

$C_5^2=10$ и умножаем на 2, т.к. при одном расположении 1-чек, $\exists$ 2 различных расположения 3 и 9. Итого: $2\cdot C_5^2=20$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Таким образом: Расставить „7-ки": 56 сп.

Расставить остальные цифры:

$10 + 20 = 30$

Всего способов: $56 \cdot 30 = 1680$ (для каждого расположения 7к $\exists$ 30 различных расположений остальных цифр)

Ответ: 1680.

Задача 5

Найти все a, ч/ система имеет 2 реш.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Решение: 0) Заметим, что $a \geq 0$ (при $x = \pm 12, y = \pm 5$)

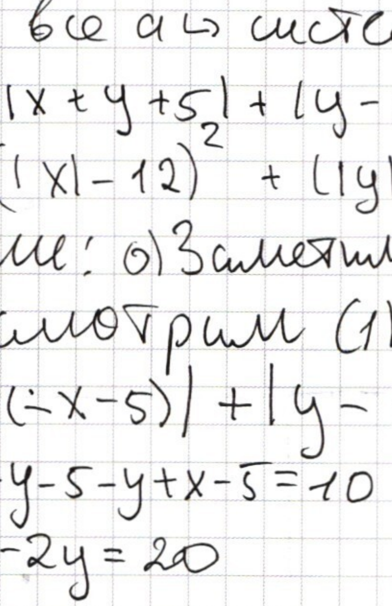
1) Рассмотрим (1):

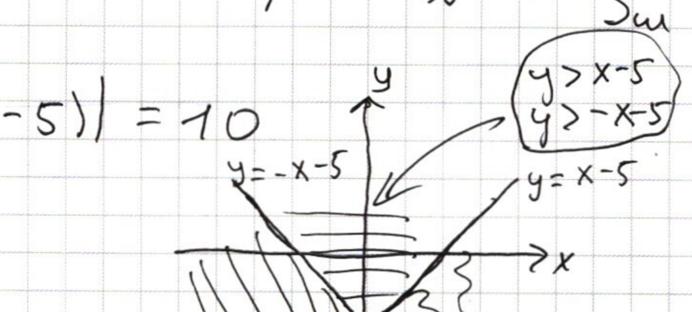
$$|y-(-x-5)| + |y-(x-5)| = 10$$

• 1м: $-x-y-5-y+x-5=10$

$-2y = 20$

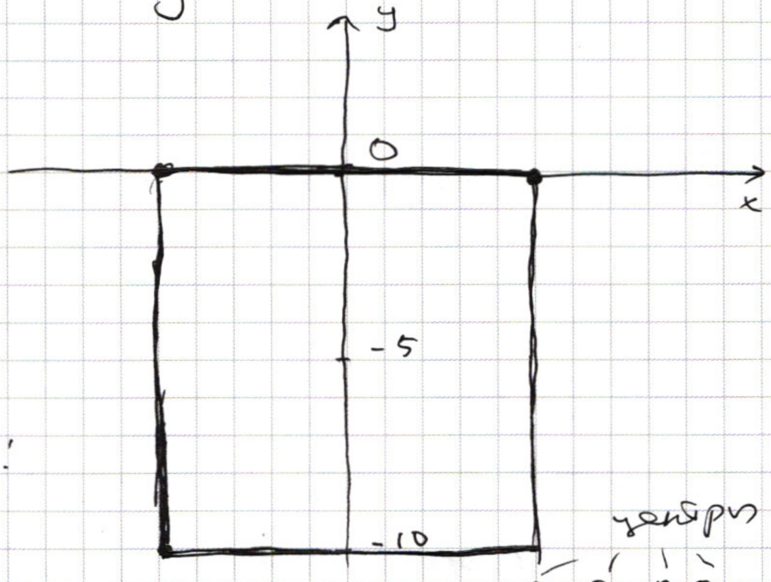
$y = -10$





· Аналогично раскрывая модули из-за симметрии получим множество точек:

$$\left[\begin{array}{l} y=0,\ x\in[-5;5] \\ y=-10,\ x\in[-5;5] \\ x=5,\ y\in[0;-10] \\ x=-5,\ y\in[0;-10] \end{array}\right.$$

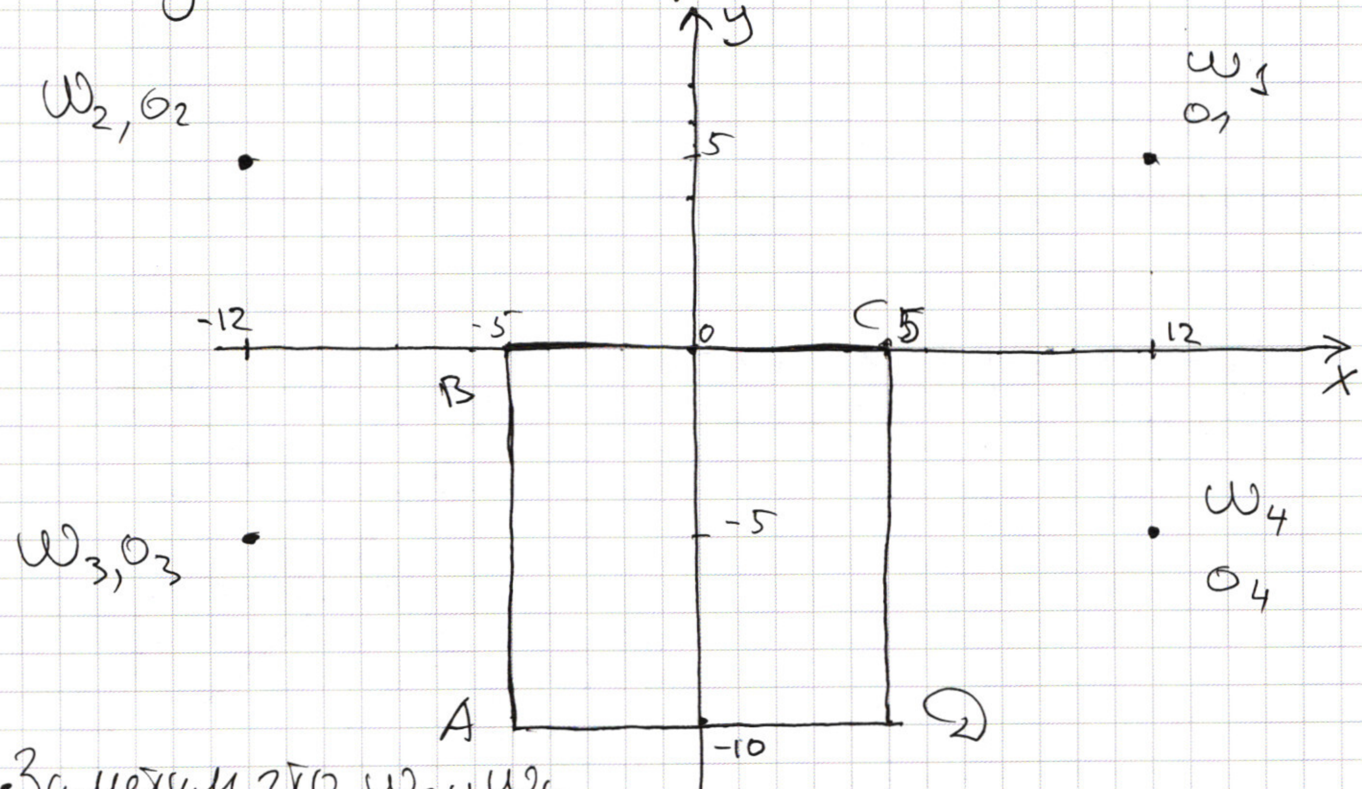


2) Рассмотрим (2):

$$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$$

центры O_1, O_2, O_3, O_4

Заметим, что мн-во представляет 4 окружности, симметричные отн осей и начала координат, с одинаковым радиусом $R=\sqrt{a}$



· Заметим, что ω_3 и ω_4 симметричны отн Oy ⇒

⇒ если ~~...~~ $\omega_3 \cap$ наш квадрат в k точках, то и $\omega_4 \cap$ в k точках

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

· Поэтому ~~[illegible]~~ будут 2 решения когда ω_3 и ω_4 коснуться соответствующих сторон ($x=-5$ и $x=5$), тогда $R=\sqrt{a}=|-12-(-5)|=7 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=7^2=49$.

· Далее при увеличении a будет ~~2~~ 4 решения (смотрим только на ω_3 и ω_4) ~~[illegible]~~ т.к. ~~[illegible]~~ точки пересечения ω_3 и ω_4 с квадратом симметричны отн $y=-5$. Поэтому если ω_3 и ω_4 имеют общие точки с квадратом (точнее его границей), то 2 решения будет $\Leftrightarrow a=49$, при этом ω_2 не будет пересекать квадрат, т.к. расстояние от O_2 до ближайшей точки квадрата (это вершина $(-5;0)$) равно $\sqrt{5^2+7^2} > \sqrt{7^2}$.

3) ω_2 и ω_1 симметричны друг другу отн $OY \Rightarrow$ 2 решения будет, когда ω_2 и ω_1 пересекают пом квадрат в ~~[illegible]~~ единственных ~~[illegible]~~ точках, а ω_3 и ω_4 — не пересекают.
Это случается, когда $\sqrt{a}=\sqrt{5^2+7^2}$ ($\rho(O_1;C)$) (этот вариант ~~[illegible]~~ не подходит, т.к. тогда $\rho(O_4;D)=\sqrt{5^2+7^2} \Rightarrow \omega_4$ будет иметь общие точки с квадратом.

Второй случай, когда $O_1A = O_2D = \sqrt{a} = R$

$R = \sqrt{a} = \sqrt{17^2 + 15^2} = \cancel{\sqrt{314}} = \sqrt{514}$

$\Downarrow$

$a = \cancel{314}\ 514$

~~не квадрат (с 2 по 14)~~

Заметим, что ω_1 будет иметь ровно одну общую точку с квадратом, как и ω_2, а также ω_3 и ω_4 не будут иметь общие точки, т.к. $\max\limits_{\text{квадрат (граница - любая его точка)}} \rho(O_3; K) \leq \rho(O_3; D) =$

$= \sqrt{17^2 + 5^2} < \sqrt{17^2 + 15^2}$

Ответ: $a = \{514; 49\}$

Задача 6

$R_1 = R_2 = 10$

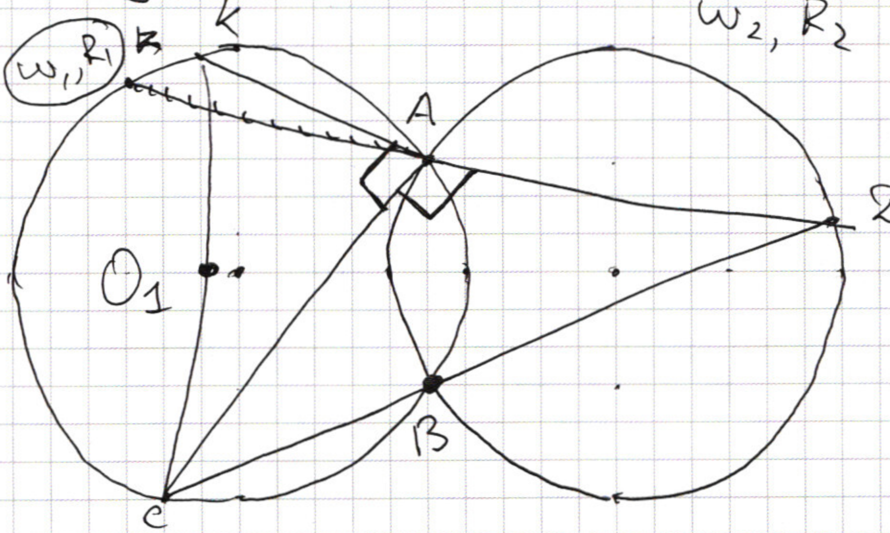
$\angle CAD = \frac{\pi}{2}$

$\ell \perp CD$

$B \in \ell$

$F \in \ell : BF = BD$

$CF = ?$



Решение:

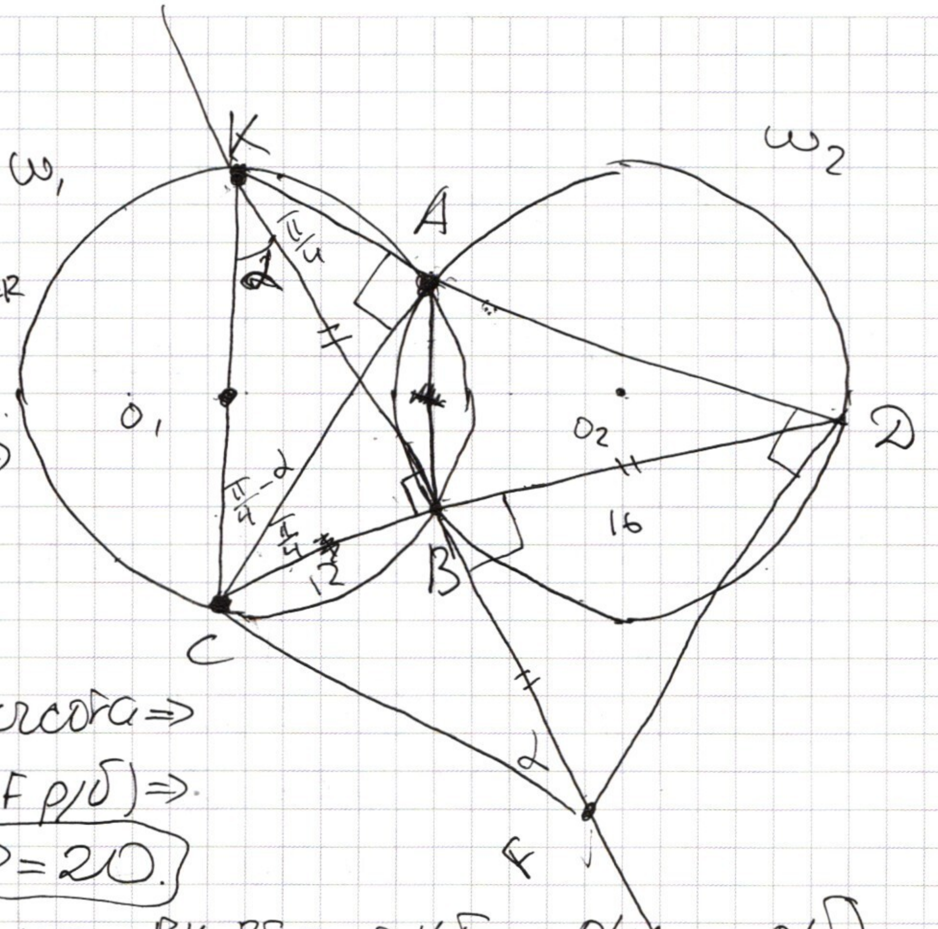
1) $\left.\begin{array}{l} DA \cap \omega_1 = K \\ \angle CAD = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CAK = \frac{\pi}{2} \end{array}\right) \Rightarrow CK$ - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBK = \frac{\pi}{2} \Rightarrow [CK] \in \ell$

~~2)~~ Замечаем, что (т.) $F \in BK$ (прямая), причем из условия A и F - по разные стороны от CD

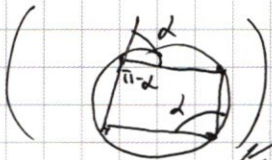
2) CK - диаметр $\Rightarrow CK = 2R_1 = 2R = 2 \cdot 10 = 20$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



3) Заметим, что

$\angle DAB = \angle KCB \Rightarrow$



$R_1 = R_2 = R$

$\Rightarrow BK = 2R\sin\angle KCB$

$BD = 2R\sin\angle DAB \Rightarrow$

$\Rightarrow BK = BD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle KCF$:

CB - медиана и высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow CK = CF$ ($\triangle CKF$ р/б) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{CF = CK = 2R = 20.}$

4) в $\triangle KDF$ DB = мед. и $BK = BF \Rightarrow \triangle DKF$ – п/у (уг. и р/б)

(углы: $45°, 45°, 90°$)

5) $BC = 12$, $KC = 20 \Rightarrow$ З $\angle CKB = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow BK = CK\cos\alpha = 20\cdot\frac{4}{5} = 16 = BF = BD$

6) в $\triangle ABD$: $\angle BDA = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ по т. sin: $AB = 2R\sin\angle BDA \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 20\cdot\frac{1}{\sqrt2} = 10\sqrt2$

~~$\sin\angle BCA = \frac{AB}{2R} = \frac{10\sqrt2}{20} = \frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow \angle BCA = \frac{\pi}{4}$~~

$\angle BCF = \frac{\pi}{2} - \angle CFB = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \sin\angle BCF = \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

~~7) в $\triangle BAC$: $\angle ACB = \frac{\pi}{4}$ $\angle CBA$~~

7) $AC = AD$

$DK = KF\sqrt{2} = 2\cdot BD\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cdot 16 = 32\sqrt{2}$

из $\triangle ACD$: $AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{12+16}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} = AC$

в $\triangle ACF$: $AC = 9\sqrt{2}$

$CF = 20$

$\angle ACF = \frac{\pi}{4} + \alpha$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\Downarrow$

$\sin\angle ACF = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{7}{5\sqrt{2}}$

$S_{\triangle ACK} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 9\cancel{\sqrt{2}}\cdot \cancel{20}^{2}\cdot\frac{7}{\cancel{5\sqrt{2}}} = 126$

Ответ: а) $CF = 20$

б) $S_{\triangle ACF} = 126 = 9\cdot 2\cdot 7$

Задача 7.

x и $y \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$ Найти: кол-во $(x; y)$ ↳ [illegible]

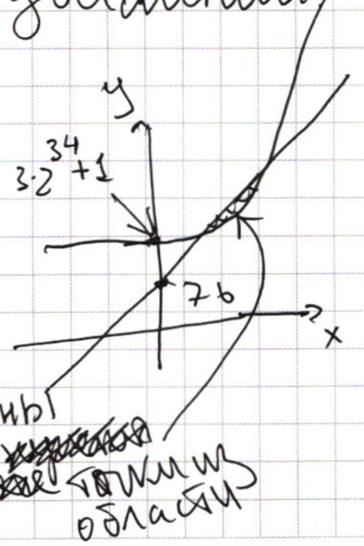
Решение:

1) Заметим, что мы имеем две линии:

прямая $y_1 = 76 + 2(2^{32}-1)x$

$y_2 > 3\cdot 2^{34}$ $\quad y_2 = 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$y_2 \leq y < y_1$ $\quad$ Изобразим их!



Заметим, что $\cap$ будет только при $x > 0$ и $y > 0$.

(функции непрерывны)

целые нужны ~~...~~ точки из области

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Посмотрим, что будет при $x = 38$:

$$76+2(2^{32}-1)\cdot 38 \ge y > 2^{38}+3\cdot 2^{34}$$

$$76+19\cdot 2^{34}-\underbrace{2\cdot 38}_{76} > 2^{34}\cdot 19$$

$$19\cdot 2^{34} > 2^{34}\cdot 19$$ – противоречие, но

при $x = 37$: $76+2(2^{32}-1)\cdot 37 > 2^{37}+3\cdot 2^{34}$

$$2^{34}\cdot 11 < 2^{33}\cdot 37+2$$

верно

$\Rightarrow$ $x \le 37$

3) Заметим, что при $x=\cancel{6}$: $2^6+3\cdot 2^{34} < 76-12+2\cdot 6\cdot 2^{32}$

$$64 < 64$$

а при $x=7$:

$$2^7+3\cdot 2^{34} < \overbrace{76-14}^{62}+2\cdot 7\cdot 2^{32}$$

$$190 = 128+62 < 2^{33}$$

верно

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x \ge 7$ Итого: $7 \le x \le 37$

$$\text{кол-во } y: \sum_{x=7}^{37}\left(76+2\times(2^{32}-1)-2^{x}-2^{34}\cdot 3+1\right)$$

~~кол~~

$$\Sigma = 76\cdot(37-7+1)+1\cdot(37-7+1)-2^{34}\cdot 3(37-7+1)+$$

$$+2(2^{32}-1)(7+\ldots+37)-(2^{7}+2^{8}+\ldots+2^{37}) =$$

$$= 76\cdot 31 + 31 - 3\cdot 31\cdot 2^{34} + 2^{33}\cdot\frac{(37+7)31}{2} - \cancel{2}\cdot\frac{(37+7)\cdot 31}{\cancel{2}} -$$

$$- 2^{7}\cdot(2^{31}-1) = 2387 - 93\cdot 2^{34} +$$

$$+ 31\cdot 44\cdot 2^{32} - 44\cdot 31 - 2^{38} + 2^{7} =$$

$$= (2387 - 1364 + 128) +$$

$$+ 1364\cdot 2^{32} - 2^{34}(93+16) =$$

$$= 1151 + 928\cdot 2^{32}$$

$$77\cdot 31 = 2387 \qquad 44\cdot 31 = 1364 \qquad 2387 - 1364 = 1023 \qquad 1364 - 436 = 928$$

Ответ: кол-во пар:

$$\boxed{1151 + 928\cdot 2^{32}}$$

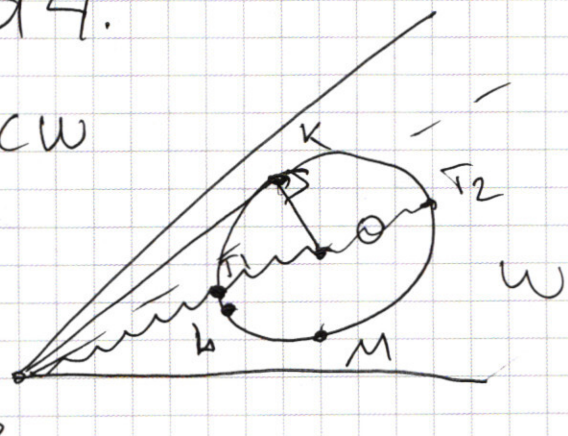
Задача 4.

$S_1 = 1$ ($\in \alpha_1$)

$S_2 = 16$ ($\in \alpha_2$) — площади касш α_1 и $\alpha_2 \perp SO$

$\angle KSO = ?$

$S_{\text{сег } KLM} = S = ?$



☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение: $\exists r$ - радиус ω

1) $\exists SO \cap \omega = T_1$ и T_2 $\exists ST_1 = h$, $ST_2 = h + 2r$

2) $T_1 \in \alpha_1$, $T_2 \in \alpha_2$ площади сечения α_1 и α_2 трехгранным углов явл подобными треуг. $\Rightarrow K = 4$ коэф. подобия

$1 \cdot K^2 = 16$
$K = 4$

$\Rightarrow \frac{ST_2}{ST_1} = K = 4$

$\frac{h+2r}{h} = 4$

$1 + 2\frac{r}{h} = 4 \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{2}{3}$

в $\triangle SKO$ $\angle SKO = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\angle KSO = \frac{r}{h+r} = \frac{1}{\frac{h}{r}+1} =$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\angle KSO = \frac{4}{5}$

3, 4, 5 - Пифаг тройка
$3^2 + 4^2 = 5^2$

Итого: $\sin\angle KSO = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$.

(*) Задача 2 продолжение

3) $2\sin^2 4x - 2\sin 4x - 2\cos 14x + 2\sin 4x \cos 14x = 0$

$2\sin^2 4x - 2\sin 4x + 2\cos 14x(\sin 4x - 1) = 0$

$2(\sin 4x - 1)(\sin 4x + \cos 14x) = 0$

$(\sin 4x - 1)\left(\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right)\right) = 0$

- $\sin 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}$
- $\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 14x\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos\left(14x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$=0$ $\qquad\qquad$ $=0$

$\frac{\pi}{4} - 5x = -\pi k$

$x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{20}, k \in \mathbb{Z}$

$14x - \frac{\pi}{4} = \pi m + \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi m}{14} + \frac{3\pi}{56}, m \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} \\ \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{20} \\ \frac{\pi m}{14} + \frac{3\pi}{56} \end{array}\right.$ $\quad n, k, m \in \mathbb{Z}$

* ответы не пересекаются.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)