МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ $3\cdot 2\cdot 1$

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos$ $\quad 289 + 225 = 514$ $\quad \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6\cdot 6\cdot 2}$

$2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\sqrt{2}\sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$ $\quad 10\cdot 7\cdot 8 = 560$

$\sqrt{2}\sin 7x\; \sin 7x - (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos$ $\quad \sqrt{17^2+15^2} = \sqrt{289+225}$

$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k$; $x = \frac{2\cdot\pi}{5\cdot 8} + \frac{2}{5}\pi k$; $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k$

$\frac{9}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi m$; $\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi m$; $x = \frac{2\cdot 3\pi}{9\cdot 8} + \frac{2}{9}\pi m =$

$= \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, m \in \mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{289}$

$\frac{2}{5}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{20}$ $\quad 289 + 225 = 514$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi - \pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

$\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{2}{9}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta$

$\sqrt{9261} = 9$ $\quad 189 \times 9 = 1701$ $\quad 9261 = 3087\cdot 3 = 1029\cdot 3^2 = 343\cdot 3^3 = 7^3\cdot 3^3$

$18\cdot 1161$; 81

9261 : 3 = 3087; 3087 : 3 = 1029; 1029 : 3 = 343; 343 : 9; 343 : 7 = 49

$49 \times 7 = 343$

3 3 3 7 7 7 1 1

$343 \times 81 = 27783$ $\quad 343 \times 81 = 27783$ $\quad 343 \times 27 = 9261$

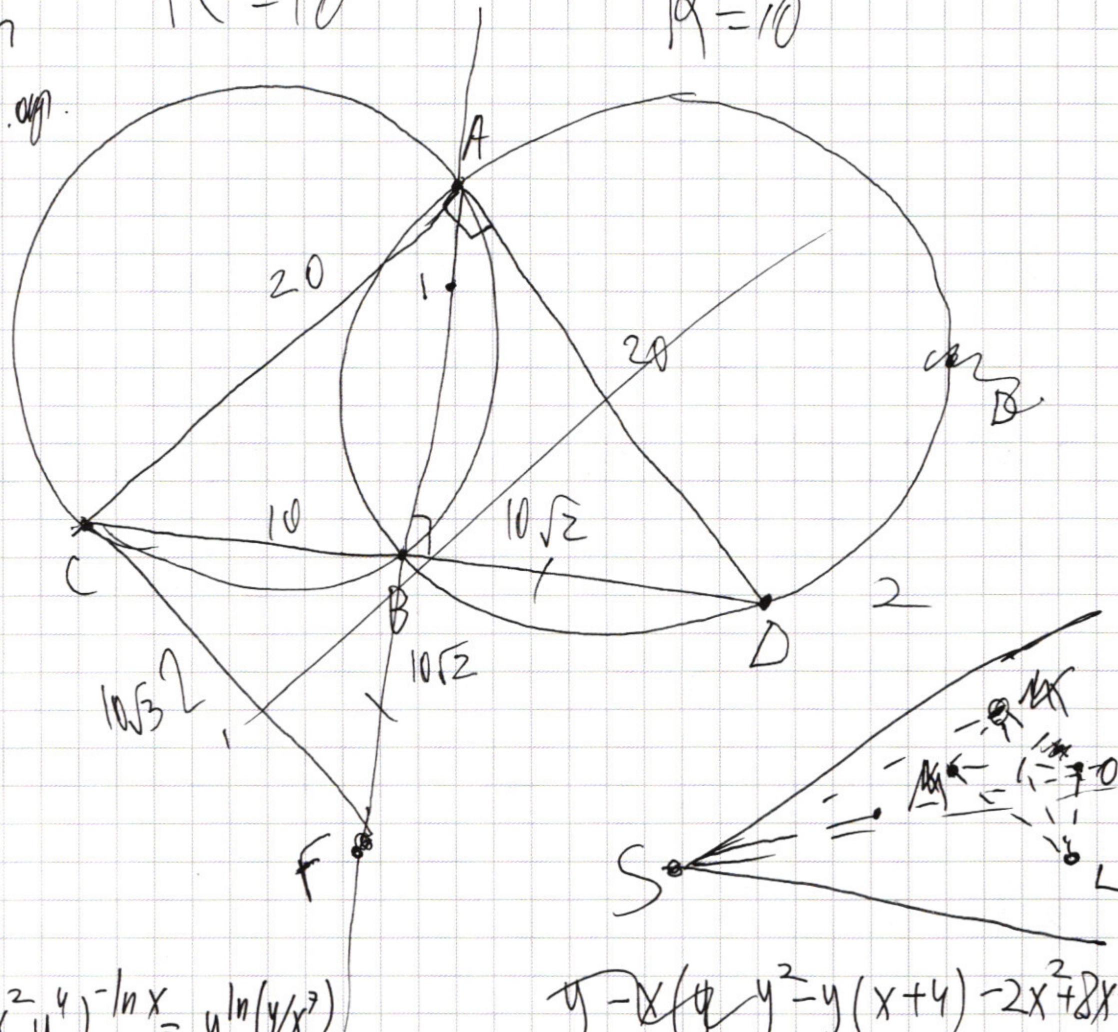
$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{6\cdot 6\cdot 2}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№6.

Где центр?
Ур CD пересек. окр.

$R=10$ $\qquad$ $R=10$



№3. $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y \end{cases}$

~~y - x(y~~ $y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$

$= 9x^2 - 24x + 16 =$

$= (3x-4)^2$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} = 4-x \end{array}\right.$

$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$x>0:$ $\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$1 = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} \cdot (16x^6)^{\ln x}$

$2^{2\ln x} = (2x)^{\ln 2}$

$2^{2\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot 2$

$1 = (2x)$ $\quad 16^{-\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} \cdot x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$2^{-4\ln x} \cdot \cancel{x^{-6\ln x}} = \frac{2^{\ln 2}}{2^{6\ln x}} \cdot \frac{x^{\ln 2}}{\cancel{x^{6\ln x}}}$ $\qquad 2^{2\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^{2\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$, $2^{2\ln x - \ln 2} = x^{\ln 2}$; $2^{2\ln x - \ln 2} = 2^{\log_2 x \cdot \ln 2}$

$2\ln x - \ln 2 = \log_2 x \cdot \ln 2$; $2\frac{\ln x}{\ln 2} - 1 = \log_2 x$

$2\log_2 x -$

$(2^2 \cdot 2^8)^{-\ln 2} = 2^{2\ln(\cancel{\ln}\, 2}$ $\quad (x^2 \cdot (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\frac{4-x}{x^7}}$

$x^2 \cdot (x-4)^4 = x^2 \cdot ((x-4)^2)^2 = (x(x-4)^2)^2$

$(x(x-4)^2)^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - \ln x^7}$

$(x(x-4)^2)^{-2\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln x^7}}$

$(x)^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{7\ln x}}$

$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{3\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - 3\ln x}$

$e^{\cancel{\ln x}-2\ln^2 x} = e^{\ln^2(4-x) - 3\ln x \cdot \ln(4-x)}$

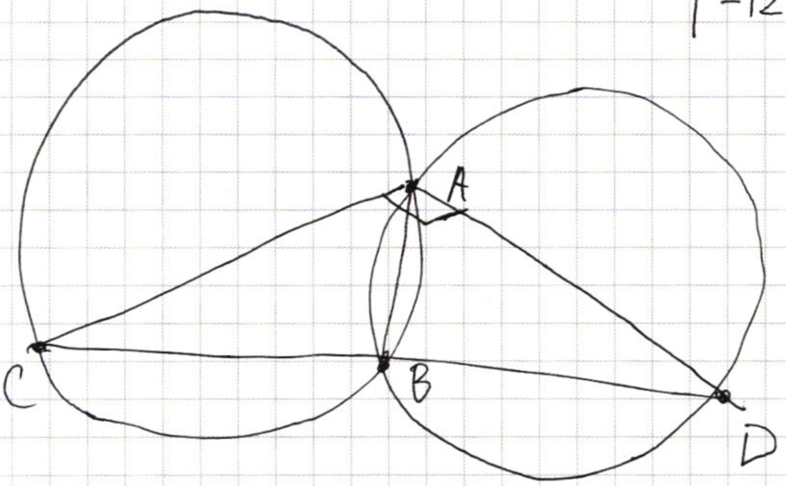
$-2\ln^2 x = \ln^2(4-x) - 3\ln x \cdot \ln(4-x)$

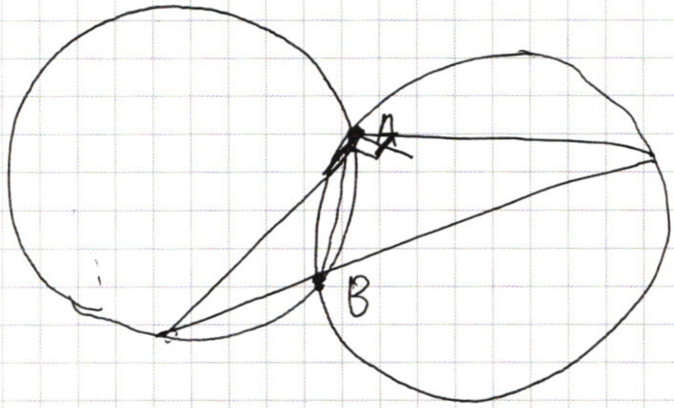
$\ln(4-x) = t$, $\ln x = v$: $t^2 - 3tv + 2v^2$

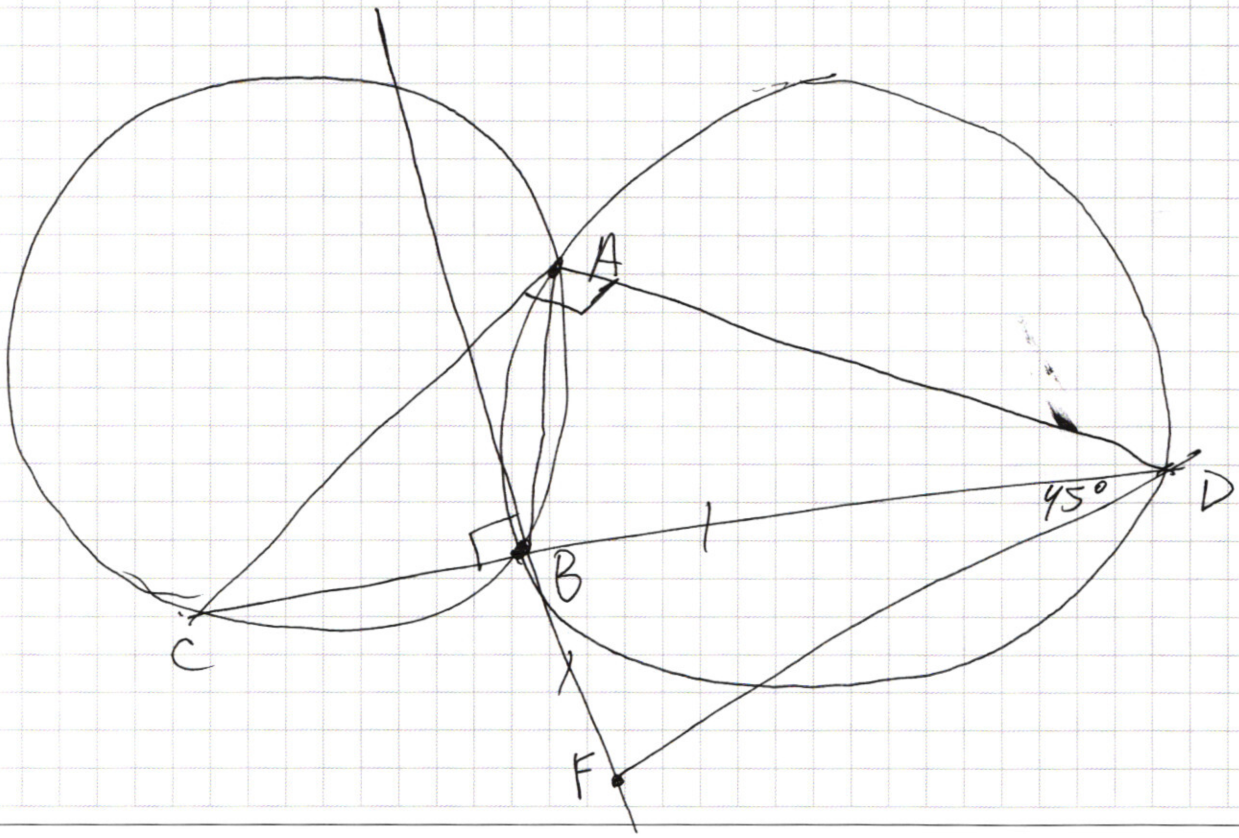
$4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} =$

N6. $|\cancel{2+8}|\ |-12+5+5| + |\cancel{-12}\ 5+12+5|$

$|-12-5+5| + |-5+12+5| = 10$







ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

~~Пользуясь ТП.~~ Преобразуем левую часть:

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x \sin 2x$; $\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cos 2x$

$-2\sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 2x = \sin 2x & (1) \\ 2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0 & (2) \end{array}\right.$

(1): $\sin 2x = \cos 2x$. Если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = 0$ - противоречие, т.к. $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow$ можно поделить обе части на $\cos 2x$: $\operatorname{tg} 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}}$

(2): $2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \mid : 2$

$\sin 7x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)=0\\ \cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{8}=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

~~Ответ~~ Собирая все полученные решения записываем ответ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

№1. Т.к. $9261=3^3\cdot 7^3\cdot 1$, ~~и~~ а число восьмизначное ~~и~~ (т.е.

_ _ _ _ _ _ _ _

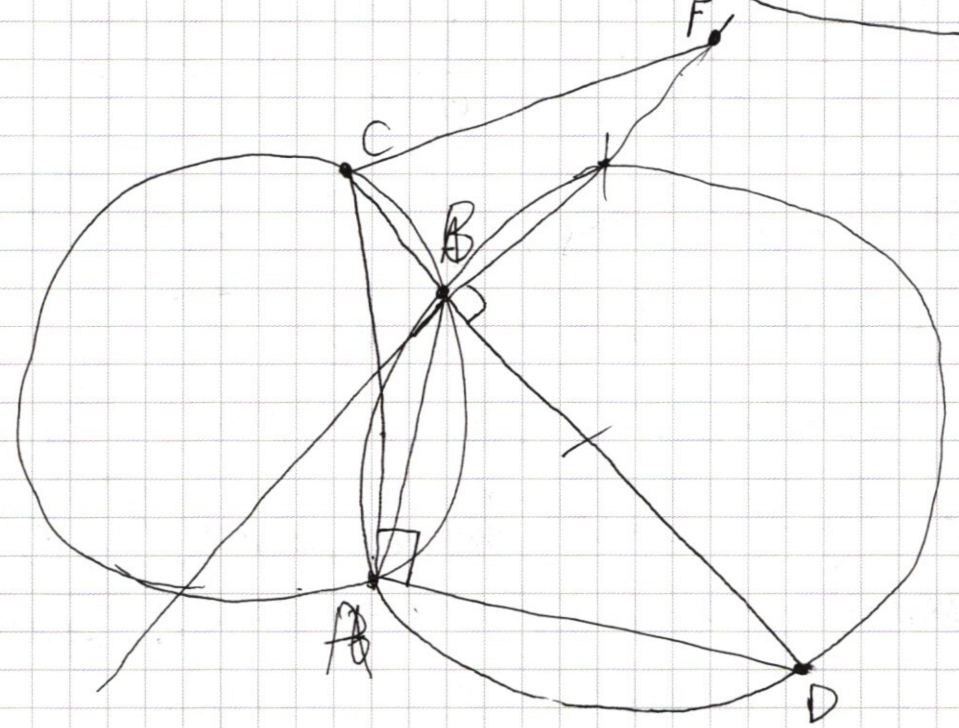
всего восемь множителей) и произведение его цифр равно $9261=3^3\cdot 7^3\cdot 1^2$, то в числе три цифры 3, три цифры 7 и ~~1~~ две цифры 1. Поэтому задача сводится к отысканию кол-ва восьмизначных чисел с тремя цифрами 3 и 7 и двумя ~~двойками~~ единицами. На первую позицию мы можем поставить одну из восьми цифр, на вторую одну из 7, на третью - одну из 6, ..., на первую - ~~од~~ одну оставшуюся. По правилу произведения получаем $8\cdot 7\cdot\ldots\cdot 1=8!$ способов. Но при таком подсчёте мы ~~уже~~ посчитали несколько раз перестановки одинаковых цифр 7, 3 и 1 в числе (~~которые~~ ~~порядок которых не меняет~~, поэтому в действительности искомое ~~число~~ количество равняет-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№8 $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{6}\cdot \cancel{6}\cdot 2} = \frac{1\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8}{2} = 1\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 4 =$

$= 80\cdot 7 = 560$ способов (~~мы поделили~~ для каждой из $8!$ перестановок существовало $3!$ перестановок цифры 3, $3!$ перестановок цифры 7 и $2!$ перестановок цифры 1 $\Rightarrow$ кол-во различных вариантов равно $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}$) Ответ: 560 ~~способов~~ чисел.

№6.



№3.

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-ние как квадратное относ. y: $y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{x+4+3x-4}{2}=2x \\ y=\frac{x+4-3x+4}{2}=4-x\end{array}\right.$$ и система принимает вид: $\left\{\begin{array}{l}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)} \\ \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=4-x\end{array}\right. \\ \cancel{x\neq 1}\end{array}\right.$

Рассмотрим первой случай, $y=2x$; подставим $y=2x$ в первое ур-ие: $(16\cdot x^6)^{-\ln x}=(2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$

ОДЗ: $x>0$. На ОДЗ равносильные преобразования:

$$16^{-\ln x}\cdot x^{-6\ln x}=2^{(\ln 2-\ln x^6)}\cdot x^{(\ln 2-\ln x^6)}$$

$$2^{-4\ln x}\cdot x^{-6\ln x}=\frac{2^{\ln 2}}{2^{6\ln x}}\cdot\frac{x^{\ln 2}}{x^{6\ln x}} \quad \Big|\cdot\left(2^{6\ln x}\cdot x^{6\ln x}\right)$$

$2^{2\ln x}=2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2}$; $2^{2\ln x-\ln 2}=2^{\log_2 x\cdot\ln 2}$;

$2\ln x-\ln 2=\log_2 x\cdot\ln 2 \quad \Big| :\ln 2\neq 0$

$2\frac{\ln x}{\ln 2}-1=\log_2 x$; $2\log_2 x-1=\log_2 x$; $\log_2 x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2\cdot 2=4$. Получаем решение $(2;4)$

Второй случай: $y=4-x$; $\cancel{\Leftrightarrow x=4-y}$. Подставим в первое ур-ие: (ОДЗ: $x>0$, $\frac{y}{x^7}>0 \Leftrightarrow y>0$; $y>0 \Leftrightarrow 4-x>0$, $x<4$) $\Rightarrow$

$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x}=(4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^7})}$ $\Rightarrow$ ОДЗ: $0<x<4$

$(x(4-x)^2)^{-2\ln x}=\frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln x^7}}$; $x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{-4\ln x}=\frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{7\ln x}}$

Умножим на $(4-x)^{7\ln x}$: $x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{3\ln x}=(4-x)^{\ln(4-x)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{e^{-2\ln^2 x}}$ Разделим на $(4-x)^{3\ln x}$:

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)-3\ln x}$$

$$e^{-2(\ln x)^2} = e^{(\ln(4-x))^2-3\ln x\cdot\ln(4-x)}$$

Пусть $\ln x = t$, $\ln(4-x) = v$, тогда

$v^2-3tv+2t^2=0$. Рассмотрим его как кв. отн. v: $D = 9t^2-4\cdot 2t^2 = t^2$; $\left[\begin{array}{l} v=\frac{3t+t}{2}=2t \\ v=\frac{3t-t}{2}=t \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln(4-x)=2\ln x \\ \ln(4-x)=\ln x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{\ln(4-x)=\ln x^2} \end{array}\right.$

~~Т.к. на ОДЗ~~ $0<x<4$, получаем: $\left[\begin{array}{l} x^2=4-x \\ x=4-x \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-4=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$

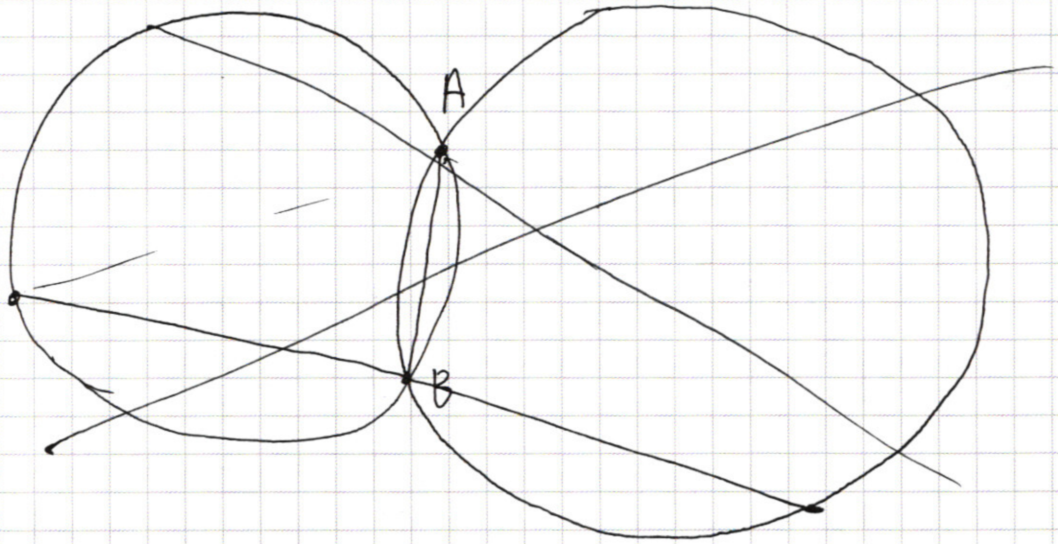
Т.к.

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2=4-x \\ x=4-x \end{array}\right. \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=2 \end{array}\right. \\ x>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{array}\right.$

$\left(x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \notin (0;4)\right)$. Т.к. $y=4-x$ в этом случае получаем пары $\left(2;2\right)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

<u>Ответ</u>: $(2;4)$; $(2;2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

№6



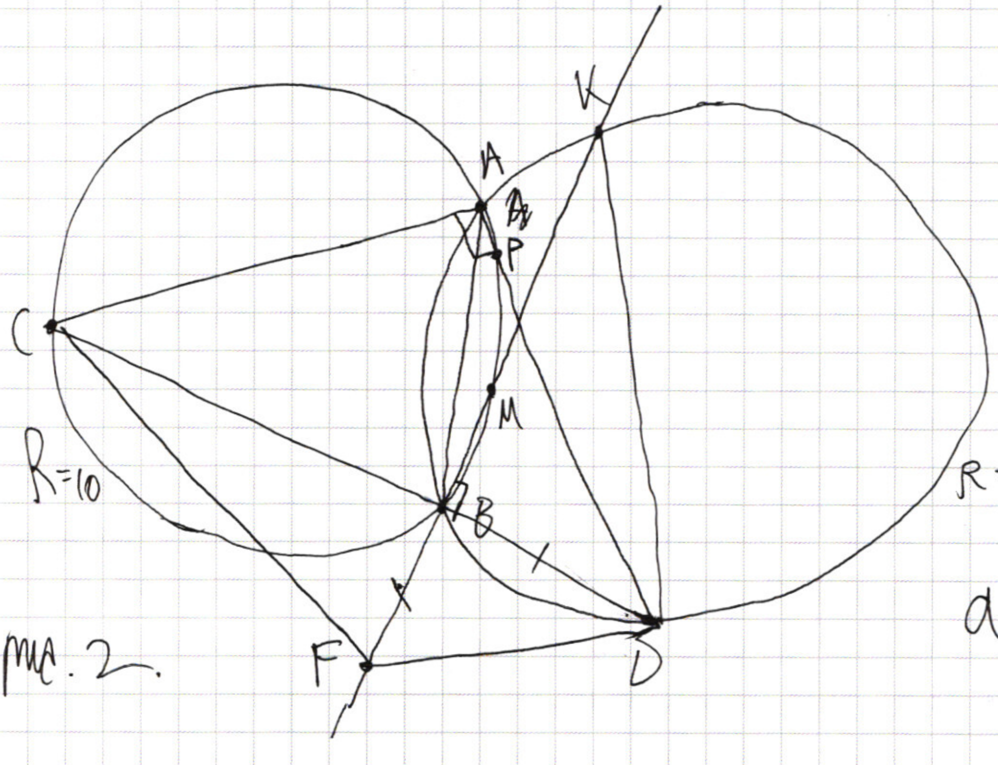


рис. 2.

a) CF — ?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~а) CF~~ а) Пусть перпендикуляр FB пересекает первую окр-ть вторично в т-ке M, а вторую вторично в т-ке K (см. рис. 1), тогда $\angle CBM$ - вписанный, $\angle CBM = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow CM$ - диаметр. ~~С другой стороны.~~ Пусть прямая AD вторично пересекает первую окр-ть в т-ке P (см. рис. 1), тогда $\angle CAP$ - вписанный, но т.к. $\angle CAP = 90°$, то CP - ~~диам~~ диаметр, но CM тоже диаметр $\Rightarrow P = M$. Значит $MB \perp CD$ (см. рис. 2) (см. решение на стр. 12)

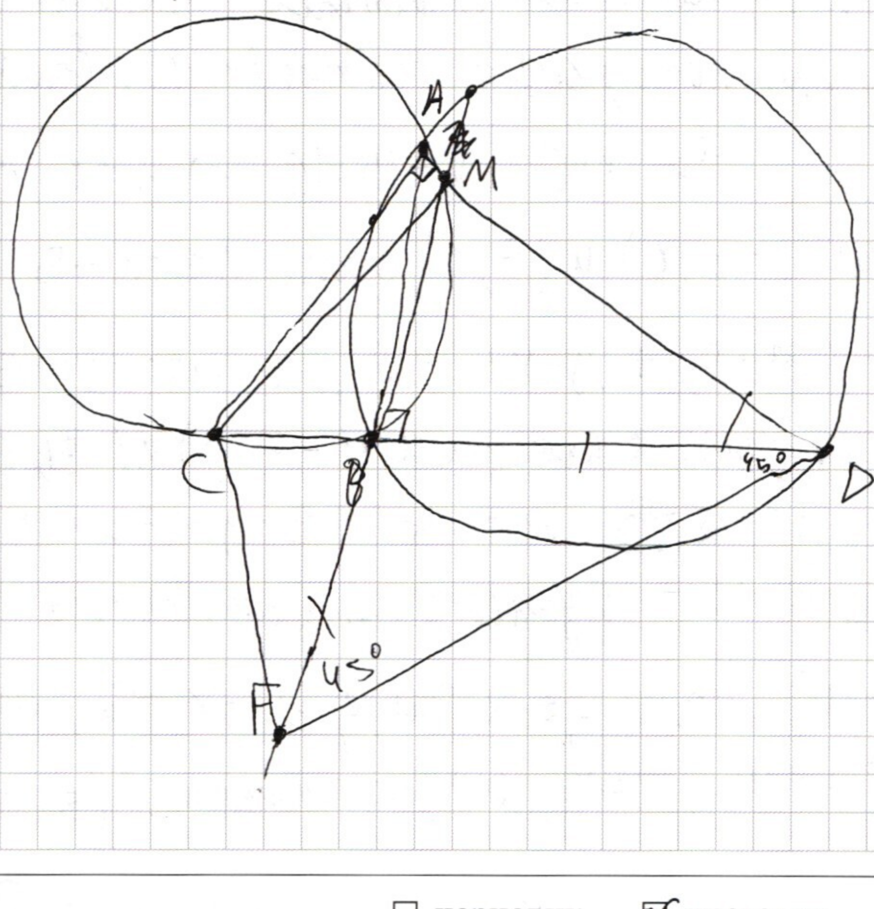


рис. 2

№5. $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a \end{cases}$ a? : 2 решения.

~~Вз $a<0$~~ При $a<0$ второе ур-ие не имеет решений, т.к. $(|x|-12)^2+(|y|-5)^2 \geq 0$. При $a=0$, ~~второе ур-ие~~ ~~дает~~ сис-ма принимает вид: $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 \\ |x|=12 \\ |y|=5 \end{cases}$

$\begin{cases} |x|=12 \\ |y|=5 \end{cases}$ ~~дает~~ 4 р-ния $(12;5)$; $(12;-5)$; $(-12;5)$; ~~$(-12;5)$~~ $(-12;-5)$ – ~~как~~ подстановкой убеждаемся, что ни одна из ~~решений~~ пар не является решением ~~ур~~ сис-мы.

При $a>0$ второе ур-ие задаёт 4 окр-ти радиуса $\sqrt{a}$ с центрами в т-ках $O_1(12;5)$; $O_2(-12;5)$; $O_3(12;-5)$; $O_4(-12;-5)$. ~~Первое~~ Множ-во, которое задаёт первое ур-ие можно построить на п-ти $(x;y)$. Если $y \geq -x-5$ и $y \geq x-5$, то $2y+10=10 \Leftrightarrow y=0$, т.е. отрезок с концами $(-5;0)$ и $(5;0)$. Если $y \leq -x-5$ и $y \geq x-5$: $-x-\cancel{y}-5+\cancel{y}-x+5=10$; $-2x=10 \Leftrightarrow x=-5 \Rightarrow$ в этом случае – отрезок с концами $(-5;0)$ и $(-5;-10)$. Если $y \leq x-5$ и $y \leq -x-5$, то $-\cancel{x}-y-5-y+\cancel{x}-5=10$, $-2y-10=10$, $y=-10$ – отрезок с концами в т-ках $(-5;-10)$ и $(5;-10)$. Если $y \leq x-5$ и $y \geq -x-5$, то $x+\cancel{y}+5-\cancel{y}+x-5=10$, $x=5$ – отрезок с концами в $(5;-10)$ и

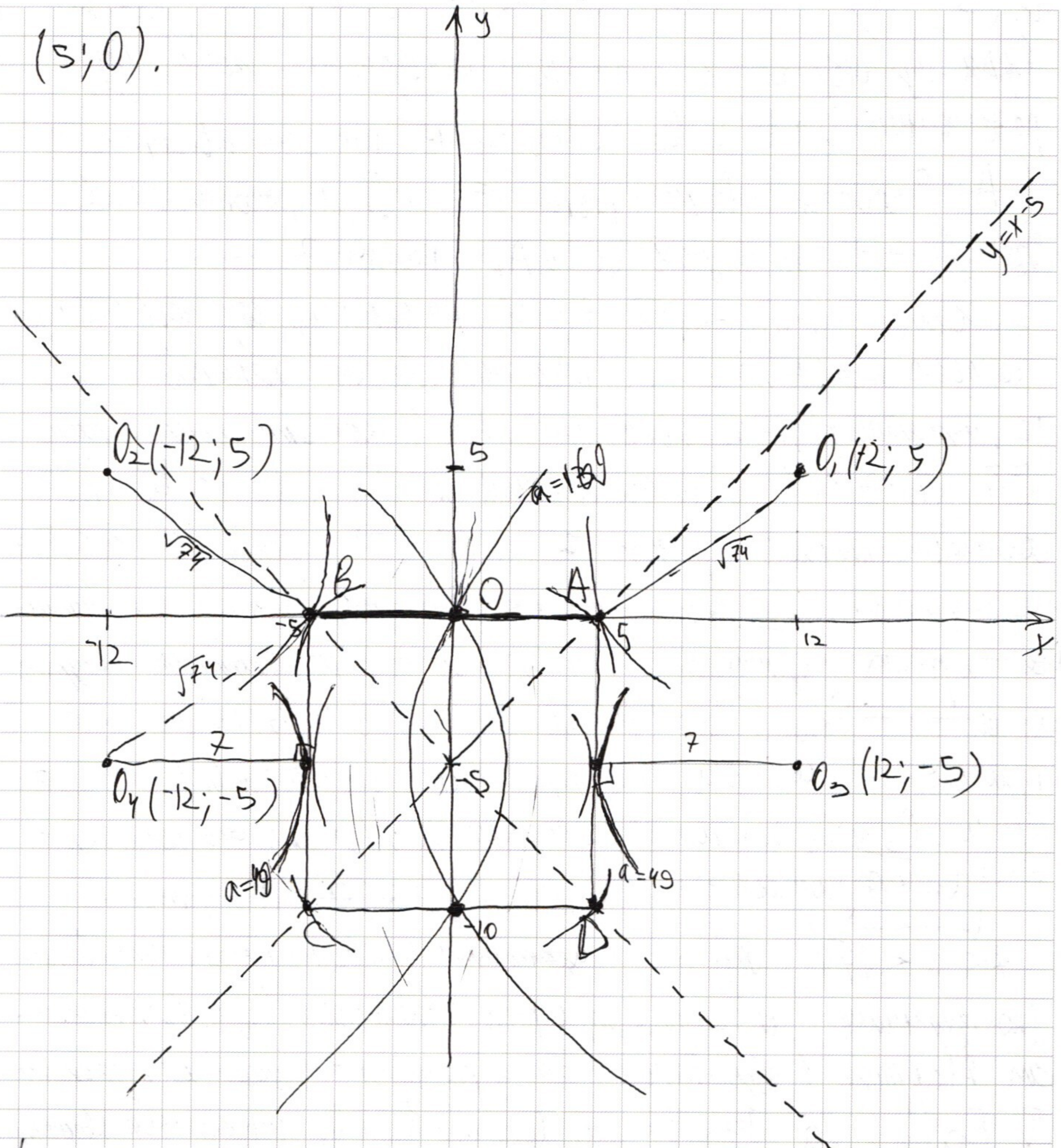
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(5;0)$.



Итого первое ур-ие задаёт на плоскости квадрат с вершинами в т-ках $(5;0)$; $(-5;0)$; $(-5;-10)$; $(5;-10)$

Чтобы система имела 2 решения квадрат должен иметь ровно 2 точки пересечения с окружностями. Пусть ~~I.~~ квадрат имеет вершины $A(5;0)$, $B(-5;0)$, $C(-5;-10)$; $D(5;-10)$. ~~I. Если $0<a<74$ ($0<\sqrt{a}<\sqrt{74}$), то ни одна из окр-ей не пересекает квадрат, т.к. ОО расстояние от O_1 и O_2 до ближайшей точки квадрата (A и B соответственно) равны $\sqrt{74}$~~ ~~а расстояния от O_3 и O_4 до сторон BC и AD равны 7~~

I. Если $0<\sqrt{a}<\sqrt{49}=7$, то ни одна из окр-ей не пересекает квадрат, т.к. расстояние от центров O_1 и O_2 до ближайших точек квадрата (A и B соответственно) равны $\sqrt{74}>\sqrt{49}=7>\sqrt{a}$, а расстояния от O_3 и O_4 до BC и AD соответственно равны $7>\sqrt{a}$. $\Rightarrow$ случай $0<\sqrt{a}<\sqrt{49}=7$ не подходит. II. ~~Если $\sqrt{49}<a<\sqrt{74}$, то по той же причине окр-ти~~ с центрами O_1 и O_2 ~~всё ещё не пересекают квадрат, а ок~~ Если $a=49$, то окр-ти O_1 и O_2 по тем же причинам всё ещё не пересекают квадрат, а окр-ти с центрами O_3 и O_4 касаются его сторон BC и AD соотв. $\Rightarrow$ 2 решения $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\boxed{a=49}$ подходит. III. ~~Если $7<\sqrt{a}<13$, то~~

$7<\sqrt{a}<\sqrt{74}$, окр-ти с центрами O_1 и O_2 не пересекают квадрат (по-прежнему), ~~а~~ каждая из окр-ей с центрами O_3 и O_4 пересекает квадрат в двух точках $\Rightarrow$ 4 решения $\Rightarrow$ случай не подходит.

IV. Если $\sqrt{a}=\cancel{7}\sqrt{74}$, то окр-ти O_1 и O_2 пересекают квадрат ~~в~~ соотв-но в A и B. Окр-ти O_3 и O_4 ~~пере каждая~~ пересекают квадрат в т-ках A, D и B, C соответственно ~~двух точках~~ $\Rightarrow$ 4 решения $\Rightarrow$ случай не подходит. V. Если $\sqrt{74}<\sqrt{a}<\sqrt{144}$ каждая из 4-х окр-ей пе-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Если $\sqrt{a}=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}$~~ рассекает квадрат в 8-ми точках $\Rightarrow$ 8 р-ий $\Rightarrow$ случай не подходит. VI. Если $\sqrt{a}=\sqrt{144}$, то окр-ти O_4 и O_3 касаются в т-ке $(0;-5)$ и пересекают квадрат каждая в двух точках, окр-ти O_2 и O_1 также пересекают квадрат каждая в двух т-ках $\Rightarrow 2\cdot 4=8$ решений $\Rightarrow$ случай не подходит. VII. Если $\sqrt{144}<\sqrt{a}<\sqrt{169}$, каждая из окр-ей пересекает квадрат в двух точках $\Rightarrow$ 8 р-ий $\Rightarrow$ данный случай не подходит. VIII. Если $\sqrt{a}=\sqrt{169}=13$, то окр-ти O_3 и O_4 пересекаются на сторонах квадрата (2 решения) в т-ках $(0;0)$ и $(0;-10)$, а окр-ти O_1 и O_2 проходят через т-ку ~~A (т.к. O_2~~ $(0;0)$ (т.к. $O_2O=13=O_1O$) и ещё через две ~~разные~~ точки на сторонах квадрата $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 4 решения $\Rightarrow$ случай не подходит. ~~9-й случай.~~ ~~Если $\sqrt{a}\ 13=\sqrt{169}<\sqrt{a}<$~~ Случай $13<\sqrt{a}<\sqrt{289}$ не подходит, т.к. окр-ти O_3 и O_4 пересекают квадрат в 4 т-ках $\Rightarrow$ уже 4 решения $\Rightarrow$ этот случай не подходит. Если $\sqrt{a}=\sqrt{289}=17$, то окр-ть O_3 касается BC, O_4 – AD а O_1 и O_2 пересекают квадрат дополнительно $\Rightarrow$ больше двух решений $\Rightarrow$ случай не подходит. Если ~~$17<\sqrt{a}$~~ $\sqrt{a}>17$ то окр-ти O_3 и O_4 не пересекают квадрат, т.к. расстояние от O_3 до BC равно 17 и от O_4 до AD равно 17.

Если $17 \leq \sqrt{a} < \sqrt{17^2+15^2} = \sqrt{514}$ окр-ти O_1 и O_2 пересекают квадрат в двух точках каждая $\Rightarrow$ решений 4 $\Rightarrow$ данный случай не подходит (~~O_3 и O_4 не~~ окр-ти O_3 и O_4 не пересекают квадрат). Если $\sqrt{a} = \sqrt{514}$, ~~что~~ $= O_2D = O_1C$, то окр-ть O_2 пересекает квадрат в т-ке D, окр-ть O_1 - в т-ке C, а окр-ти O_3 и O_4 не пересекают квадрат (было указано выше) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\sqrt{a} = 514$ 2 решения $\Rightarrow$ $\boxed{a = 514}$ подходит

Если $\sqrt{a} > \sqrt{514} = O_2D = O_1C$, то ни одна из ~~из~~ окр-ей не пересекает квадрат. Собирая все полученные зн-ия пар-ра a, записываем ответ.

<u>Ответ</u>: $a = 49$, $a = 514$.

№6. Т.к. CM - диаметр, то $CM = 2R = 20$.