

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

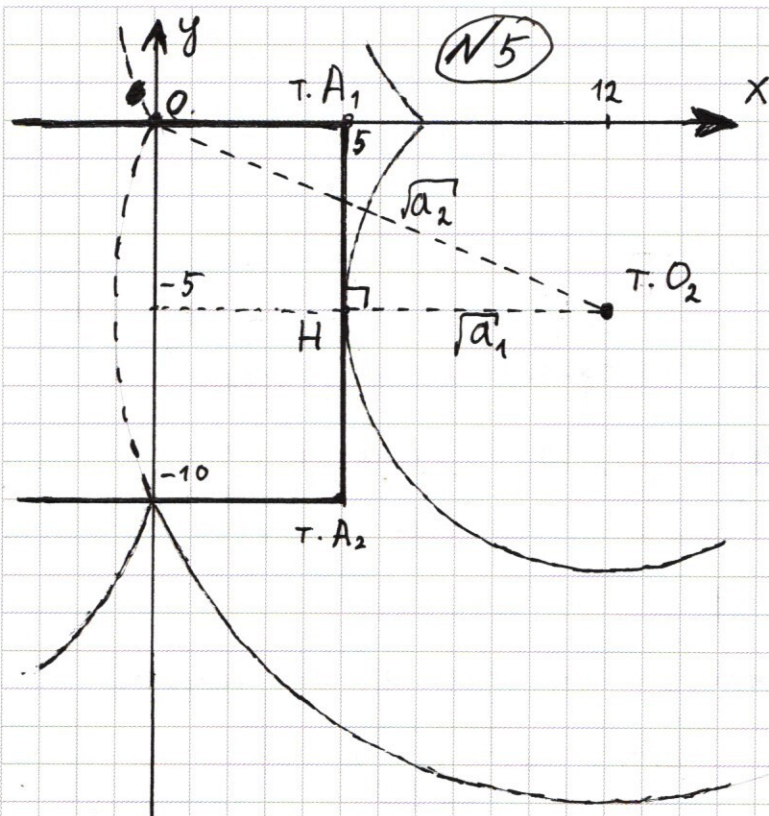
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (A) \\ (|x-12|)^2 + (|y-5|)^2 = a & (B) \end{cases}$$

1) Рассмотрим (A):

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0; & x \geq -5-y \\ y-x+5 \geq 0; & x \leq y+5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A: & x+y+5+y-x+5=10 \\ & y=0; \quad x \in [-5; 5] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0; & y \geq -5-x \\ y-x+5 \leq 0; & y \leq x-5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A: & x+y+5-y+x-5=10 \\ & x=5; \quad y \in [-10; 0] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0; & y < -5-x \\ y-x+5 \geq 0; & y \geq x-5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A: & -x-y-5+y-x+5=10 \\ & x=-5; \quad y \in [-10; 0] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0; & x < -5-y \\ y-x+5 < 0; & x > y+5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A: & -x-y-5-y+x-5=10 \\ & y=-10; \quad x \in [-5; 5] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Следовательно (A) образует квадрат с координатами
вершин: ~~A1(-5;0); A2(-5;-10); A3(5;0); A4(5;-10)~~ $A_1(5;0); A_2(5;-10); A_3(-5;0); A_4(-5;-10)$

2) Рассмотрим (B): т.к. x и y везде взяты по модулю,
то, график (B) в $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ будет отзеркален по обеим
координатным осям

3) (B) для $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Представляет собой окружность радиуса $\sqrt{a}$, с координатой центра: $O_1(12; 5)$

4) Аналогично: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} O_2(12; -5)$
 $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} O_3(-12; 5)$
 $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} O_4(-12; -5)$

5) $A_1 A_2$ - перпендикулярна оси x

$$A_1 H = A_2 H; H \in A_1 A_2$$

6) так же O_2 , ~~лежит~~ на серединном перпендикуляре $A_1 A_2$
~~лежит~~ $\Rightarrow$ если часть окружности, ~~лежит~~ лежащая на $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$, пересекает ~~(A)~~ не в точке H , то она имеет ещё одно пересечение с (A)

7) т.к. эта ситуация симметрична оси y , то только

~~два~~ решения может быть если:

$$\text{для } \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

а) Окружность с центром в т. O_2 касается стороны $A_1 A_2$

б) ~~Окружность~~ Окружности $O_2 \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ y < 0 \end{pmatrix}$ и окружность $O_4 \begin{pmatrix} x < 0 \\ y < 0 \end{pmatrix}$ касаются квадрата в двух одинаковых точках

$\uparrow$
 (A)

8) ~~Решение~~ : а) $O_2 H = \sqrt{a}$; $a = O_2 H^2 = (12 - 5)^2 = \boxed{49}$

б) $\sqrt{a} = p(O_2; 0) = \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$

$$a = 25 + 144 = \boxed{169}$$

Ответ: $a = \begin{bmatrix} 169 \\ 49 \end{bmatrix}$

$$13) F = O_2 B \cap AD \quad \textcircled{N6} (\text{продолжение})$$

$$\angle DFB = \angle O_2 FA = 90^\circ - \alpha$$

$$14) \angle FBD \neq 90^\circ + \angle O_1 BC = 180^\circ$$

$$\angle FBD = 45^\circ + \alpha$$

~~$$15) \angle DPB = \angle FDB = (45^\circ + \alpha)$$~~

$$15) AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot DC = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (BD + BC) = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$BD + 2R \cdot \cos(45^\circ - \alpha) = 2\sqrt{2} \cdot R \cdot \cos \alpha$$

$$BD + 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) = 2\sqrt{2} R \cdot \cos \alpha$$

$$BD = \sqrt{2} R \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$BC = \sqrt{2} \cdot R \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$16) CF^2 = BC^2 + BD^2 = 2R^2 \cdot (\cos^2 \alpha - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$CF^2 = 4R^2 \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4R^2$$

$$\boxed{CF = 2R} = 20$$

$$17) BC = \sqrt{2} \cdot R \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

~~$$\frac{BC}{\sqrt{2}R} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha$$~~

$$\frac{BC}{\sqrt{2}R} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha$$

$$1 - \sin^2 \alpha = \frac{BC^2}{2R^2} - \frac{\sqrt{2} \cdot BC}{R} \cdot \sin \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha - \frac{6\sqrt{2}}{5} \sin \alpha + \frac{18}{25} - 1 = 0$$

$$\sin^2 \alpha - \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin \alpha + \frac{7}{50} = 0$$

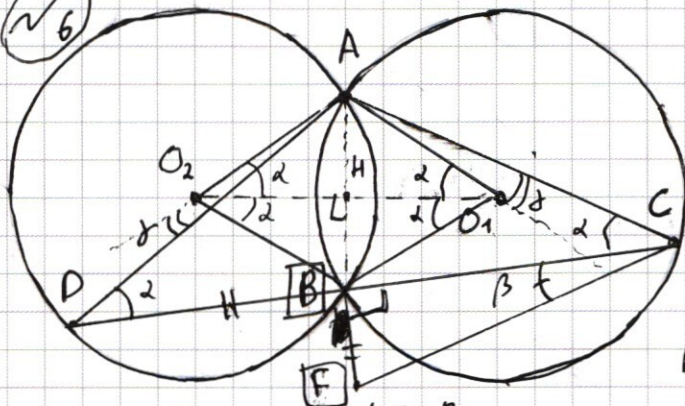
$$D = \frac{9 \cdot 2}{25} + \frac{2 \cdot 7}{25} = \frac{32}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 2$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{5} \pm \frac{4\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{(3 \pm 4)\sqrt{2}}{10} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{10} \\ \frac{7\sqrt{2}}{10} \end{cases}$$

Продолжение
на 5 стр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$$\Rightarrow \angle ACB = \frac{\angle AO_1B}{2} = \alpha$$

1) $R_1 = R_2 = R = (10 \text{ см})$

$$\Rightarrow \angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1 =$$

$$= \angle BO_1O_2 = \angle BO_2O_1 = \alpha$$

2) $\angle AO_1B$ и $\angle ACB$ опираются
на общую дугу - $\overset{\smile}{AB}$

3) $\angle ADB$ и $\angle AO_1B$ опираются на общую дугу - $\overset{\smile}{AB}$:

$$\Rightarrow \angle ADB = \frac{\angle AO_1B}{2} = \alpha$$

4) $\triangle ADC$: $\angle DAC = 90^\circ$ - по условию

$$\alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

~~5) $AB \cap O_1O_2 = H$~~

5) $AB \cap O_1O_2 = H$

$$AH = R \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

$$O_1H = O_2H = R \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

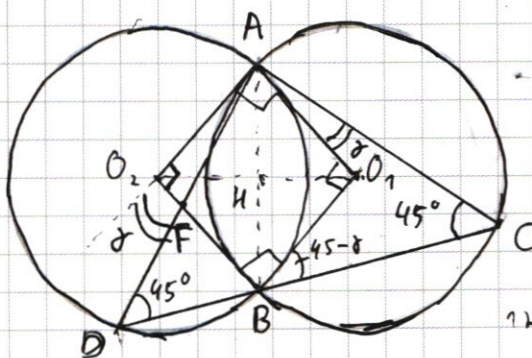
~~6) $\angle O_2AD = \delta$~~

6) $\angle O_2AD = \delta$

7) $\angle O_2AO_1 = 90^\circ$; $\angle DAO_1 = 90^\circ - \delta$

8) $\angle DAC = 90^\circ$; $\angle O_1AC = 90^\circ - \angle DAO_1 = \delta$

9)



* т.к. $BD = BF$, то:

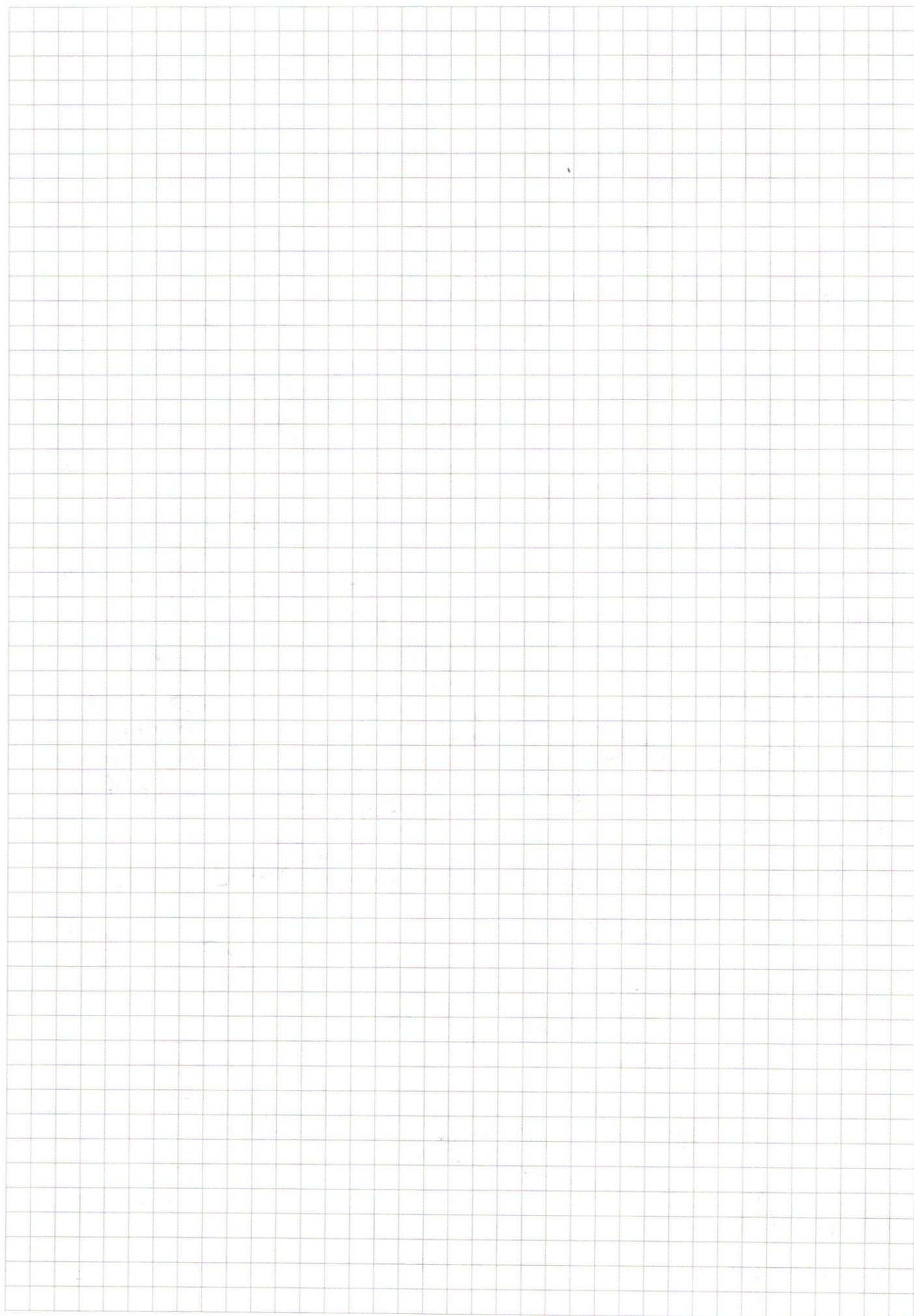
$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2$$

10) $AC = 2R \cdot \cos \delta$

11) $\angle BCO_1 = 45^\circ - \delta = \angle O_1BC$

12) $BC = 2R \cdot \cos(45^\circ - \delta)$

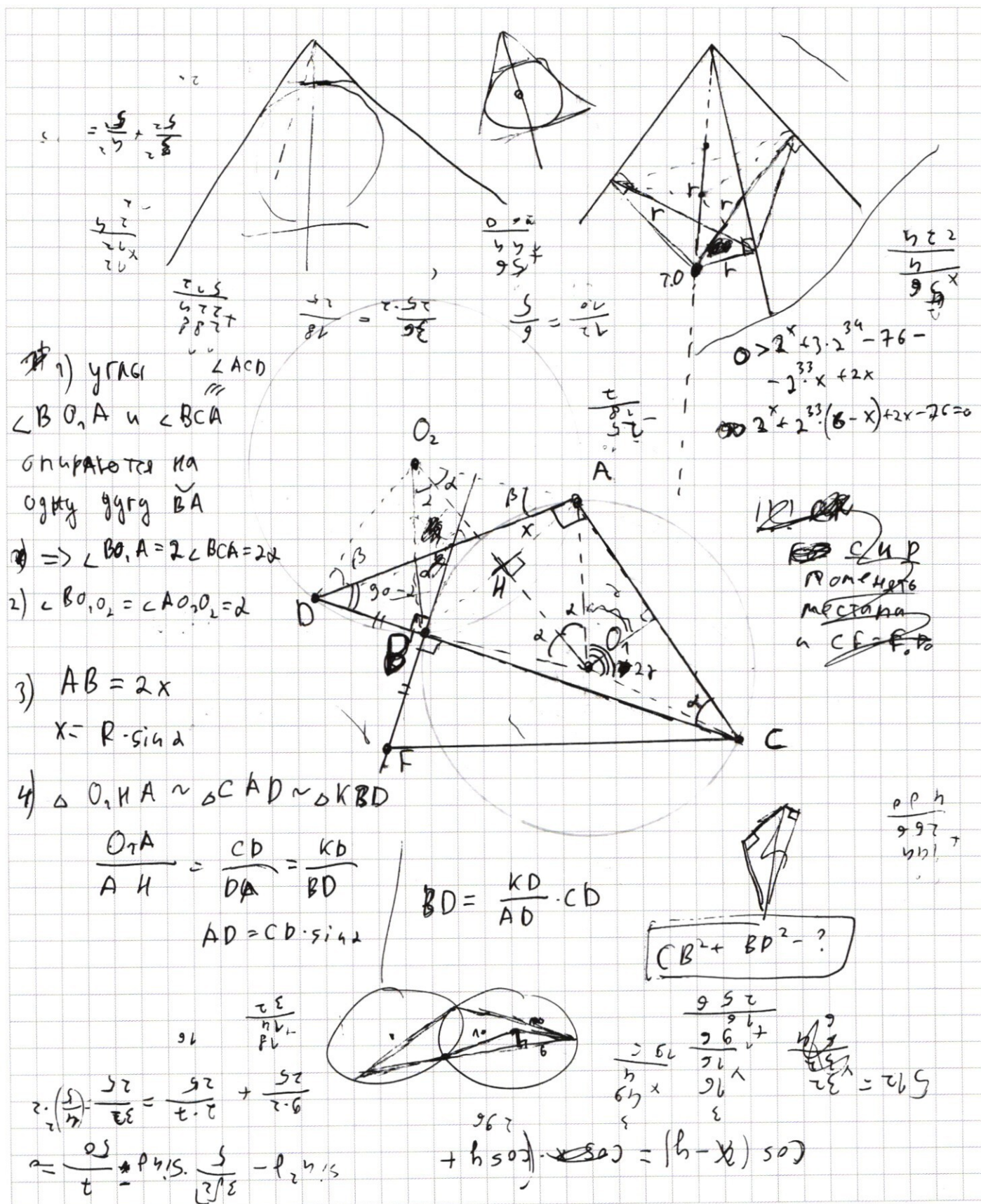
продолжение
на 4 стр.



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



3) $\angle BO_2A$ и $\angle BDA$ опираются на $\overset{\frown}{AB}$

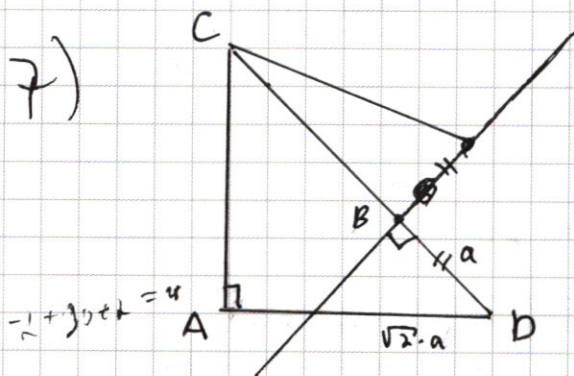


h) $\angle BDA = \angle BCA \Rightarrow = 45^\circ$

$$x^2 = R^2 - y^2$$

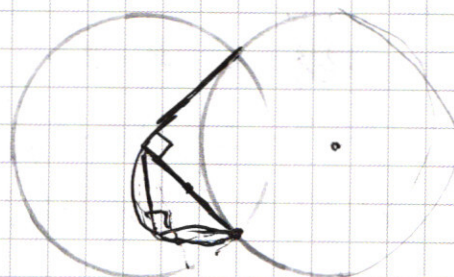
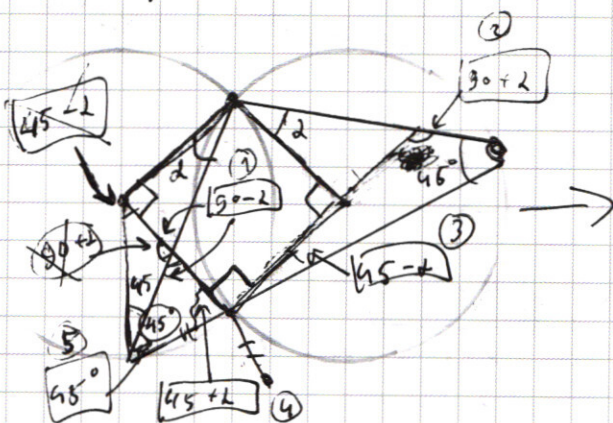
$$2x^2 = R^2 \quad ; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$$

g) $AD = AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot CD$



$$45 + 90 + 2 + 45 = 182$$

$$45 - 2 + 50 + 65 - 2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) AC = 2R \cdot \sin \theta$$

$$2) BC = DC - BD \quad ; \quad BD = \frac{KD}{AD} \cdot CB$$

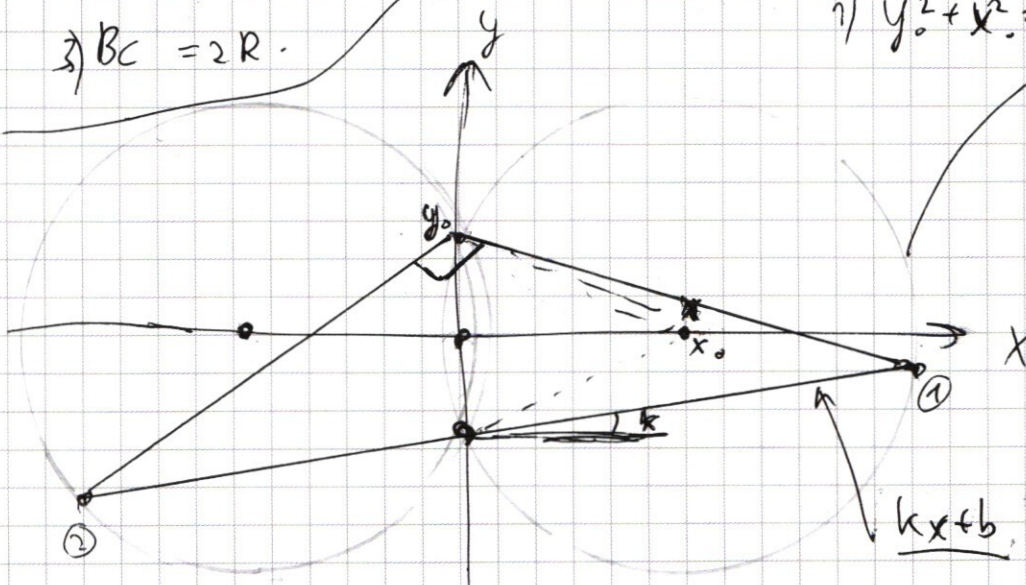
$$BC = CD \cdot \frac{AD - KD}{AD} = \frac{AK}{AD} \cdot CD$$

$$BD = \frac{KD}{AD} \cdot CD$$

$$(AC)^2 + (BD)^2 = \frac{CD}{AD} \cdot \sqrt{AK^2 + KB^2}$$

$$3) BC = 2R$$

$$1) y^2 + x^2 = R^2$$



$$2) k \cdot 0 + b = -y_0 \quad ; \quad \underline{b = -y_0}$$

$$3) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

$$4) \quad kx = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

$$k^2 \cdot x^2 - 4y_0 \cdot kx + 4y_0^2 = R^2 - (x - x_0)^2$$

$$(k^2 + 1)x^2 - (4ky_0 - 2x_0)x + 4y_0^2 + x_0^2 - R^2 = 0$$

$$4y_0^2 + x_0^2 - R^2 + 3y_0^2 = 3y_0^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

18) $\triangle BAC$: $AB = \sqrt{2} \cdot R = 10\sqrt{2}$

$BC = 12$

Т. косинусов: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(45^\circ)$

$200 = 144 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AC^2 - 12\sqrt{2} \cdot AC - 56 = 0$

$D = 12^2 \cdot 2 + 4 \cdot 56 = 288 + 224 = 512 = 16^2 \cdot 2$

$AC = \frac{12\sqrt{2} \pm 16\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 14\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2}, \text{ не убо.} \end{cases}$

19) $CF^2 = BF^2 + BC^2$

$\sqrt{4R^2 - BC^2} = BF = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$

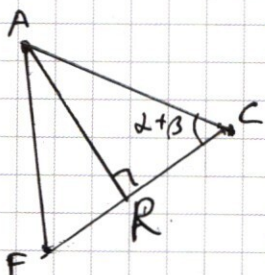
~~20) $\triangle ACF$~~

20) $\angle \beta = \angle BCF$

$\tan \beta = \frac{BF}{BC} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sin \beta = \frac{4}{5}; \cos \beta = \frac{3}{5}$

21) $\triangle AFC$:



$AR = AC \cdot \sin(2 + \beta) = AC \cdot \sin(45^\circ + \beta)$

$AR = AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin \beta + \cos \beta) = AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5}$

$AR = 14\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7^2 \cdot 2}{5}$

22) $S_{AFC} = \frac{1}{2} AR \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7^2 \cdot 2}{5}\right) \cdot (2 \cdot 10) = 7^2 \cdot 2 \cdot 2 = 196$

$S_{AFC} = 196$

а) $CF = 20$
ОТВЕТ:
б) $S_{ACF} = 196$

✓1

1) $9251 = 7^3 \cdot 3^3$

2) Что бы произведение ^{8 чисел} равнялось 9251:

Но что бы не оставшиеся позиции были 1.

3) $\lfloor \lfloor \lfloor \lfloor \lfloor \lfloor \lfloor \lfloor \lfloor$

4) среди чисел может быть либо:

a) 7 7 7 3 3 3 1 1 1

b) 7 7 7 9 3 1 1 1 1

5) случай a):

$$N_A = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 1$$

расстановка 1 - единственная

$$N_A = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 560$$

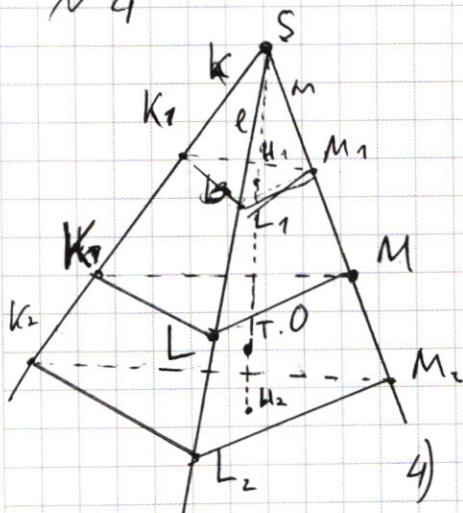
6) случай b): $N_B = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5}{1!} \cdot \frac{4}{1!} \cdot 1$

$$N_B = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 1120$$

7) $N = N_A + N_B = 560 + 1120 = 1680$

ОТВЕТ: 1680.

✓4



1) $U_1 \in SO$

$U_1 \in K_1 L_1 M_1$

$U_{10} = R$

2) $U_2 \in SO$

$U_2 \in K_2 L_2 M_2$

$U_{20} = R$

3) $V_{K_1 M_1 L_1 K_2 M_2 L_2} = \frac{1}{3} \cdot (S_{K_2 L_2 M_2} - S_{K_1 L_1 M_1}) \cdot 2R$

$V = \frac{1}{3} \cdot (16 - 7) \cdot 2R = 10R$

4) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{K_2}}{S_{K_1}} \cdot \frac{S_{L_2}}{S_{L_1}} \cdot \frac{S_{M_2}}{S_{M_1}} \cdot S_{U_2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

✓1

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3087} \\ \underline{-26} \\ 24 \\ \underline{-24} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \overline{) 1029} \\ 3 \overline{) 343} \\ \underline{-12} \\ 12 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \overline{) 49} \\ \underline{-63} \\ 63 \\ \underline{-63} \\ 0 \end{array}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$7^3 \cdot 3^3 = 9261$$

$$\begin{array}{r} 27 \times 49 \\ 27 \times 27 \\ \hline 343 \end{array}$$

8) есть (I) 9:

$$\begin{array}{l} 9_1 = 8 \\ 7_1 = 7 \\ 7_2 = 6 \\ 7_3 = 5 \\ 3_1 = 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Всего: } 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

а) ~~кет~~ кет 9:

□ □ □ □ □ □ □ □

$$\begin{array}{l} 7_1 = 8 \\ 7_2 = 7 \\ 7_3 = 6 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{кон-во мест}$$

$$\text{Всего: } 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

аа

— остальные единицы

2 Ответ: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (3+1) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 26880$

$$\begin{array}{r} 880 \times 30 \\ \underline{2640} \\ 26880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ 80 \end{array}$$

✓5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

а)

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 12 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$56 \cdot 20$$

д) $x+y+5 > 0$

$$x > -5+y$$

$$y+5 = t$$

$$x > -t$$

е) $y-x+5 > 0$

$$x < y+5$$

$$x < t$$

$$\begin{array}{r} 876543 \\ \times 7 \\ \hline 6135801 \end{array}$$

$$107$$

$$① |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$a) A \geq 0; B \geq 0:$$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$2y=0; y=0, x \in [5; 5]$$

$$\begin{array}{l} x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \\ 5-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \\ + 96 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 28 \\ + 168 \\ \hline 448 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ + 448 \\ \hline 1024 = 2^{10} \end{array}$$

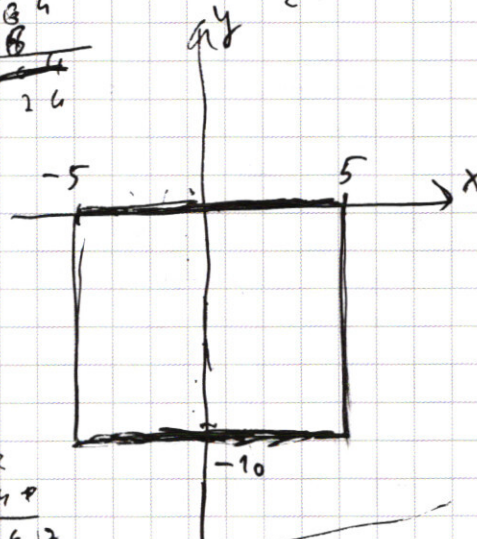
$$b) A \geq 0; B < 0:$$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$x=5; y \in [-10; 0)$$

$$\begin{array}{l} y+10 \geq 0 \Rightarrow y \geq -10 \\ y < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 32 \\ + 96 \\ \hline 128 \end{array}$$



$$c) A < 0; B \geq 0:$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$x=-5; y \in [-10; 0)$$

$$\begin{array}{l} y < 0 \\ y+10 \geq 0 \Rightarrow y \geq -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 248 \\ + 56 \\ \hline 304 \end{array}$$

$$d) A < 0; B < 0:$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$2y=-10; y \in (-5; 5)$$

$$\begin{array}{r} \times 72 \\ 72 \\ + 12 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 25 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$x-5 < 0; x < 5$$

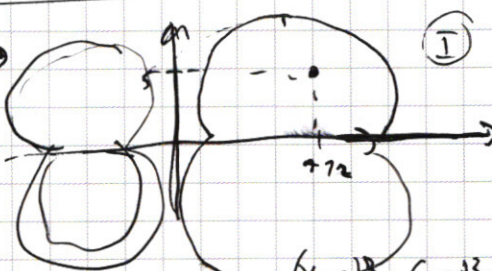
$$-x-5 < 0; x > -5$$

$$28=7 \cdot 4$$

$$\begin{array}{l} (-2; 0) - ? \\ |2+5| + |3+5| = 7+5 \end{array}$$

$$② (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

то что в I $\rightarrow$ в II, III, IV



$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(\frac{y}{x^2}) \cdot \ln y$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y < 0$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 - 4xy < 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0$$

$$D = (x+4)^2 + 8x(x-4) = x^2 + 8x + 16 - 8x^2 - 32x = -7x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$24 \cdot 24 + 4 \cdot 7 \cdot 16 = 32^2$$

$$x = \frac{24 \pm 32}{-7 \cdot 2} = \left[\frac{-4}{7} \right]$$

$$y = \frac{x+4 \pm \sqrt{D}}{2}$$