

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

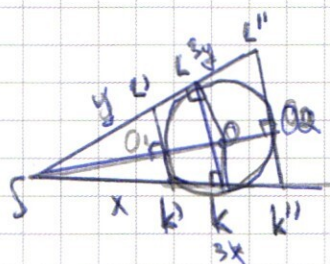
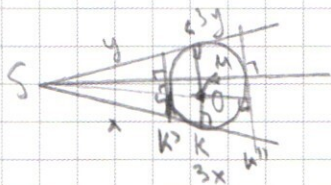
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



То необходимо треугольников
малень $\frac{SK'}{SK''} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

по к-ту касательной

$$SK = SK' \cdot SM$$

$K'L'L''K''$ - параллель, ромб
т.к. вписана в окружность
 $\Rightarrow L'L'' = K'K''$ $3x = 2y$ $x = y$

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{1}{4} = \frac{SO_1}{SO_1 + 2R}$$

$$4SO_1 = SO_1 + 2R$$

$$2R = 3SO_1$$

$$R = \frac{3}{2}SO_1 \quad SO_1 = \frac{2}{3}R$$

$$\sin KSO = \frac{R}{SO_1 + R} = \left(\frac{2}{3} + 1\right)R = \frac{3}{5}$$

$$KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\frac{LK}{L'K'} = \frac{SO_1 + y}{SO_1}$$

$$y = a_1 K' = SO_1 \cdot \tan \alpha = SO_1 \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{LK}{L'K'} = \frac{7}{4}$$

Маленькие для двух других сторон

$$SK \cdot SM = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \cdot 1 = \frac{49}{16}$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{3}{5}, \quad S = \frac{49}{16}$$

N1

$$9281 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$$

написать как-то 3-ю число, оставшихся

$$w_3 \quad 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1$$

$$A = \frac{8!}{8 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{4} = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 280$$

Ответ: 280

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$1) \quad \cos 2x = \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

2)

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \frac{5x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{(x^2 y^4)^{-\ln x}} = y^{\ln(x^2 y^4)} \quad (1) \quad x > 0, y > 0$$

$$\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 2x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2)

$$y^2 - y(x+4) + 2x - 2x^2 = 0$$

$$D = x^2 + 2x + 16 - 32x + 2x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{(x+4) \pm (3x-4)}{2}$$

$$y_1 = 2x$$

$$y_2 = -\frac{2x+8}{2} = 4-x$$

1)

$$y = 2x$$

$$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = 2x^{\ln x^2}$$

$$\cancel{2x^0}^{\cancel{2x^0}}$$

$$2^{-4\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln x^2} \cdot x^{\ln x^2}$$

$$1 = x^{\ln 2} 2^{\ln \frac{2}{x^2}} = 2^{\ln x + \ln \frac{2}{x^2}} = 2^{\ln \frac{2}{x}}$$

$$\ln \frac{2}{x} = 0$$

$$(x=2)$$

2)

$$y = 4-x$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{\ln x^2}}$$

$$x^{-2\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{x^3 \ln(4-x)}$$

$$x^{3\ln(4-x) - 2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)} \quad | \ln$$

$$\ln^3(4-x) = \ln x (3\ln(4-x) - 2\ln x)$$

$$a^2 = b(3a+2b)$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\frac{a}{b} - 3 + \frac{2b}{a} = 0$$

$$1 + \frac{2}{4} - 3 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1 \quad t = 2$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\ln(4-x)}{\ln x} = 1$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$4-x = x$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$\ln(4-x) = \ln x^2$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Answer: } (2; 4), (2; 2), \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2)$$

$$1) x+y \geq 5, y-x \geq 5$$

$$2y = 0, y = 0$$

$$2) x+y \geq 5, y-x < 5$$

$$x+y+5+x-y-5 = 10, x = 5$$

$$3) x+y < 5, y-x \geq 5$$

$$-x-y-5+y-x+5 = 10$$

$$-2x = 10, x = -5$$

4)

$$-x-y-5-y+x-5 = 10$$

$$-2y = 20, y = -10$$

при $x > 0$ — 1 решение

$$1) a = 2^2, \text{ когда } x = 5$$

$$2) a = 169, \text{ когда } x = 0$$

Заметим, что (1) — квадрат стороны 10 и центром (0,0)

, а (2) — окружность, центр.

совпадает с x, y

Таким образом, 2 решения

когда $a = 2$ (см. рисунок)

Ответ: 49, 169

№7

$$76 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{24}$$

из двух неравенств

$$f(x) = 76 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 2^{33} \cdot 6 = g(x)$$

при $x=6$ достигается равенство

$$f(x) \uparrow, g(x) \uparrow$$

$$0 > \text{const} + 2^x + x(2 - 2^{33})$$

$$76 - 2x + 2^{33}(x-6) - 2^x > 0 \quad x=38 \quad f=0$$

$$f(x+1) - f(x) = -2 + 2^{33} + 2^x(1-2) = 2^{33} - 2 - 2^x$$

~~каждо~~ у, ~~показывающих~~
где x

f(x):

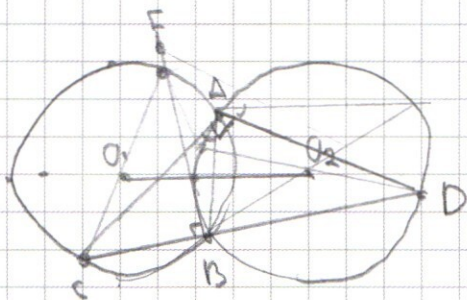


$$A = 31 \cdot 2^{33} - 31 \cdot 2$$

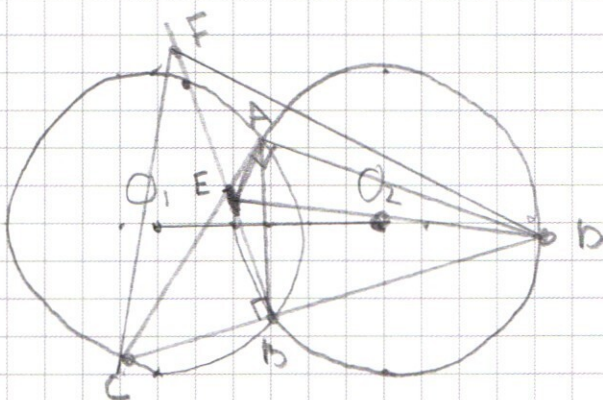
$$A = 31 \cdot 76 + 31 \cdot 2^{33} \cdot 6 + 2^{33} \cdot \left(\frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right) - \sum_{x=7}^{37} 2^x$$

$$\text{Ответ: } 31(76 - 2^{33} \cdot 6 + \frac{2^{33}}{31} \left(\frac{37 \cdot 38}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} \right)) - \sum_{x=7}^{37} 2^x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

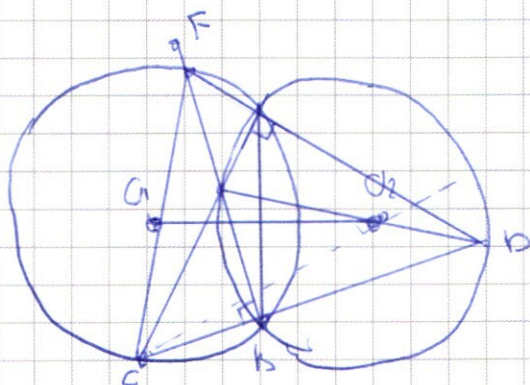


~~BF = BD~~

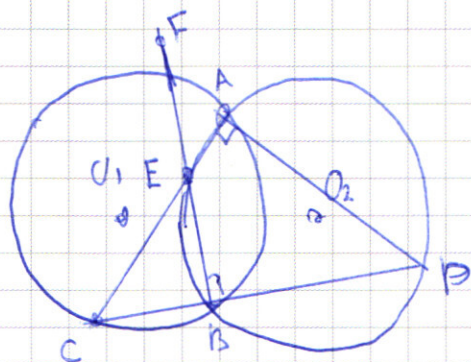


$BF = BD$

$E \in \omega_2$



N6



$$BF = BD \Rightarrow \triangle BFD - \text{равнос.}$$

$$\Rightarrow \angle CDF = 45^\circ$$

$$E = CA \cap BF \quad E \in \omega_2$$

$$\text{т.к. } \angle BEA - \text{внешний } (\angle EAB + \angle DBE = 180^\circ)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$8261 = 9 \cdot 1029 = 27 \cdot 343 = 27 \cdot 7 \cdot 49 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{3^8}{36 \cdot 4} = \frac{3^6}{16}$$

$$\frac{8^8}{36 \cdot 4} = \frac{4^{16}}{16 \cdot 9} = \frac{4^{14}}{9}$$

$$\frac{8!}{384} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{9 \cdot 4} = 45 \cdot 2 \cdot 7 = 10 \cdot 26 = 260$$

$$\frac{\ln a}{\ln c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(9x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2}(\sin 5x - \cos 5x) = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos(9x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x - \cos(5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} + 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cos(7x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$2 \sin 7x \sqrt{2} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$1) \cos 2x = \sin 2x \quad \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2) 2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$



$$\ln a = \ln a$$

$$\ln a = \ln a$$

$$\log_2 5 = 4 \log_2 5$$

$$= 16 + 4 \log_2 5$$

$$x^2 + 2 - 2$$

№3

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln(y x^2)$$

$$x > 0$$

$$\frac{y}{x^2} > 0$$

$$y > 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 2x - 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - (2x^2 + 2x) = 0$$

$$D = x^2 + 2x + 16 + 2x^2 - 32x = 3x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$y_1 = 2x \quad y_2 = \frac{-2x+8}{2} = -x+4$$

1) $(2x)^4 x^2 - \ln x = y \ln \frac{2}{x^2}$

$$16x^6 - \ln x = 2x \ln \frac{2}{x^2}$$

$$2x^6 = x \ln \frac{2}{x^2}$$

$$x^{-\ln 2x^6} = x \ln \frac{2}{x^2}$$

$$-\ln 2x^6 = \ln \frac{2}{x^2}$$

$$\ln \frac{1}{2x^6} = \ln \frac{2}{x^2} \quad \frac{1}{2x^6} = \frac{2}{x^2} \quad \frac{1}{2} = 2 \quad \ominus$$

$$(4-x)^3 = 64 - 16x + 4x^2 - x^3$$

$$x \frac{\ln(4-x)^3}{x^2} = (4-x) \ln(4-x)$$

2)

$$y = 4-x$$

$$x^3 (4-x)^4 - \ln x = (4-x) \ln \frac{4-x}{x^2}$$

$$(x^3 (4-x)^4)^{\ln x} = (4-x) \ln(4-x)$$

$$(x^3 (4-x)^4)^{-\ln x} =$$

$$x^{9 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) + 4 \ln x} = (4-x)^{\ln x^4 (4-x)}$$

$$x^5 = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\ln x$$

$$x^{-9 \ln x - 4} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{-2 \ln x + 7} (4-x)^{-4 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{-2 \ln x + 7} = (4-x)^{\ln x^4 (4-x)}$$

$$x^{-2 \ln x + 3} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$3 \ln 3 - 2 \ln 1$$

$$= 1 \frac{3 \ln 3}{3 \ln 3} = 3 \frac{3 \ln 1}{3 \ln 1} = 1$$

$$\ln^2(4-x) = \ln x \cdot \ln \frac{(4-x)^3}{x^2}$$

$$\ln^2(4-x) = \ln x$$