МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

$4x^2 - 2x^2 - 2x^2 + 8x - 8x = 0$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7.$

Число 8-значное: т.к. произведение не 0, то все цифры точно не 0.

Заметим, что число $9261 = 3^3\cdot7^3$. Значит оставшиеся цифры это 1.

У нас есть несколько вариантов:

Пусть 8-знач. число имеет цифры 3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1.

Тогда кол-во способов получить 8-знач. число равно:

$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}}{3\cdot2\cdot2} = 560$

Пусть 8-знач. число имеет цифры 3; 9; 7; 7; 7; 1; 1; 1.

Тогда кол-во способов получить 8-знач. число равно:

$\frac{8!}{3!3!} = 1120$

Других вариантов нет т.к. цифра ≤ 9.

Всего вариантов: $1120+560 = 1680$ вариантов.

Ответ: 1680 вариантов.

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$\cancel{2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0}$

$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\cos 4x.$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x = \cos 4x.$

$\cancel{\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}-5x\right) = \cos 4x}$

$\cancel{\cos 4x - \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\cancel{\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = -\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

$\cancel{-2\sin\left(\frac{9x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = -\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)}.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 4x+\cos 5x\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x.$$

$$\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 4x+\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)=+2\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\left(+x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\underset{2\alpha}{\overset{\shortparallel}{\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)}}=2\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\underset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)}}\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\cancel{2}\sin\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\cancel{2}\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\overset{\cos}{\cancel{\sin}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\cancel{\sin\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0 \text{ или}}$$

$$\cos\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$$

$$9x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k.$$

$$9x=\frac{3}{4}\pi+2\pi k.$$

$$x=\frac{3}{36}\pi+\frac{2}{9}\pi k.$$

$$x=\frac{1}{12}\pi+\frac{2}{9}\pi k.$$

$$\sin\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)=\cancel{\cos}\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

$$\sin\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0.$$

$$\sin\left(\frac{7}{4}x+\frac{3}{16}\pi\right)\cos\left(\frac{11}{4}x-\frac{\pi}{16}\right)=0.$$

$$\sin\left(\frac{7}{4}x+\frac{3}{16}\pi\right)=0 \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{11}{4}x-\frac{\pi}{16}\right)=0.$$

$$\frac{7}{4}x+\frac{3}{16}\pi=\pi n,\ n\in Z. \qquad \frac{11}{4}x-\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z.$$

$$28x+3\pi=16\pi n.$$

$$x=\frac{16}{28}\pi n-\frac{3}{28}\pi$$

$$x=\frac{4}{7}\pi n-\frac{3}{28}\pi.$$

$$44x-\pi=8\pi+16\pi m.$$

$$x=\frac{9}{44}\pi+\frac{4}{11}\pi m.$$

Ответ: $x=\frac{2}{9}\pi k+\frac{1}{12}\pi,\ k\in Z.$

$x=\frac{4}{7}\pi n-\frac{3}{28}\pi,\ n\in Z.$

$x=\frac{4}{11}\pi m+\frac{9}{44}\pi,\ m\in Z.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Расстояние от точки ($12;5$) до вершины куба $(5;0)$.

$l_1 = \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

Расстояние от точки $(12;-5)$ до точки касания окр-ти с кубом равно:

$l_2 = 7.$

Т.с. сначала произойдет касание окружностью с центрами $(12;-5)$ и $(-12;-5)$.

Т.е. две точки касания будут при $r=7$.

$7=\sqrt{a} \Rightarrow a=49.$

Когда окружности с центрами A и B коснутся вершин квадратов будет больше двух решений, т.к. окружности с центрами C и D будут пересекать квадрат. Т.к. $7<\sqrt{74}<17$.

Далее будет больше двух решений, т.к. все 4 окр-ти будут пересекать квадрат. Рассмотрим момент когда окр-ти C и D второй раз будут касаться квадрата.

Каждая окружность пересекает по 2 вершины, т.е. будет минимум 4 решения. Когда окр-ти C и D перестанут пересекать квадрат, то окр-ти A и B будут пересекать каждая квадрат в двух точках, т.к. $\sqrt{74}<\sqrt{314}<\sqrt{514}$, т.е. 4 реш. Значит рассмотрим момент когда окр-ти A и B касаются вершины квадрата. Тогда C и D уже не касаются квадрата, т.к. $\sqrt{314}<\sqrt{514}$.

Значит этот вариант подходит. Будет тоже 2 решения.

$r=\sqrt{514}$. $r=\sqrt{a}=\sqrt{514} \Rightarrow a=514.$

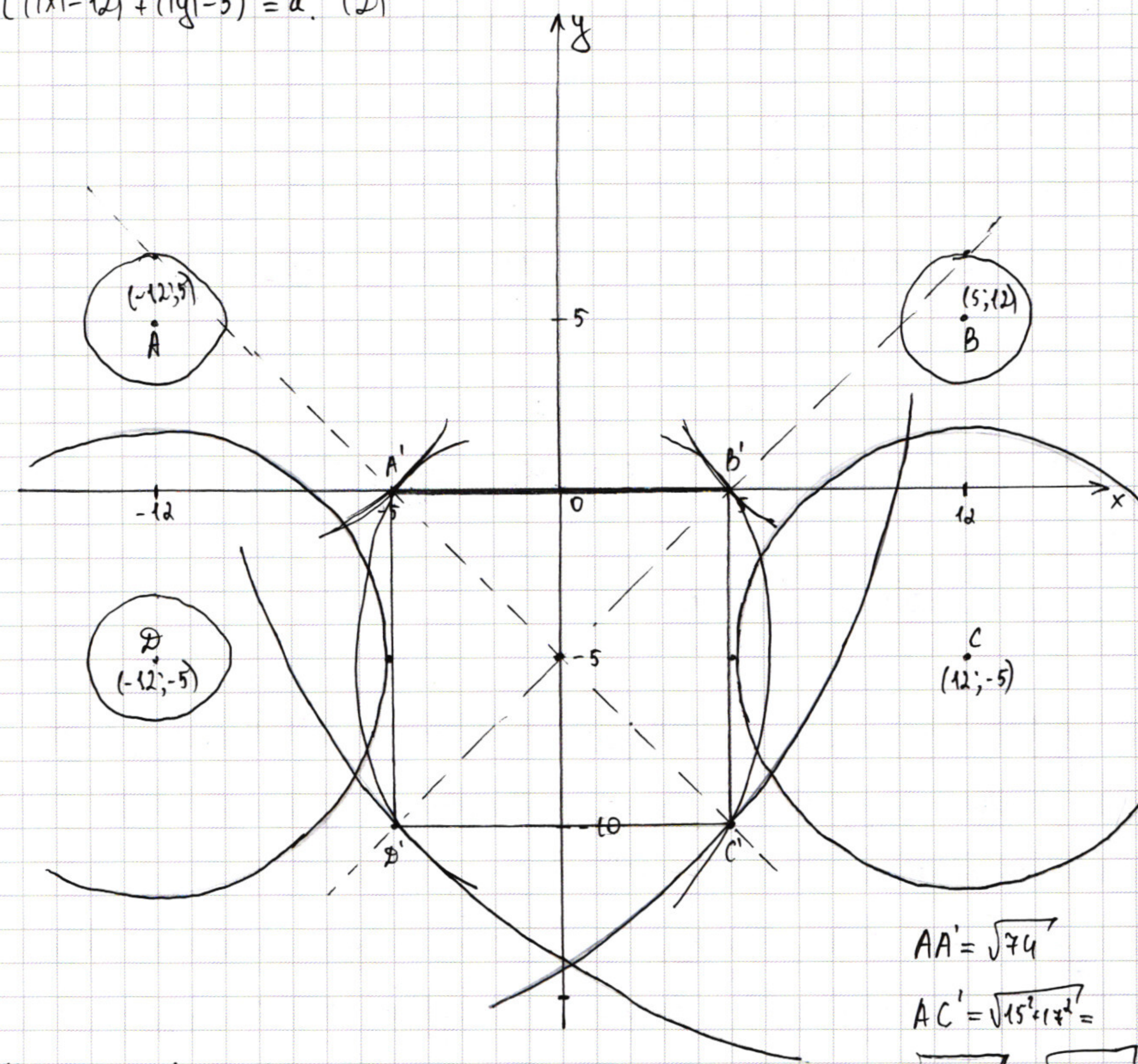
Ответ: $a=49$; $a=514$.

№5

a - ? 2 реш.

$$\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10. \quad (1)\\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a. \quad (2)\end{cases}$$

(2) - это окружности с четырьмя центрами и радиусом $\sqrt{a}$.



$AA' = \sqrt{74}$

$AC' = \sqrt{15^2+17^2} =$

$= \sqrt{225+289} = \sqrt{514}$

$DC' = \sqrt{17^2+5^2} = \sqrt{289+25} =$

$= \sqrt{314}$.

(1) $|x+y+5|+|y-x+5|=10.$

$x+y+5=0 \qquad y-x+5=0.$

$y=-x-5 \qquad y=x-5.$

Рассмотрим все 4 случая:

I $x+y+5+y-x+5=10.$ II $-x-y-5-y+x-5=10.$ III $x+y+5-y+x-5=10.$ IV $-x-y-5+y-x+5=10.$

$2y=0$ $\qquad -2y=20.$ $\qquad 2x=10.$ $\qquad -2x=10.$

$y=0.$ $\qquad y=-10.$ $\qquad x=5.$ $\qquad x=-5.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть:

$f(x)=2^x+3\cdot 2^{34}$ – всегда возрастает.

$g(x)=76+2^{33}-2x$ – всегда убывает.

~~Тогда~~ Значит найдется такое a, что $f(a)=g(a)$ и причем только одно.

Тогда неравенству

$2^x+3\cdot 2^{34} < y < 76+2^{33}-2x$

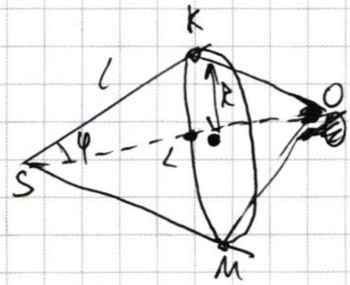
удовлетворяют такие x:

$x \in (-\infty; a]$.

Т.к. при $x \to -\infty$. $76+2^{33}-2x \to +\infty$, то y тоже бесконечно много.

Ответ: пар $(x;y)$ бесконечно много.

№ 4



Посчитаем данные нам площади через радиусы.

$S_1=16=\pi R^2$

$S_2=1=\frac{R^2}{4}\cos\varphi$.

$\varphi=\angle KSO$ ~~Косинус~~ $16=\frac{4\pi}{\cos\varphi}$ $\cos\varphi=\frac{\pi}{4}$. $\varphi=45°$.

$S=\pi R^2\cdot\cos\varphi=S_1\cdot\cos\varphi=16\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi$.

Ответ: $\varphi=45°$; $S=4\pi$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

По т. Пифагора:

$CF^2 = BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2 = 2R^2 + \cancel{2R^2\cos 2\alpha} + 2R^2 - \cancel{2R^2\cos 2\alpha} = 4R^2$.

$CF = 2R = 20$.

$BC = 12$.

$\cos\varphi = \frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = 0{,}6$

$\Downarrow$

$\sin\varphi = 0{,}8$

$BF = CF\sin\varphi = 20 \cdot 0{,}8 = 16$.

$CD = BC + BF = BC + BD = 12 + 16 = 28$.

$\triangle CAD$ – равнобедр. (т.к. углы при основ. равны).

$\Downarrow$

$AC = AD = x$.

По т. Пифагора:

$AC^2 + AD^2 = 28^2$

$2x^2 = 28^2$.

$x = \frac{28}{\sqrt{2}} = AC$.

Найдём $\sin\angle ACF = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \sin\varphi\cos\frac{\pi}{4} + \cos\varphi\sin\frac{\pi}{4} = \frac{8}{10}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6}{10}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.

$S_{ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AC \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{20}^{2} \cdot \frac{28}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{7}{\cancel{10}}\cancel{\sqrt{2}} = 28 \cdot 7 = 196$.

Ответ: $CF = 2R = 20$; $S_{ACF} = 196$.

№7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Пусть $x \to -\infty$.

$y \geq \cancel{2^x}^{\to 0} + 3 \cdot 2^{34} > 3 \cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x = 76 + 2^{33} - 2x \to +\infty$.

$3 \cdot 2^{34} < y < +\infty$.

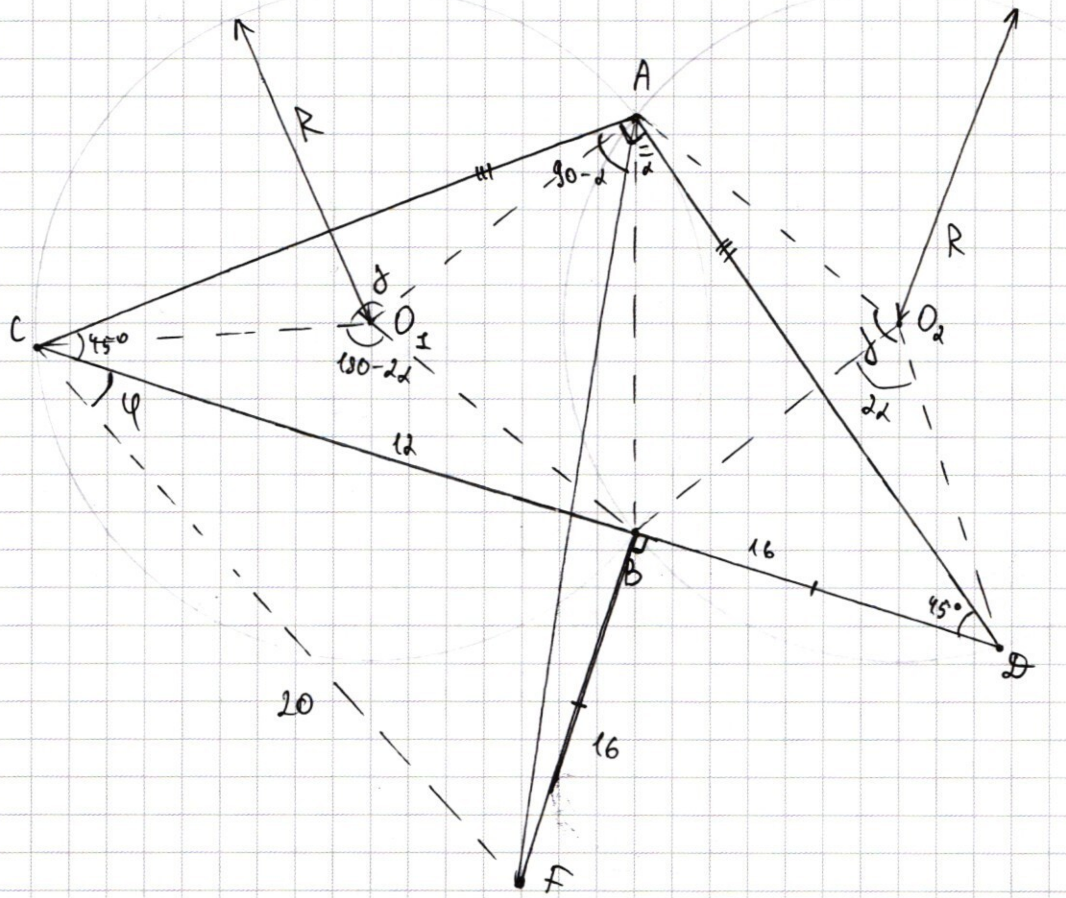
Таких y бесконечно много.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$$R = \frac{AB}{2\sin ADB} = \frac{AB}{2\sin ACB}.$$

$\left.\begin{aligned}&\sin\angle ADB = \sin\angle ACB.\\ &\angle ADB + \angle ACB = 90°\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle ADB = \angle ABB = 45°$

$\angle CO_1B = 2\angle CAB$ (как вписан. и центральный).

$\angle BO_2D = 2\angle BAD$ (как впис. и центр.).

Запишем т. косинусов для $\triangle CO_1B$ и $\triangle BO_2D$.

$BC^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(180-2\alpha)$ $\quad BD^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 2\alpha$

№ 3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \ (1). \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \ (2). \end{cases}$$

ОДЗ: $y \geq 0$.

(2) - рассмотрим как квадр. уравн. отн. y^2.

$y^2 - y(x+4) - (2x^2 - 8x) = 0$.

$D = (x+4)^2 + 4(2x^2-8x) = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$.

$$y = \frac{(x+4) \pm \sqrt{(3x-4)^2}}{2} = \frac{(x+4) \pm (3x-4)}{2}$$

$y = 2x$ или $y = -x+4$. $x = 4-y$.

$0^n = 0$

$1^n = 1$.

$n^0 = 1$.

Подставим в 1:

$-\ln x = \ln \frac{1}{x}$.

$\ln(2 \cdot x^{-6})$.

$(x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2x^6)}$.

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2x^6)}$.

$(16x^6)^{\ln \frac{1}{x}} = (2x)^{\ln(2/x^6)}$.

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{-6\ln \sqrt[6]{2} x}$.

$f(x) = \ln \frac{1}{x}$. $\frac{1}{x}$

$2 \cdot f(x^6)$

$(16x^6)^{-\ln x} = \left(\frac{1}{64x^6}\right)^{-\ln x \sqrt[6]{2}}$.

$(16x^6)^{\ln \frac{1}{x}}$ - возр.

$(2x)^{\ln(2x^{-6})}$ - возр.

$\Big\} \Rightarrow 1$ решение.

$(x^2(x-4)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln((4-x)/x^7)}$.

$x = 4$.

$y = 0$.

$16x^6 = 0$ и $2x = 0$.

$x = 0$ и $x = 0$.

$\boxed{x = 0. \quad y = 0.}$

$16x^6 = 1$ и $2x = 1$.

$x = \sqrt[6]{\frac{1}{16}}$, $x = \frac{1}{2}$.

$x - \varnothing$.

Ответ: $(0; 0)$ и $(4; 0)$.

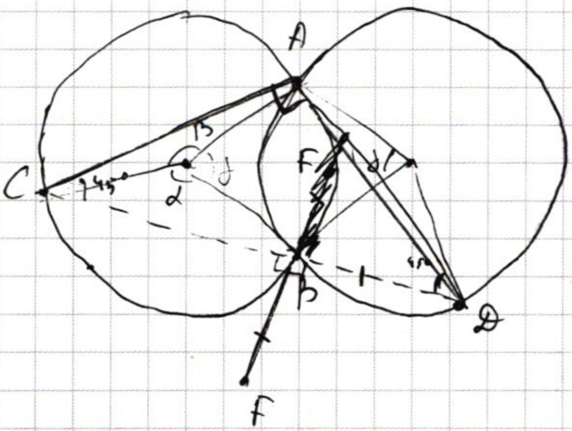
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

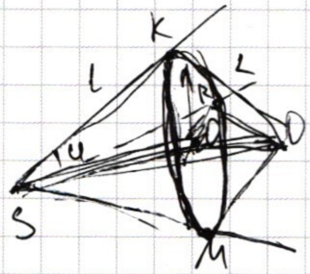
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1{,}41 \times 7 = 9{,}87$

$1{,}4 \cdot 7 = 9{,}8$



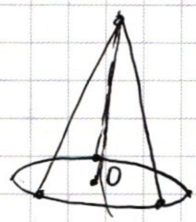


$\pi R^2 = 16.$

$\pi R l = 8.$

$S = \pi R l = 8.$

$\pi R l \cos\alpha = 16.$



$\frac{1}{2}$ $\frac{l}{2} l \cos\alpha$

$BD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha.$

$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos(180 - 2\alpha).$

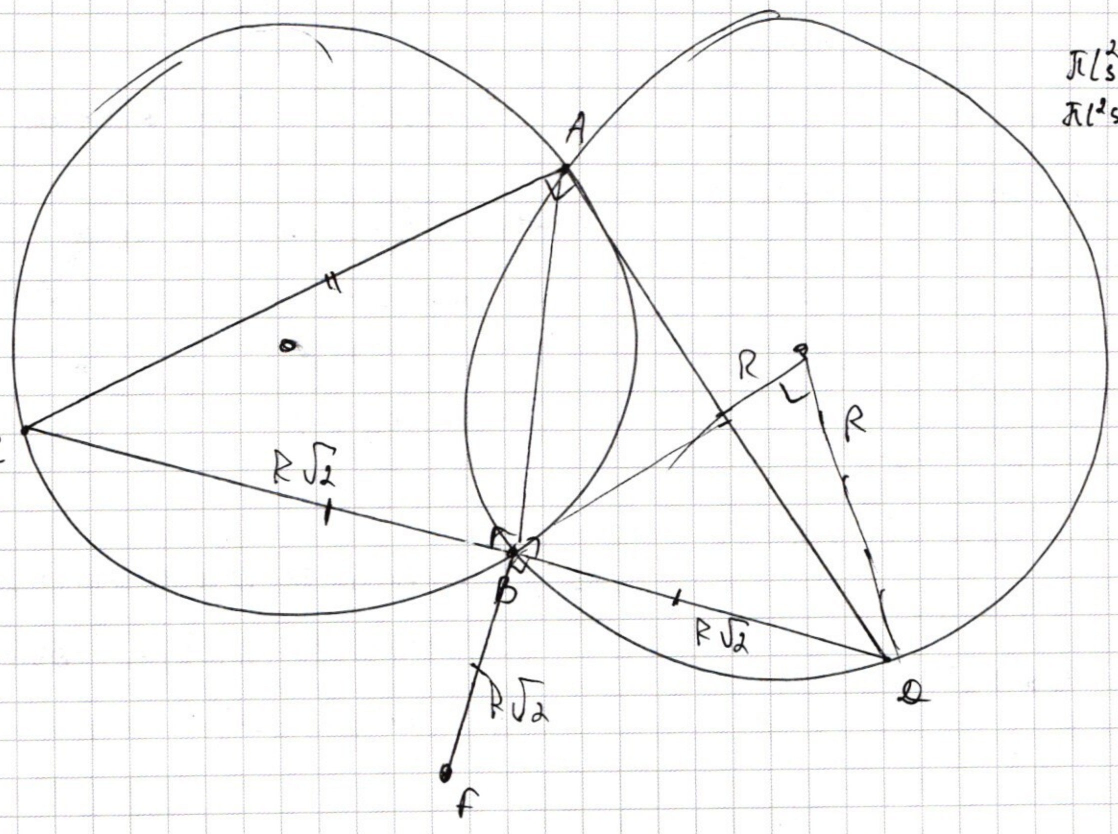
$CF = \sqrt{2R^2 + 2R^2} = 2R.$

$\pi l^2 \sin\alpha = 8.$

$\pi l^2 \sin^2\alpha = 16.$ $\frac{\pi}{4}$

$16 = S = \pi R^2$

$8 = S = \frac{R^2}{4} \cos\varphi$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 9 \\ -9 & 1029 \end{array}$$

26, -18, 81; $1029 \,|\, 3$: 9, 12; $343 \,|\, 7$: 28, 63; $49 \,|\, 7$: 46, 7; $7 \,|\, 7$

$S =$

$\ln$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x$

$\cancel{96261}$

$9261 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7.$

$343 \times 27 = 2401 + 686 = 9261$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 9x = \cancel{\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)}. \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right).$ $\cancel{\cos}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x = \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)}. \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$

$9x + \frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4} = 4x + \frac{\pi}{2} = 2x + \frac{\pi}{4}.$

$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x.$

$a^{6\cdot c}$

$\cos\alpha \pm \cos\beta$

$2\sin 7x\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x.$

$-\frac{3}{\frac{24}{4}}\cdot\frac{7}{4} = -\frac{3}{16}\pi$

$\ln 2\, \cancel{x} + 6\ln\frac{e}{x}.$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right.$

$(16x^6)^{\ln\frac{e}{x}} = (2x)^{\ln 2} \cdot \cancel{6x}(2x)^{6\ln\frac{e}{x}}.$

$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10.$

$x + y + 5 \geq 0$ $\quad$ $y - x + 5 \geq 0.$

$2\sin 7x\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \cos 4x.$

$x + y + 5 = 0.$ $\quad$ $y - x + 5 = 0.$

$y = 2^x + 3\cdot 2^{34}.$

$\sin$

$y < 76 + 2^{33} - 2x.$ $\quad$ $x^{ab} = (x^a)^b$

$\boxed{2^x + 2x - \text{возр.}}$

$\cancel{y}$ $\quad 2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2x.$

$2^x + 2x < 2^{33} - 3\cdot 2^{34} - 76.$

$\cancel{\frac{\pi}{4}}$ $\quad -2\sin 7x\sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0.$

$x \in (-\infty; a].$ $\quad x =$

$\cos 9$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x.$

$y > 3\cdot 2^{34}$

$\frac{11}{4}\cdot\frac{9}{44}\pi$ $\quad \frac{9}{16}\pi - 16 =$ $\quad \frac{\pi}{2}.$

$2\sin 7x\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x.$

$y < \infty.$

$\cos($

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)