

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим 9261 на простые множители:

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$, т.е. в нашем 8-значном числе 3 цифры 3, 3 цифры 7, остальные только, только есть 3 цифры 7, т.к. 7 - единств. цифра: 7;

Теперь рассм. 2 случая:

1) в числе есть цифра 9, тогда набор чисел

7 7 7 9 3 1 1 1

Из них получится всего

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20 \cdot 56 = 1120 \text{ вариантов}$$

2) в числе нет 9, тогда набор чисел

7 7 7 3 3 3 1 1

Из них:

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{6 \cdot 2} = 560$$

Тогда всего вариантов $560 + 1120 = 1680$

№3.

Ответ: 1680

(2): По теор. Виета:

$$\begin{cases} y_1 y_2 = +2x(y-x) \\ y_1 + y_2 = 4+x = 4-x+2x \\ y_1 = 2x \\ y_2 = 4-x, \text{ т.е.} \\ \begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases} \end{cases}$$

$$(x^2 y^2) - \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x} \right) \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

(1) Подставим

$$\begin{aligned} x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} &= y \ln y + 7 \ln x \\ x^{-2 \ln x} &= y \ln y + 7 \ln x \end{aligned}$$

$y \neq 0$ т.к. это
пар. $\ln y$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} \cdot y^{\ln y + 11\ln x} \\ y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ x^{-2\ln x} \cdot (2x)^{\ln 2 + \ln x + 11\ln x} &= x^{-2\ln x} \cdot 2^{\ln 2 + 12\ln x} \cdot x^{\ln 2 + 12\ln x} \\ 1 &= 2^{\ln 2 + 12\ln x} \cdot x^{\ln 2 + 12\ln x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-2\ln x} \cdot y^{\ln y + 11\ln x} &= 1 \\ -2(\ln x)^2 + (\ln y + 11\ln x) \ln y &= 0 \\ 2(\ln x)^2 + (\ln y)^2 + 11\ln x \cdot \ln y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= 2x: \ln y = \ln 2 + \ln x = \ln 2 + t \\ 2t^2 + \ln^2 2 + 2(\ln 2) \cdot t + t^2 + 11(\ln 2)t + 11t^2 &= 0 \\ 14t^2 + 13(\ln 2)t + \ln^2 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = 169 \cdot \ln^2 2 - 56 \ln^2 2 = 113(\ln 2)^2$$

$$t = \frac{-13\ln 2 - \ln 2 \sqrt{113}}{28}$$

$$t = \frac{-13\ln 2 + \ln 2 \sqrt{113}}{28}$$

но можно заметить, что оба корня отрицательны, т.к. $169 > 113$, а $t > 0$.

$$x = e^{\frac{-13\ln 2 - \ln 2 \sqrt{113}}{28}}$$

$$x = e^{\frac{-\ln 2 + \ln \sqrt{113}}{28}}$$

$$\begin{aligned} y &= 4-x \\ 2\ln x &= \end{aligned}$$

$$2(\ln x)^2 + (\ln y)^2 + 11\ln x \cdot \ln y = 0$$

$$D = 121(\ln x)^2 - 8(\ln x)^2 = 113(\ln x)^2$$

$$\begin{cases} \ln y = \frac{11\ln x + \sqrt{113} \ln x}{2} \\ \ln y = \frac{11\ln x - \sqrt{113} \ln x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln y = \frac{11 + \sqrt{113}}{2} \ln x \mid e^{\wedge} \\ \ln y = \frac{11 - \sqrt{113}}{2} \ln x \mid e^{\wedge} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \cdot e^{\frac{11 + \sqrt{113}}{2}} \\ y = x \cdot e^{\frac{11 - \sqrt{113}}{2}} \end{cases}$$

$$e^{\frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}} \neq 2, \text{ т.к. } \ln 2 \neq \frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) ~~$y = 2x$~~

$$y = 4 - x$$

$$\begin{cases} 4 - x = x \cdot e^{\frac{11 + \sqrt{113}}{2}} \\ 4 - x = x \cdot e^{\frac{11 - \sqrt{113}}{2}} \end{cases}$$

Ответ:

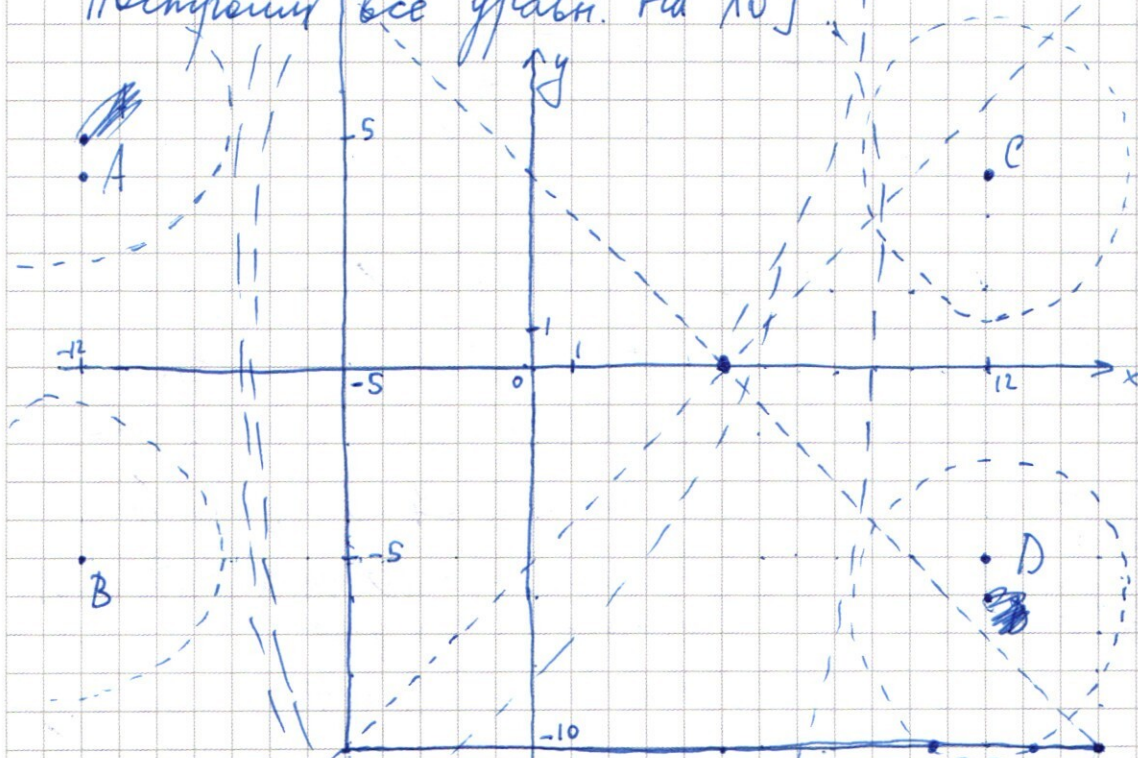
$$\begin{cases} x = \frac{4}{e^{\frac{11 + \sqrt{113}}{2}} + 1} & y = \frac{4e^{\frac{11 + \sqrt{113}}{2}}}{e^{\frac{11 + \sqrt{113}}{2}} + 1} \\ x = \frac{4}{e^{\frac{11 - \sqrt{113}}{2}} + 1} & y = \frac{4e^{\frac{11 - \sqrt{113}}{2}}}{e^{\frac{11 - \sqrt{113}}{2}} + 1} \end{cases}$$

VS.

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y + 5 - x| = 10 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 0 \end{cases}$$

- 2 реш.

Построить все уравн. на xOy :



$|x + y + 5| + |x - y + 5| = 10$ - это углы

$$\begin{cases} y = -10 \\ x \in [-5; 14] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y \in [-10; 10] \end{cases}$$

и точка (5; 0)

$$a (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

это 4 окр-ти с центрами в $\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ и радиусами $\sqrt{a}$.
(заметьте, что)

III. е. Это семейство окружностей с центрами $a \geq 0$.
в точках (назовем их A, B, C, D) должны пересекать улитку,
точку в 2 местах.

Нам подойдет случай, когда окр-ть с центром в D перес-
кивается улитку 2 раза, а остальные окр-ти ничего
не пер-ют, т.е. $a \in (25; \sqrt{34}]$, а так же когда окр-ти

с центрами в C, D не пер-ют ничего, а окр-ти с центрами

в A, B пер-ют улитку:

$$\begin{cases} a > \sqrt{17^2 + 15^2} & a > \sqrt{225 + 289} \\ a \leq \sqrt{27^2 + 5^2} & a \leq \sqrt{729 + 25} \\ a \neq \sqrt{17^2 + 5^2} & \begin{cases} a > \sqrt{514} \\ a \leq \sqrt{754} \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $(25; \sqrt{34}] \cup$
 $(\sqrt{514}; \sqrt{754}]$.

№7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$\log_2 39 > 5$$

$$\log_2 19 \cdot 7 < 9, \text{ т.е.}$$

$$39 + \log_2 2 \cdot 39 >$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} - 2x$$

$$2^x + 2x = 7 \cdot 2^{33} + 76 \quad | \log_2$$

$$x + \log_2 2x = \log_2 7 + 33 + \log_2 19 + 2$$

$$x + \log_2 x = 34 + \log_2 7 + \log_2 19$$

Заметим, что $\log_2 x$ существенно
меньше x при достат. больших x .

$$x < 34 + 3 + 5 = 42$$

$$x > 34 + 9 + 4 = 47$$

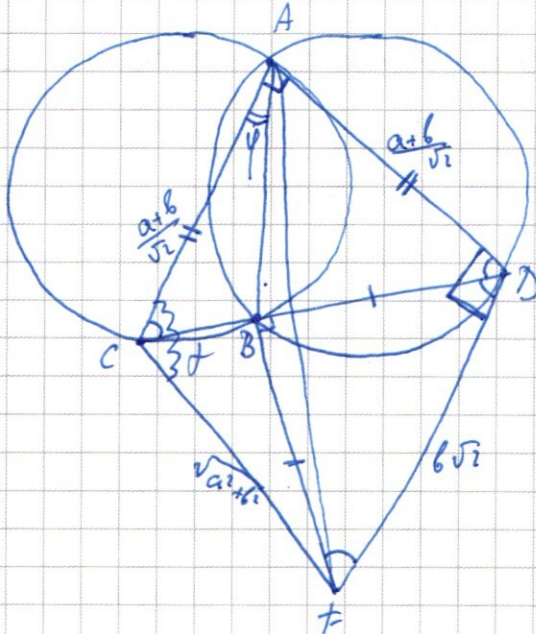
Проверим, что 39 не подх:

$$39 + \log_2 39 = 34 + \log_2 7 + \log_2 19$$

$$5 + \log_2 39 = \log_2 19 \cdot 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



а) Обозначим $BC = a$,
 $BD = b$, тогда иско-
м. кат. $\sqrt{a^2 + b^2}$;

Заметим, что $\angle ACB = \angle ADB$ т.к.
у окр-тей равн. радиусы, а AB - общ.
хорда;

Запишем теорему синусов для
треугольников ABC и ABD ($\angle CAB = \psi$):

$$\frac{AB \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sin \psi} \quad \frac{AB \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sin(90^\circ - \psi)}$$

$$a = AB \sqrt{2} \sin \psi \quad b = AB \sqrt{2} \cos \psi$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2 AB^2} = AB \sqrt{2}$$

А AB мы знаем как вычислить, т.к. на AB центр. угол 64° , а рад. мы знаем, т.е. $AB = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$;
 $CF = 10\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 20$;

б) $BC = a = 12$, тогда, т.к. $\angle CBF$ прямой $\Rightarrow BF = b = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256}$;

$$\text{Тогда } \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}; \quad b\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \Rightarrow AF = \sqrt{2(256 + 196)} = 16$$

Заметим, что $\angle ADF$ прямой (2 по 45) ($\angle ADC = \angle CDF = 45^\circ$) $\Rightarrow$

$$AF^2 = (14^2 + 16^2) \cdot 2 = AC^2 + CF^2 - 2AC \cdot CF \cdot \cos \alpha$$

$$(14^2 + 16^2) \cdot 2 = 14^2 \cdot 2 + 20^2 - 2 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{20^2 - 2 \cdot 14^2}{40 \cdot 14\sqrt{2}} = \frac{10^2 - 2 \cdot 4^2}{10 \cdot 14\sqrt{2}} = \frac{5^2 - 8}{5 \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{17}{35\sqrt{2}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{35^2 \cdot 2 - 17^2}{35^2 \cdot 2}}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 35^2 - 17^2}{35^2 \cdot 2}} =$$

$$140 \sqrt{\frac{2250 - 289}{1225}} = 140 \sqrt{\frac{1961}{1225}} \quad \text{ответ: а) } 20 \quad \text{б) } 140 \sqrt{\frac{1961}{1225}}$$

№7.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$\cos 9x - \cos 9x \cos 4x + \sin 9x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 9x \cos 4x - \cos 9x \sin 4x = 0$$

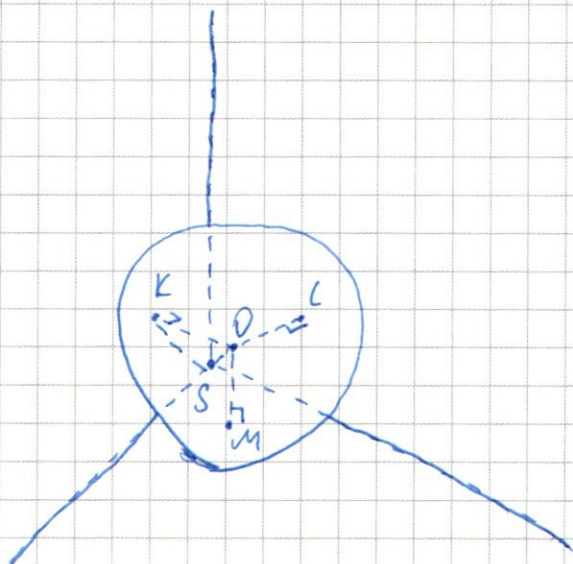
$$\cos 9x - \cos 9x \cos 4x - \cos 9x \sin 4x + \sin 9x \sin 4x + \sin 9x \cos 4x + \sin 9x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 9x (\sin 4x + \cos 4x) + \sin 9x (\sin 4x + \cos 4x) + \sin 9x + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

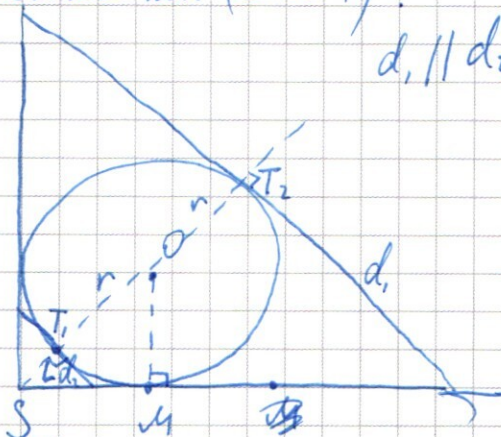
$$(\sin 4x + \cos 4x) (\sin 9x - \cos 9x) + \frac{\cos 9x + \sin 9x + \sqrt{2} \cos 4x}{\sin 9x - \cos 9x + \sqrt{2} (\sin 4x + \cos 4x)} = 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Сечение м. (SOM):
 $d_1 \parallel d_2$



Обзн. расст. от S до 1 м. к l,
рад. шара - r, тогда

Заметим, что м. сечение угла многоугольником - 2 подобн. треугол. с коэф. подобия $\frac{L}{L+2r}$ (из м. Рамеса в сечении), при этом отн. м. есть квадр. коэф. подобия, т.е. $0,25 \cdot \frac{L}{L+2r}$

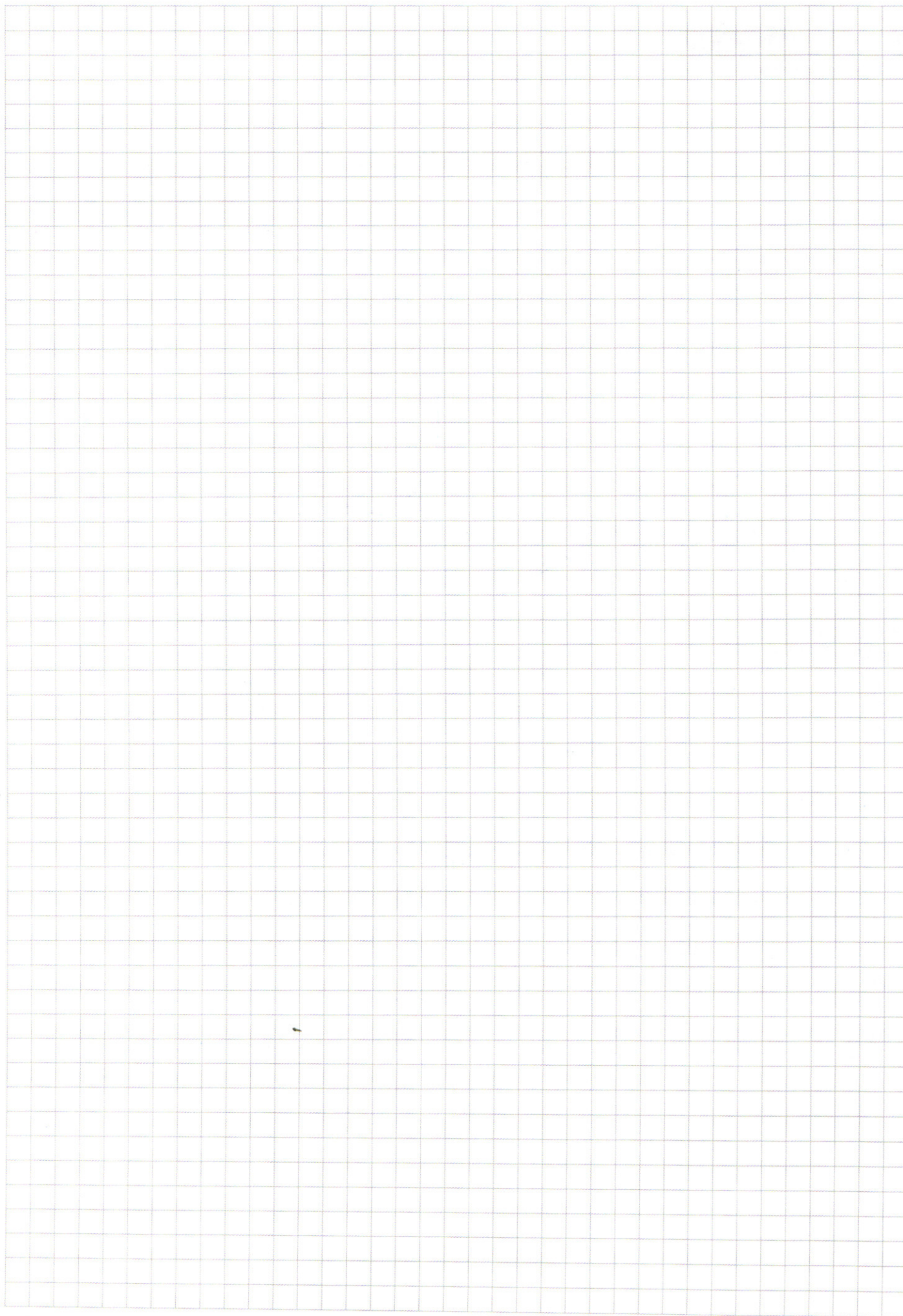
$$3L = 2r \quad r = 1,5L;$$

Теперь заметим, что м. сечение угла м. (KLM) - тоже треугол. подобн. тем, у которых ~~отн.~~ м. сев. 1 и 16, и его площадь $\frac{S}{1} = \left(\frac{L+r}{L}\right)^2 = (2,5)^2 = 6,25$,

Рассмотрим на угол $\angle OKS$: он прямой (впис. сфера) $\Rightarrow$
 $\angle KSO = \arcsin \frac{KO}{OS} = \arcsin \frac{r}{r+L} = \arcsin \frac{1,5}{2,5} = \arcsin 0,6$.

Ответ: 6,25;

$\arcsin 0,6$

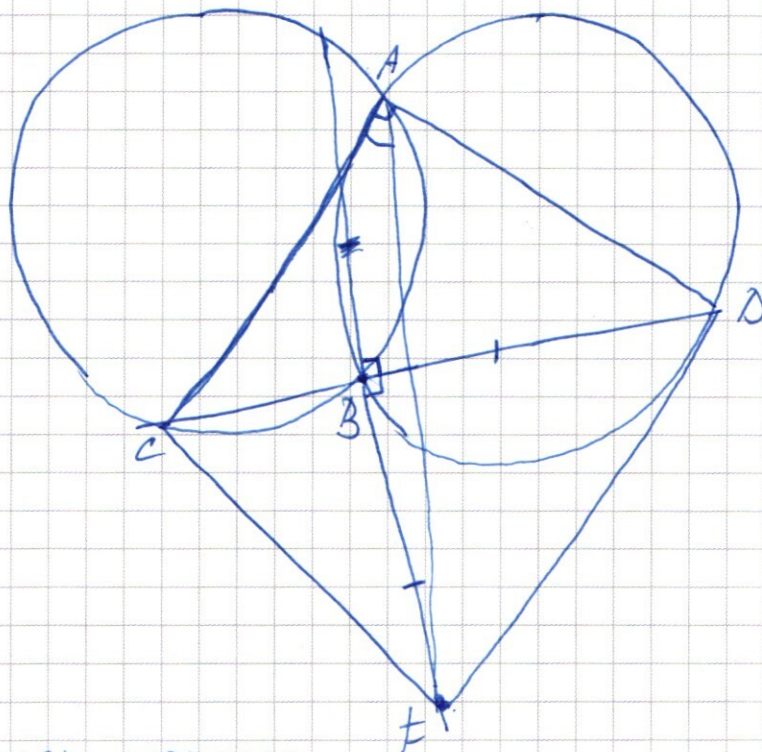


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

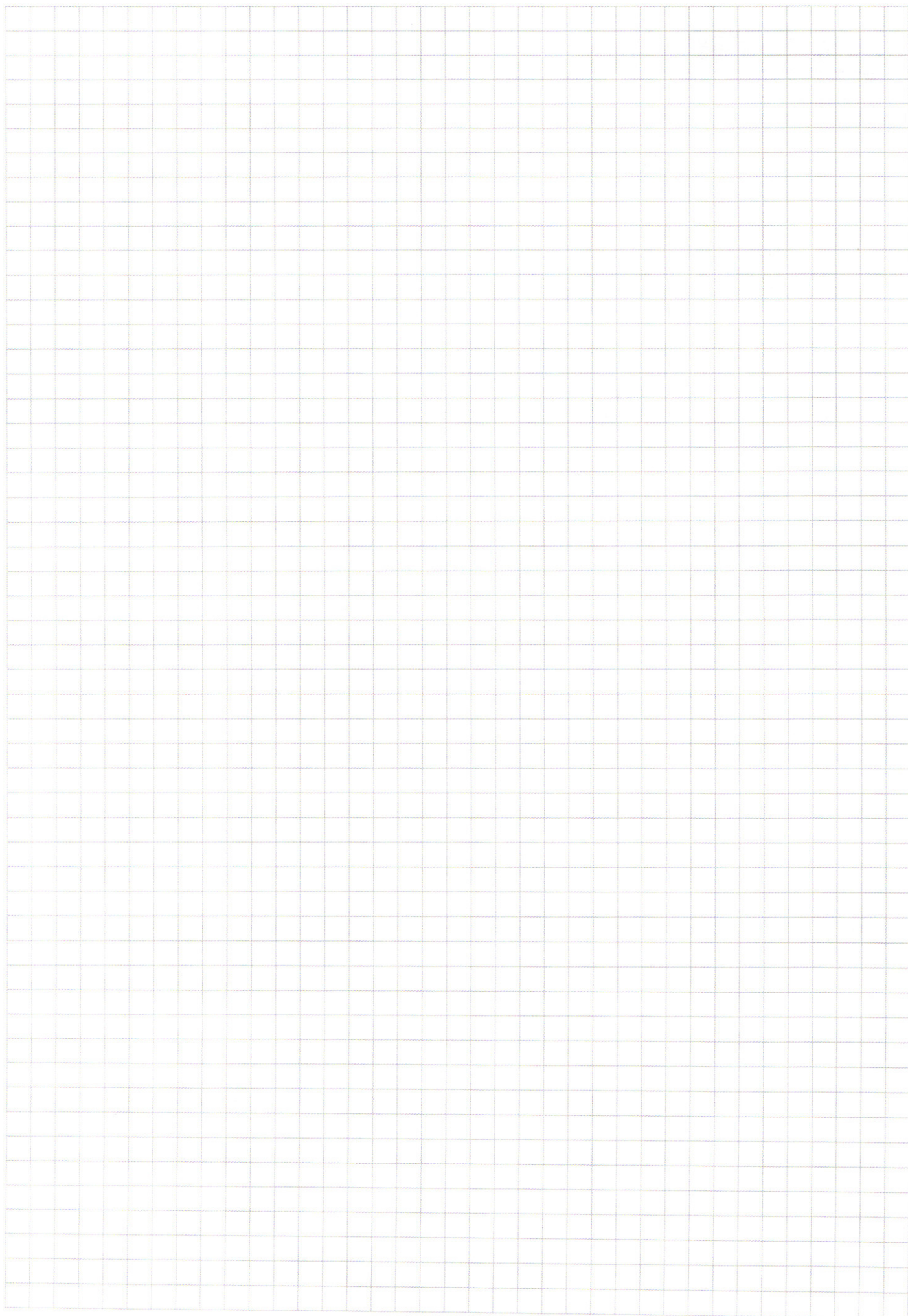
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



$$\cos 9x - \cos 9x \cos 4x$$

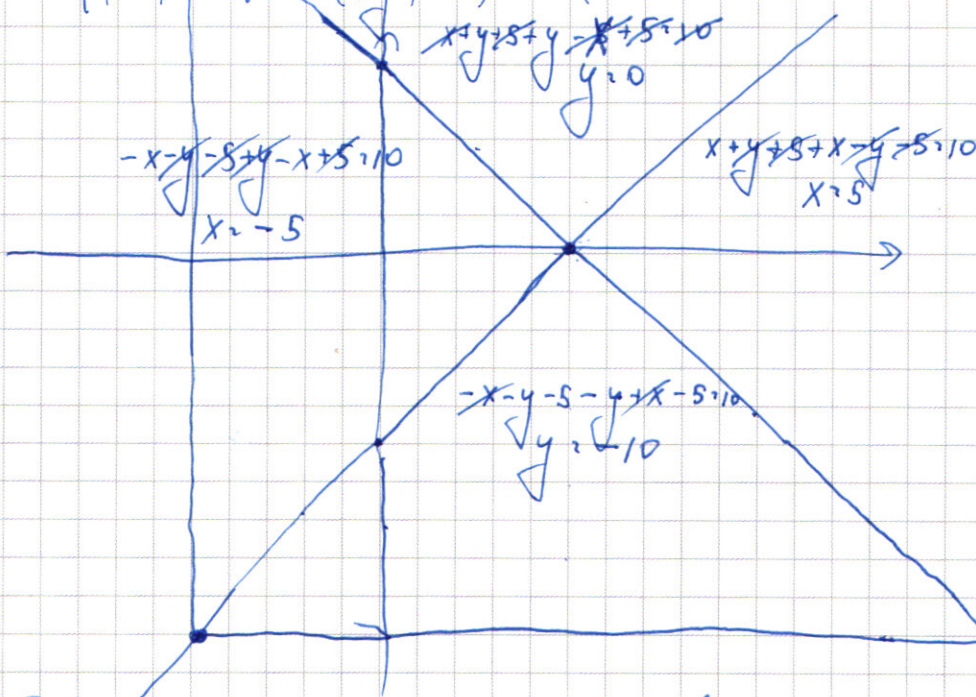


☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

⑤ $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$

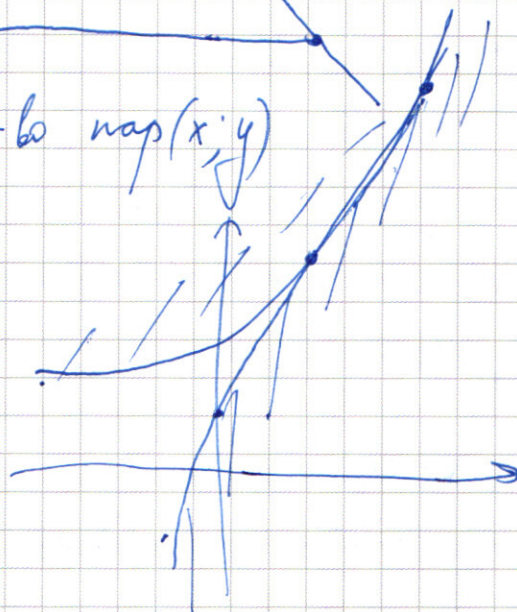
- 2 рещ.



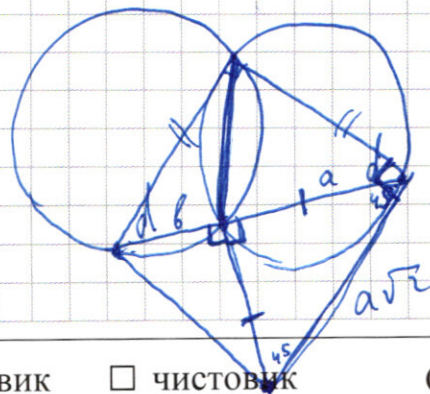
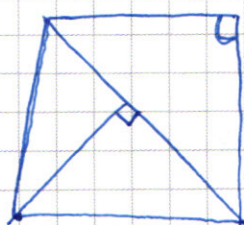
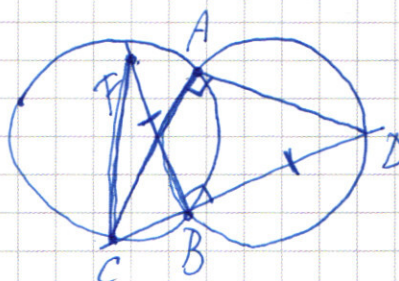
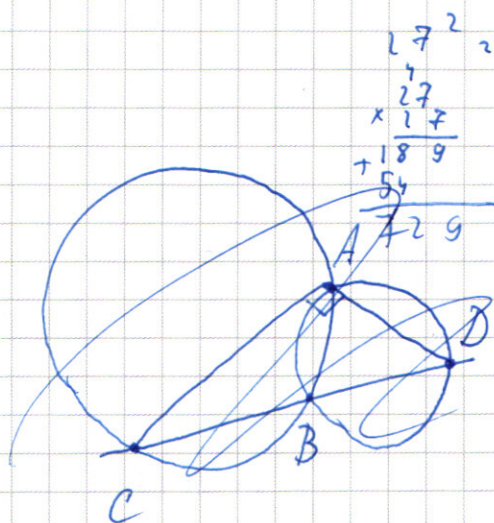
$\begin{cases} |y+5+x| = 10 \\ |y+5-x| \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$

каж-то пар (x, y)



⑥



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $9261 = 3 \cdot 3087 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

$343 = 49 \cdot 7 = 7^3$

$17^2 = 289$

$35^2 = 1225$

$175 \cdot 7 = 1225$

$2250 - 289 = 1961$

$\frac{1}{2}$ раз, 3 раз, 7 раз

$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{6 \cdot 2} = 56 \cdot 5 \cdot 2 = 560$

② $\cos 9x = \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 2x = \cos 8x$

$\cos(d+\beta) = \cos d \cdot \cos \beta - \sin d \cdot \sin \beta$

$\cos d \cos \beta - \sin d \sin \beta = \cos d$

$2 \cos 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 2x \sin 2x - 2 \sin \frac{\beta}{2} (\sin d + \frac{\beta}{2})$

③ $(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{4}{x^2})}$

$y^2 - 4y - xy - 2x^2 + 8x = 0$

$y^2 - y(x+4) + 2x(x-4) = 0$

$(4-x) + 2x = 4+x$

$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$

$11^2 - 8$

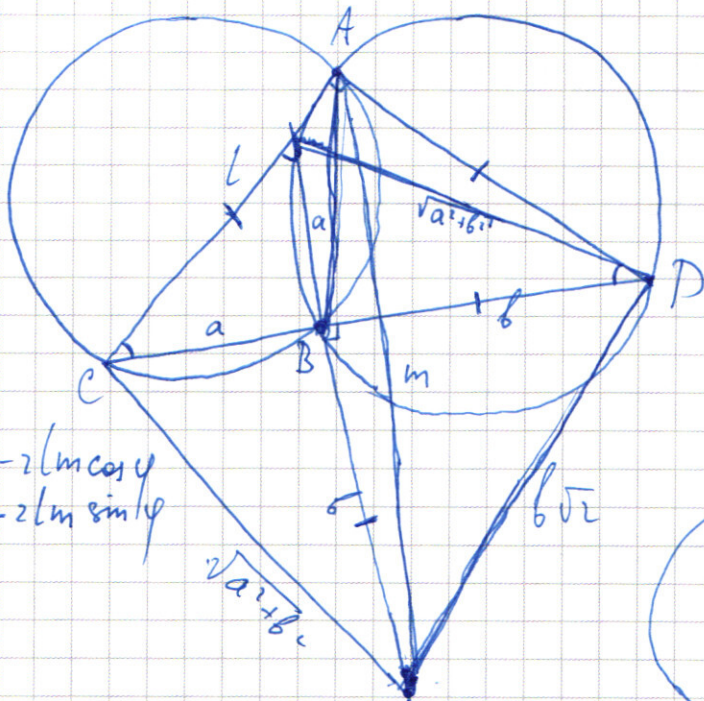
$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y + 7 \ln x} \mid : y^{-4 \ln x}$

$x^{2 \ln x} = y^{\ln y + 11 \ln x}$

$x^{2 \ln x} = x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x}$

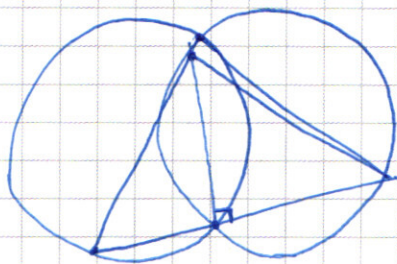
$y^{\ln y} = x^{-2 \ln x} \cdot y^{-11 \ln x / \ln y}$

$(\ln y)^2 = -2(\ln x)^2 + -11 \ln x \cdot \ln y$



$$l^2 + m^2 - 2lm \cos \varphi$$

$$l^2 + m^2 - 2lm \sin \varphi$$

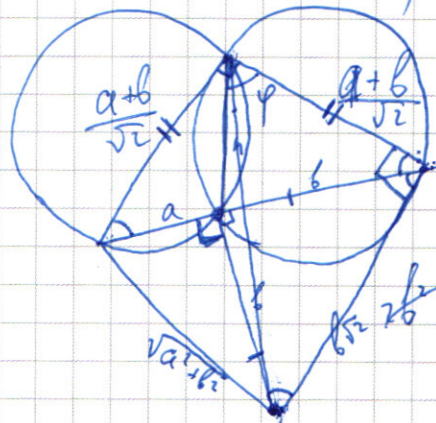


$$\frac{b}{\sin \varphi} = \frac{n}{\sin 45}$$

$$\frac{a}{\cos \varphi} = \frac{n}{\sin 45}$$

$$b = n\sqrt{2} \sin \varphi$$

$$a = n\sqrt{2} \cos \varphi$$



$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} - 2x$$

$$2^x + 2x + 5 \cdot 2^{33} - 76 = 0$$

$$x + 1 + \log_2 x + 33 + \log_2 5 - \log_2 76 = 0$$

$$x + \log_2 x = \log_2 76$$

$$x + \log_2 3 + 34 = \log_2 76 + 33$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} - 2x$$

$$2^x + 2x = 76 - 2^{33} \cdot 5 \sim -2^{34}$$

$$\rightarrow 0$$

$$76 + 2^{34} - 4$$

$$4 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$8 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 3 \cdot 2^{33} - 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

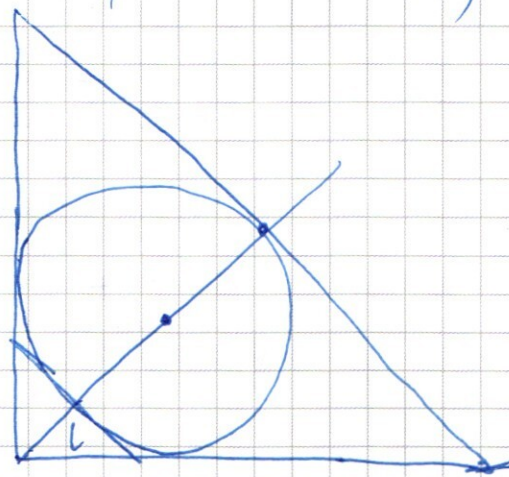
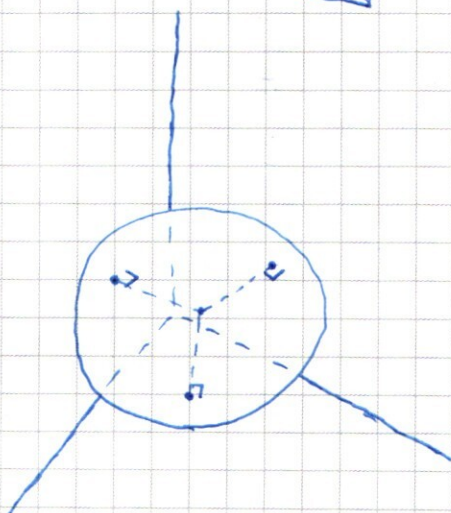
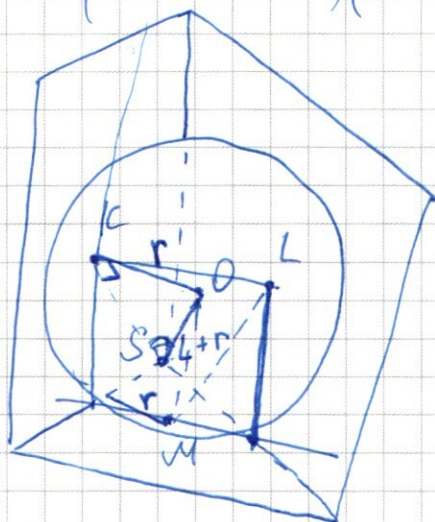
$$\cos 9x + \sin 9x - \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$\frac{\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x}{\sin 5x} - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \frac{\sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x}{\sin 5x} = 0.$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$\cos 4x (\sin 5x + \cos 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x (\sin 5x - \cos 5x) (1 - \sin 4x) + \cos 4x (\sin 5x + \cos 5x + \sqrt{2}) = 0.$$



$$\arcsin \frac{r}{L+r} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13} \approx 0,6.$$

$$\frac{L+2r}{L+r} = 4 \quad \left(\frac{L+r}{1} \right)^2 = (2,5)^2$$

$$L+2r = 4(L+r)$$

$$2r = 3L$$

$$3L = 2r \quad r = \frac{3}{2}L$$