

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

- 1) разложим 9261 на простые множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$
т.к. $3 \cdot 7 = 21$, а это простое число, а не цифры, то
все цифры чисел 8-ми значных чисел
будут равны 3, 7 или 1 (т.к. 1 не входит на
результат умножения; $x \cdot 1 = x$). Причем в
числе должно быть 3 тройки, 3 семерки и
2 единицы.

- 2) число:

(берем число вариантов)

А теперь будем «двигать» левую единицу влево
по 1 цифре вычитая, пока число на 1
разряд «двигая» правую единицу и делаем
то же самое, пока не получим 6 видов

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \end{array}$$

Таких действий будет $4 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$

$= 8 \cdot 3 + 4 = 28$, причем для каждого вида числа

$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$ есть а-б-с-д-е-ф-г вариантов чисел,

в каждом случае это $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6 \text{ раз}} = 2^6$.

Итого, таких чисел $28 \cdot 2^6$

Ответ: $28 \cdot 2^6$, или 1792

$$\left[(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \right] \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y &= 0 \quad (2) \end{aligned} \right.$$

$$\text{ОДЗ: } \left\{ \begin{aligned} x &> 0 \\ \frac{y}{x^2} &> 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned} \right.$$

$$(2): (y^2 - 4x^2) - 4(y - 2x) + 2x^2 - xy = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x) - 4(y - 2x) - x(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x - 4 - x) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} y &= 2x \\ y &= -x + 4 \end{aligned} \right.$$

$$(1) \text{ I. } y = 2x$$

$$(2^4 x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$x > 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$(2^4 x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x})}$$

$$(2^4 x^6)^{-\ln x} = \frac{(2x)^{\ln(2)}}{2x^{6\ln x}}$$

$$(2^4 x^6)^{-\ln x} \cdot (2^6 x^6)^{\ln x} = (2x)^{\ln(2)}$$

$$2^{-4\ln x} \cdot x^{-6\ln x} \cdot 2^{6\ln x} \cdot x^{6\ln x} = (2x)^{\ln(2)}$$

$$2^{2\ln x} \cdot 1 = (2x)^{\ln(2)}$$

(логарифмируем)

$$2\ln x \cdot \ln 2 = \ln 2 \cdot \ln(2x)$$

$$2\ln x = \ln 2 + \ln x$$

$$\ln x = \ln 2$$

$\ln(x)$ — монотонная

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned} \right.$$

$$(1) \text{ II. } y = -x + 4$$

$$(x^2(x-4)^4)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln(\frac{-x+4}{x^2})}$$

$$(-x+4)^{-\ln x} = \frac{(-x+4)^{\ln(-x+4)}}{x^{2\ln x}}$$

ОДЗ:

$$\left\{ \begin{aligned} x &> 0 \\ \frac{-x+4}{x^2} &> 0 \Rightarrow x > 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} -x+4 &\neq 0 \\ -x+4 &> 0 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2(x-4)^2)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln\left(\frac{-x+4}{x^2}\right)}$$

II. $y = -x+4$

(1): $(x^2(x-4)^2)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln(-x+4)} : (-x+4)^{7\ln x}$

$\frac{-x+4}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{-x+4}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x} < 0 \Rightarrow x \in (0; 4)$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ -x+4 > 0 \\ x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 4)$

т.к. $(-x+4)^{7\ln x} \neq 0$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} \cdot (-x+4)^{7\ln x} = (-x+4)^{\ln(-x+4)}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (-x+4)^{3\ln x} = (-x+4)^{\ln(-x+4)}$$

$$x^{-2\ln x} = (-x+4)^{\ln(-x+4) - 3\ln x}$$

(логарифмируем):

$$-2\ln x \cdot \ln x = (\ln(-x+4) - 3\ln x) \cdot \ln(-x+4)$$

$$-2(\ln x)^2 = (\ln(-x+4))^2 - 3\ln x \cdot \ln(-x+4)$$

после $a = \ln(x)$;

$b = \ln(-x+4)$, тогда:

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \quad \text{D} = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

$$b = \frac{3a \pm |a|}{2} = \frac{3a \pm a}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln(-x+4) = 2\ln(x) & (3) \\ \ln(-x+4) = \ln(x) & (4) \end{cases}$$

~~$-x+4 = x^2$~~ $\Rightarrow$ ~~$x^2+x-4=0$~~

$-x+4 = x^2 \Rightarrow x^2+x-4=0$

$D = 1+4 \cdot 4 = 17$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \quad y = 4 - x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$(4) \begin{cases} -x + 4 = 1 = x \rightarrow \text{не существует} \\ -x + 4 = x \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Уточн: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4, \text{ т.к. } -1 + \sqrt{17} < -1 + 5 \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (x=2; y=2); (x=2; y=4); \left(x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x - \cos 4x \cdot \cos 2x - \sin 4x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x +$$

$$+ \sin 4x \cdot \cos 2x + \cos 4x \cdot \sin 2x + \sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x \cdot \sin 2x = 0$$

$$- 2 (\sin 4x \cdot \sin 2x) - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

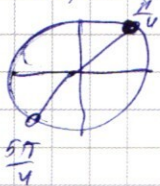
$$\sqrt{2} \cdot \sin 4x \cdot \cos 2x - \cos 4x - \sqrt{2} \cdot \sin 4x \cdot \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \cdot \sin 4x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \cdot \sin 4x - \cos 2x - \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos 2x = \sin 2x$$



$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \sin 4x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = 0$$

$$\sin 4x - \left(\cos 2x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$

$$\sin 4x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi q, q \in \mathbb{Z} \\ 4x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi q \\ 6x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi q \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \end{cases}$$

ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi q}{5}, q \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (I) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (II) \end{cases}$$

$$I) \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ x=5 \end{cases}$$

$$(I) \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ x+y+5+y-x+5=10 \\ y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ y=0 \end{cases}$$

$$I) \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ -x-y-5+y-x+5=10 \\ x=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$I) \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \\ x-y-5-y+x-5=10 \\ -2y=20 \\ y=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ y=-10 \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} 1) x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

окр. с центром (12; 5)

$$2) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

окр. с центром (12; -5)

$$3) \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

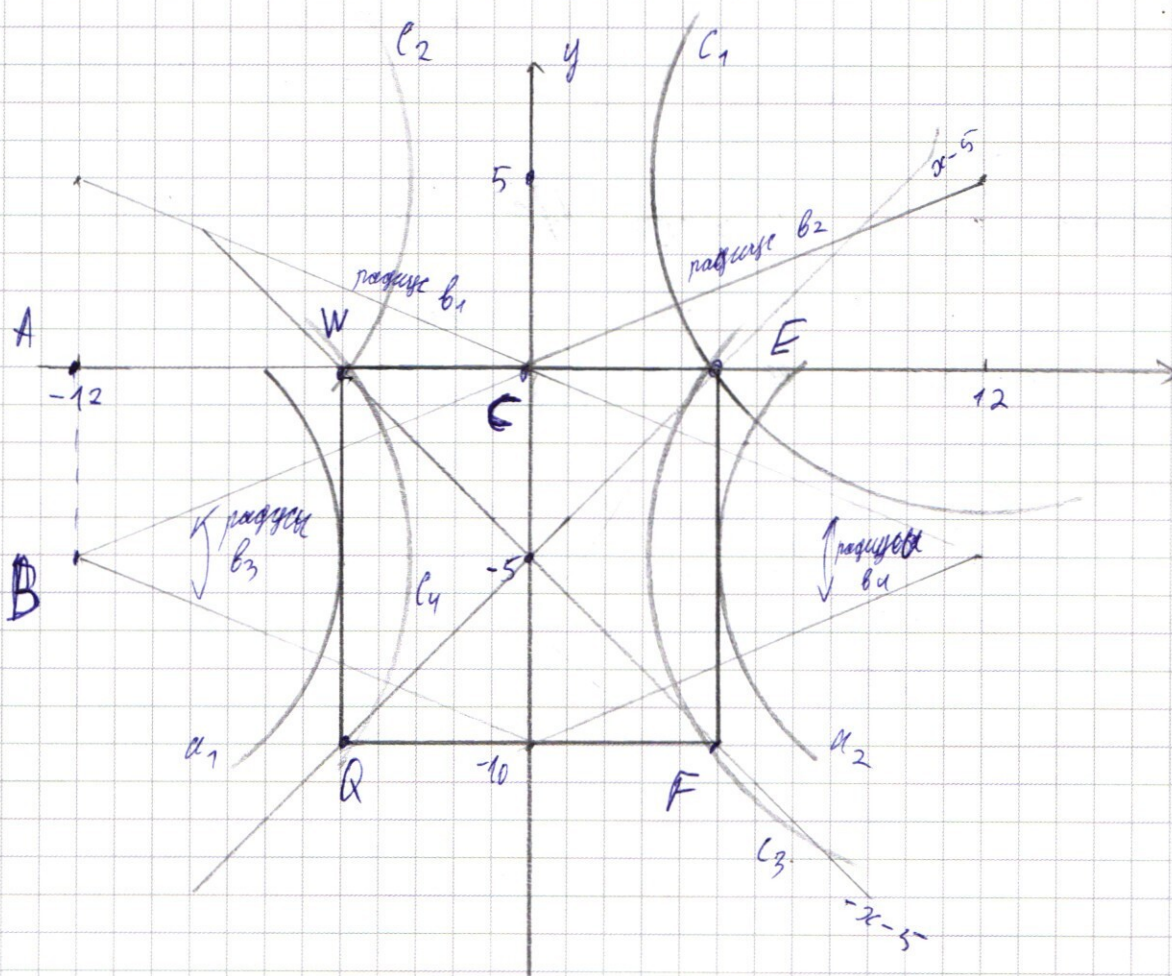
окр. с центром (-12; 5)

$$4) \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

окр. с центром (-12; -5)

окружности все с радиусом $\sqrt{a}$
замечать, что $a > 0$, иначе окружностей не будет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



случай 1: „боковые окр. α_1 и α_2 касаются квадрата; $V_1 = V_2 = 12 - 5 = 7$. $\alpha = r^2 = 7^2 = 49$

случай 2: все верш. сир. пересекаются в $(0;0)$
 (b_1, b_2)

и численые (b_3, b_4) пересекаются в $(0; 0)$ и $(\text{но } 0; -10)$,

$$v = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \Rightarrow a = v^2 = 169$$

прим: из-за
ограничений на
x и y окружности

№ 7. Треугольник
($\triangle ABC$)

t_1, t_2, t_3, t_4 встретились ~~в~~ в точке пересечения

случай 3: $r = \sqrt{a} = \sqrt{49} \Rightarrow a = 49$

"верхние" окруж. пересекают квадрат
 C_1 и C_2 в точках E и W ,

а "нижние" (C_3 и C_4) в точках A и F ,
 по формуле решения и, а не 2.

~~в остальных случаях ($a > 49$; $a \neq 169$) решений
 будет больше~~

~~всегда и) при $a \in (0; 49)$ решений нет~~

при $a \in (49; 49)$ решений более 2-х

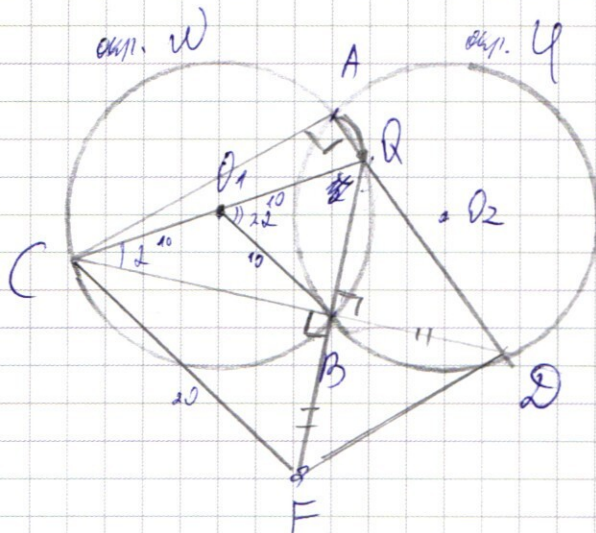
при $a \in (49; 169)$ решений более 2-х

при $a \in (169; +\infty)$ решений нет, т.к. окруж-
 ностей не будет из-за ограничений
 по x и y .

ответ: $\begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

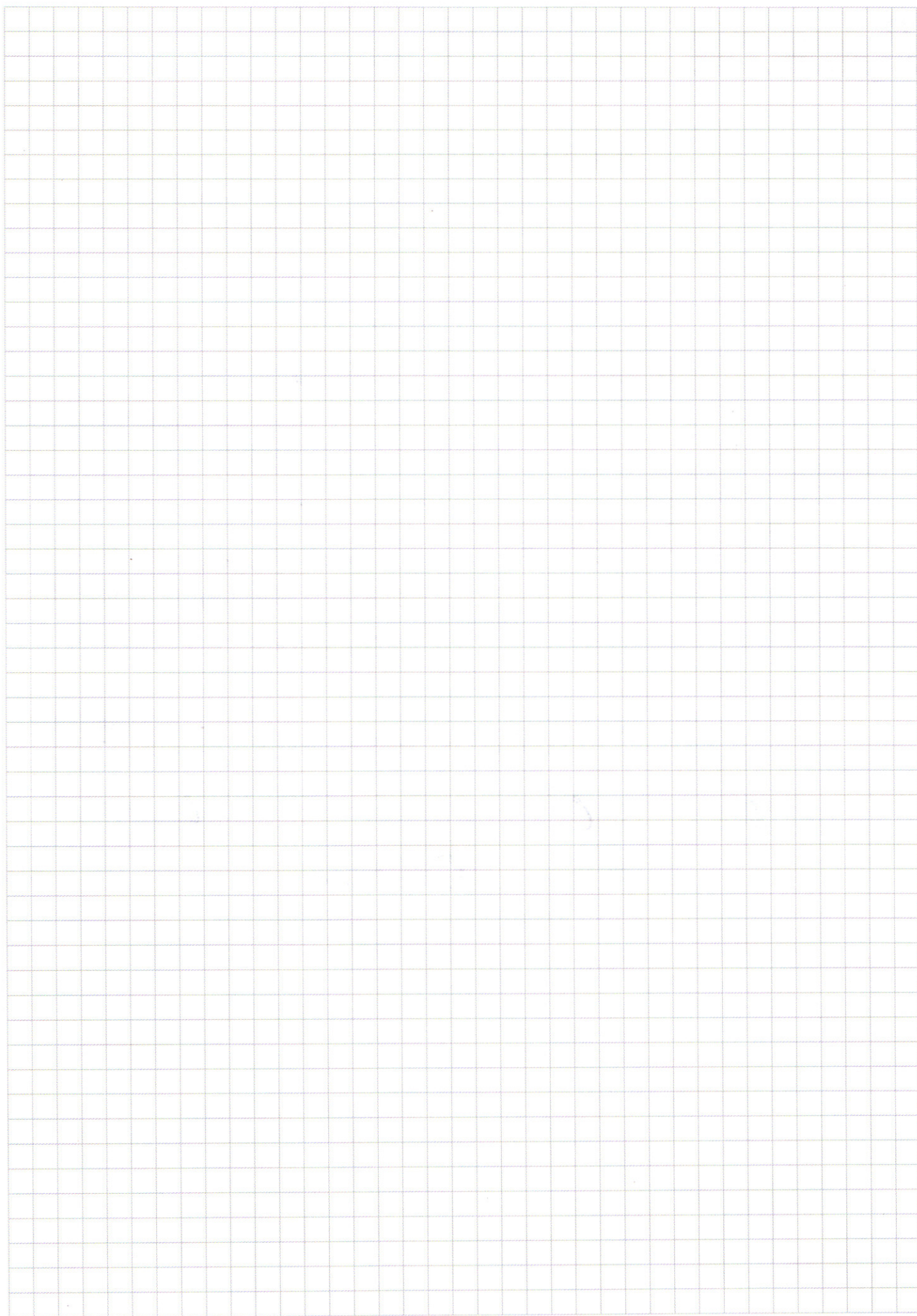
№ 6. (a)



- 1) $AD \cap \omega = Q$
 $ACQB$ - вписан. 4-угольник $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle QAC + \angle CBQ = 180^\circ$;
 $\angle QAC = 90^\circ$ по усл. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CBQ = 90^\circ$
 $FB \perp CD$; $QB \perp CD \Rightarrow$
 $\Rightarrow Q \in \text{прямой } FB$
 $\angle QBC = 90^\circ \Rightarrow CQ$ - диаметр $\Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1 \in CQ$; $O_1C = O_1Q = 10$

- 2) $\left. \begin{array}{l} O_1O_2 = 10 = O_1C \\ QB = BF \end{array} \right\} \Rightarrow Q_1B$ - средняя линия $\triangle CQF \Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1B \parallel CF$; $O_1B = \frac{1}{2} CF \Rightarrow CF = 2 \cdot O_1B = 20$

ответ: $CF = 20$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 10
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sqrt{2} \cdot \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2): \sqrt{2} \cdot \sin(3x+4x) - \cos 2x - \sin 2x = 0; \sqrt{2} \cdot (\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x) - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin 4x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = 0$$

$$\sin 4x - \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2x \right) = 0$$

$$\sin 4x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$\begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \quad (1) \\ \sin 4x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 2x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 4x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 6x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{6} \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \left(\frac{y}{x^2} \right)} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(1) (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln x}}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2 \ln(x^2)}}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} \cdot y^{2 \ln x} = y^{\ln y} \Rightarrow \frac{y^{2 \ln x}}{(x^2 y^4)^{-\ln x}} = y^{\ln y}$$

$$(2): (y^2 - 4y + 4) - (2x^2 -$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) + xy - 3x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) - 2x^2 + 8x - xy - 4 = 0$$

$$(y - x)^2 - 2x(x - 4) - (xy + 4) = 0$$

$$(y - 2)^2 - 2x(x - 4) - (xy + 4) = 0$$

$$y^2 - xy + x^2 - 3$$

$$\frac{y^{2 \ln x}}{(x^2 y^4)^{-\ln x}} = y^{\ln y}$$

$$\frac{y^{2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x}}{x^{-2 \ln x}} = y^{\ln y} \Rightarrow y^{1 + \ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{-2 \ln x}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (y^2 - 2x^2) - 4(y - 2x) - xy = 0 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (y - \sqrt{2}x)(y + \sqrt{2}x) - 4(y - 2x) - xy = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^2 - 4y + 4}{-2(x^2 - 2x + 1)} - \frac{2x^2 + 4x - 2}{-2(x^2 - 2x + 1)} + 4x - xy + 2 = 0$$

$$(y - 2)^2 - 2(x - 1)^2 + 2(2x + 1) - xy = 0$$

$$(y^2 - 4x^2) - 4(y - 2x) + 2x^2 - xy = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x) - 4(y - 2x) - x(y - 2x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + 2x - 4 - x) = 0$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$(2) : \begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$(16x^6)^{-\ln(2x)} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6 \ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{6 \ln x}}$$

$$(2x)^{6 \ln x} \cdot (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2}$$

$$\underbrace{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}_{2^{2 \ln x}} \cdot \underbrace{2^{-4 \ln x} \cdot x^{-6 \ln x}}_1 = \dots \quad \underbrace{2^{6 \ln x} \cdot x^{6 \ln x}}_{2^{2 \ln x}} \cdot \underbrace{2^{-4 \ln x} \cdot x^{-6 \ln x}}_{x^{6 \ln x} \cdot x^{-6 \ln x}} = (2x)^{\ln 2}$$

$$2^{2 \ln x} = (2x)^{\ln 2}$$

$$2^{2 \ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$$

$$2^{2 \ln x - \ln 2} = x^{\ln 2}$$

$$(2 \ln x - \ln 2) \log_2 2 = \ln 2 \cdot \log_2 x$$

$$2(\ln(x) - \ln(2)) = \ln 2 \cdot \log_2 x$$

$$\ln 2 (\log_2 x + 1) = -2 \ln(x)$$

$$2^{2 \ln x} = (2x)^{\ln 2}$$

$$2^{2 \ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$$

$$\frac{2^{2 \ln x}}{2^{\ln 2}} = x^{\ln 2}$$

$$2^{\ln x - \ln 2} = x^{\ln 2}$$

$$(2 \ln(x) - \ln(2)) \cdot \ln(2) = \ln 2 \cdot \ln(x)$$

$$\ln(x) = \ln(2)$$

$$x = 2 \quad y = 4$$

$$OK: x > 0$$

$$\frac{y}{x^2} > 0$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1, $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$
 $a_1 a_2 \dots a_8 = 9261$

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ \cdot 27 \\ \hline 2401 \\ + 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 64 \\ + 28 \\ \hline 512 \\ + 128 \\ \hline 1492 \end{array}$$

1, 3, 7

3x3
4x3
2x1

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 2 & 3 & 3 & 8 & 27 & 216 \\ \hline 528 & 28 & 12 & 56 & 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ - 9 \\ \hline 26 \overline{) 3} \\ - 24 \\ \hline 21 \overline{) 3} \\ - 21 \\ \hline 6 \overline{) 3} \\ - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 0

$$343 = 7^3$$

$$3^3 \cdot 7^3$$

используя числа
мощи были 1, 3, и 7
больше варов нет, т.к.
 $3 \cdot 7 = 21$, это уже не число
а число

111 3 33 44

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 312 & 312 & 312 & 312 & 312 & 312 & 312 \end{array}$$

$$(4 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \cdot 6 \cdot 2 = 8 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

N2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$\cos(5x+4x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(7x+2x) + \sin(7x-2x) = 0$$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 7x \cdot \cos 2x + \sin 2x \sin 7x + \sin 7x \cos 2x - \sin 2x \sin 7x = 0$$

$$\cos(7x+2x) - \cos(7x-2x) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 7x \cdot \cos 2x - \sin 7x \sin 2x - \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x$$

$$2 \sin 4x \cos 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cos 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos(4x-3x) + 2 \sin 4x \cos 2x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x) + 2 \sin 4x \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} 2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 4x \cdot (\cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x) = \cos$$

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \cos(5x+4x) - \cos 5x + \sin(5x+4x) + \sin 5x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ + \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x - \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 4x - \cos 5x \cdot \sin 4x + \sin 5x &= \sqrt{2} \cos 4x \end{aligned}$$

$$\cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x - \cos 5x + \sin 5x \cdot \cos 4x - \cos 5x \cdot \sin 4x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1 - \sin 4x) + \sin 5x (-\sin 4x + \cos 4x + 1) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 9x = \cos(3(3x)) = 4\cos^3(3x) - 3\cos(3x)$$

$$+ \cos 5x = \cos(3x+2x) = \cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \sin 2x$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

$$\sin 9x = 3\sin 3x - 4\sin^3 3x$$

$$\sin 5x = \sin 3x \cdot \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x$$

$$\begin{aligned} 4\cos^3(3x) - 3\cos(3x) - \cos(3x) \cdot \cos(2x) + \sin(3x) \sin(2x) - 2\sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} + \\ + 3\sin 3x - 4\sin^3 3x + \sin^3 3x - \cos 2x + \cos 3x \cdot \sin 2x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4(\cos 3x - \sin 3x)(\cos^2 3x + \cos 3x \sin 3x + \sin^2 3x) - 3(\cos 3x - \sin 3x) - (\cos 3x - \sin 3x) \cos 2x + \\ + \sin 2x (\sin 3x + \cos 3x) - 2\sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(7x+2x) - \cos(7x-2x) - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin(7x+2x) + \sin(7x-2x) = 0 \\ \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x - \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x + \sin 7x \cos 2x + \cos 7x \sin 2x - \sin 7x \cos 2x - \cos 7x \sin 2x = 0 \end{aligned}$$

$$-2(\sin 7x \cdot \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin(7x) \cos(2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x - \cos 4x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \cdot \sin 7x - (\cos^2 2x + \sin^2 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \quad (1) \\ \sqrt{2} \cdot \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \sqrt{2} \cdot \sin(3x+4x) = \sqrt{2} \cdot \sin(3x) \cos(4x) + \sqrt{2} \cdot \cos(3x) \sin(4x) - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot \sin 7x &= \sin 2x + \cos 2x \\ 6[-\sqrt{2}; \sqrt{2}] & \quad 6[-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin 2x &= 2\cos^2 x - 1 + 2\sin x \cos x \\ 1 + \sqrt{2} \cdot \sin 7x &= 2\cos x (\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x - 2\sin^2 x \\ (\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) : $y = -x + 4$

$$(x^2 (x-4)^4)^{-\ln x} = \frac{(-x+4)^{\ln(-x+4)}}{(-x+4)^{4\ln x}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (x-4)^{-4\ln x} \cdot (-x+4)^{4\ln(x)} = (-x+4)^{\ln(-x+4)}$$

$$x^{-2\ln(x)} \cdot (-x+4)^{3\ln(x)} = (-x+4)^{\ln(-x+4)}$$

$$x^{-2\ln(x)} = (-x+4)^{\ln(-x+4) - 3\ln(x)}$$

$$\frac{x^{-2\ln(x)}}{x^{-2\ln(x)}} = \frac{(-x+4)^{\ln(-x+4) - 3\ln(x)}}{x^{-2\ln(x)}} = 4^{\frac{\ln(-x+4)}{x^3}}$$

$$-2\ln(x) - \ln(x) = (\ln(-x+4) - 3\ln(x)) - \ln(-x+4)$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2(-x+4) - 3\ln(x) \cdot \ln(-x+4)$$

$$a = \ln(x)$$

$$b = \ln(-x+4)$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$D = 9a^2 - 4a^2 = a^2$$

$$b = \frac{3a \pm a}{2} \quad \begin{cases} b = 2a \\ b = a \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(-x+4) = 2\ln(x) & (1) \\ \ln(-x+4) = \ln(x) & (2) \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} -x+4 = x^2 \\ -x+4 = 1 = x \end{cases}$
 $x = 1$

$x^2 + x - 4 = 0$
 $D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$
 $y = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} + \frac{8}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

(2) $-x+4 = 1 = x$
 $x = 1.5$

$$-x+4 = x$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

№5.

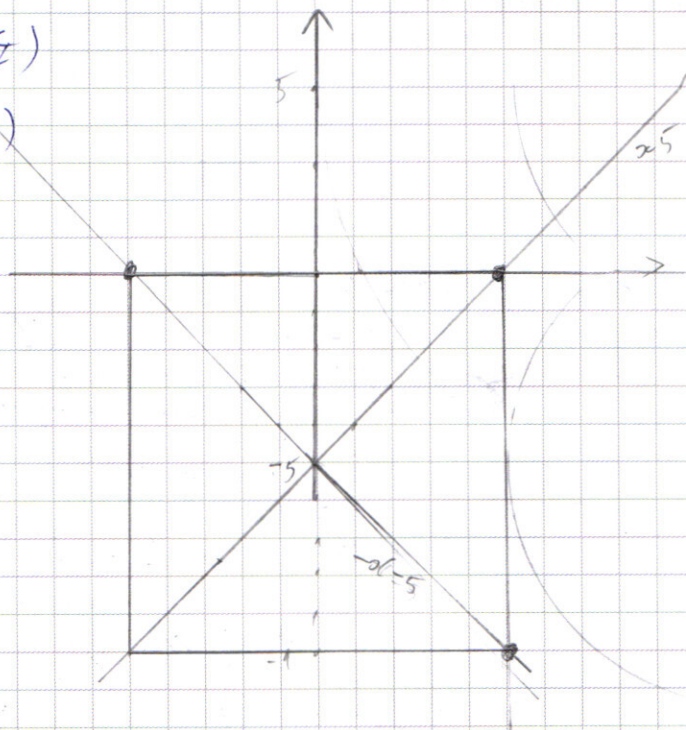
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \text{ (I)} \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \text{ (II)} \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$

$$2y - 10 = 0 \\ y = 0$$

2. $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$

$$x+y+5 - (y-x+5) = 10 \\ x = 5$$



3. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a \\ (12; 5)$$

4. $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

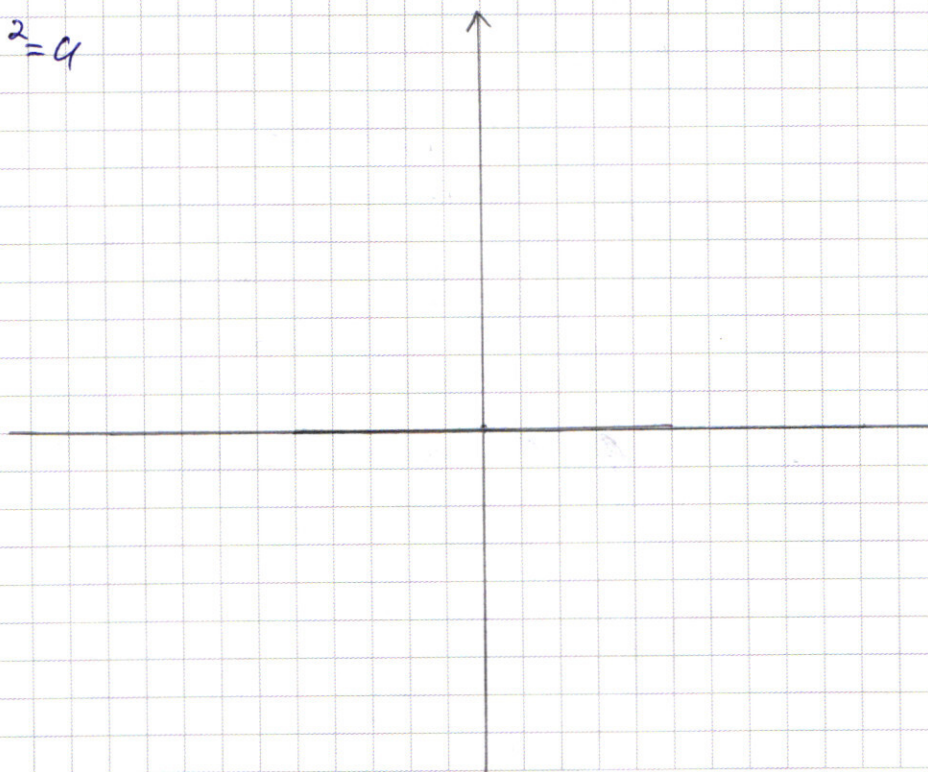
$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a \\ (12; -5)$$

5. $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

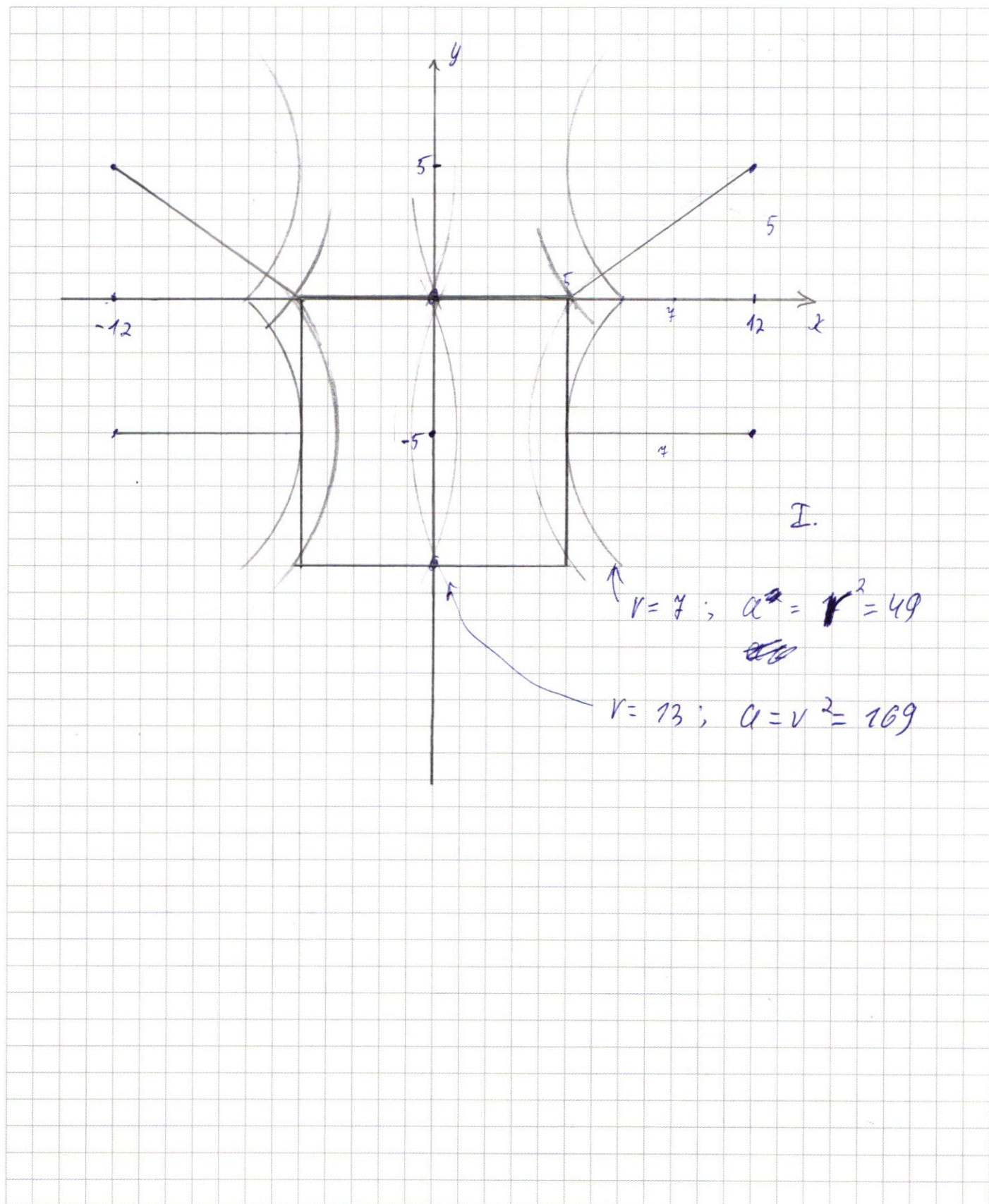
$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = a \\ (-12; 5)$$

6. $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

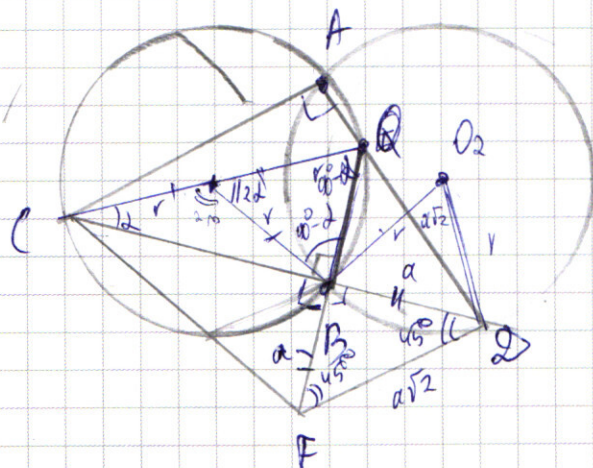
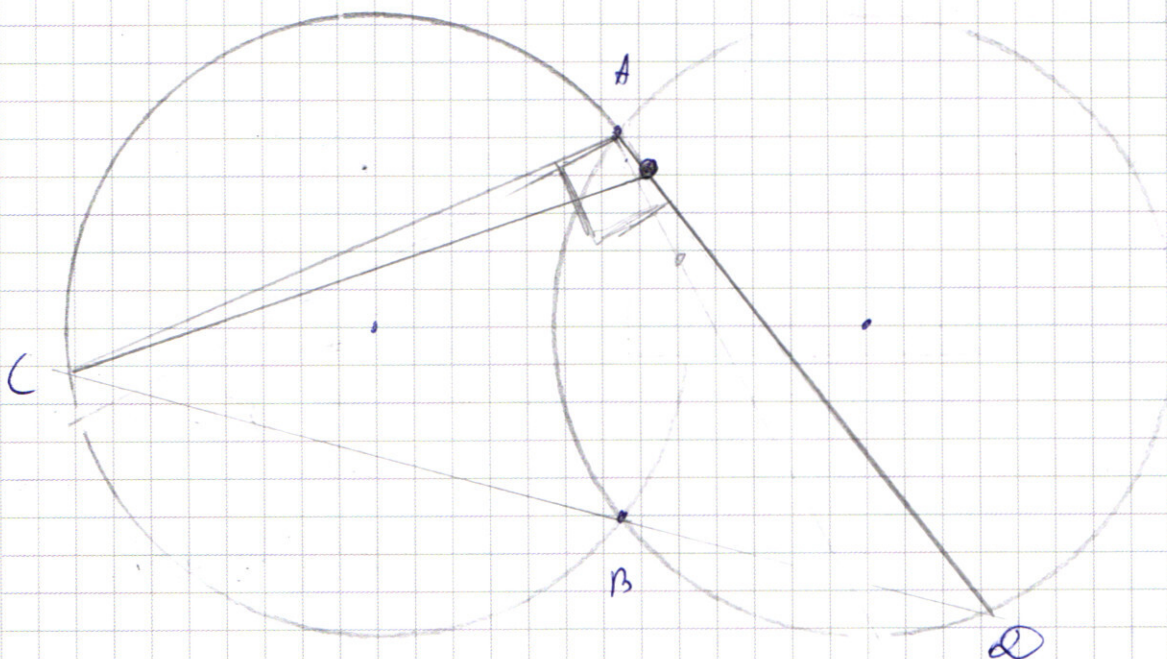
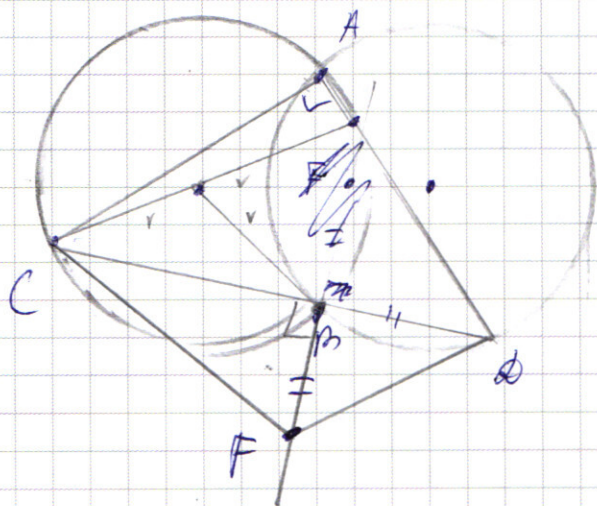
$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = a \\ (-12; -5)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Реш.
№6.



$AQ \perp BC$ - впис. ч-ть $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle C B Q = 90^\circ \Rightarrow Q \in \text{пр. } FB$
 $\angle F D B$ (между FQ и DB) =
 $= \angle B O_2 D$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 64 \\ \hline + 28 \\ \hline + 512 \\ \hline + 128 \\ \hline 792 \end{array}$$