

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{cccccc} N1 & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

перечислим все возможные варианты

$$1^{\circ} \frac{8!}{2 \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 560 \rightarrow \text{считаем все возможные комбинации цифр в числе } 8!$$

2^о Убираем дубликаты

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 9 & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680$$

Отв: 1680

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$1) \cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$3) 2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x =$$

$$2) \sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$= 2\sqrt{2} \sin 7x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$4) 2\sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0, \text{ где } \cos 4x = -2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

получим, что

$$2\sqrt{2} \sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) + 2\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \cdot \left(\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0 \Rightarrow \text{на обороте}$$

№2 (выполнение).

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \left(2\sin\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \Bigg) = 0$$

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$3) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Отв: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \quad \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; \quad \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 1^{\circ} & (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \\ 2^{\circ} & y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \text{ДДЗ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{y}{x^2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

* 2^o ур-ие

$$\begin{aligned} y^2 + 2xy + x^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y &= 0 \\ (y+x)^2 - 3x(y+x) + 4(2x-y) &= 0 \\ (y-2x)(y+x-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$y = 2x$$

$$y = 4 - x.$$

подставим в 1^o $y = 2x$

$$(x^2 (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^2}} \Rightarrow (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16^{-\ln x} \cdot x^{6(-\ln x)} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

возьмем натур. логарифмы от обеих частей.

$$\ln 16^{-\ln x} + \ln x^{-6 \ln x} = \ln 2^{\ln \frac{2}{x^6}} + \ln x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$-4 \ln 2 \cdot \ln x - 6 \ln^2 x = \ln 2 (\ln 2 - 6 \ln x) + \ln x (\ln 2 - 6 \ln x).$$

$$\ln 2 \cdot \ln x - \ln^2 2 = 0$$

$$\ln 2 (\ln x - \ln 2) = 0$$

$$\ln x = \ln 2$$

$$x = 2$$

$$\Downarrow$$

$$y = 4$$

$\rightarrow$ 1 случай.

2 случ. на обороте.

2 случай

подставим в первое уравнение $y = 4 - x$

$$x^2(4-x)^{4-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

возьмем натур. логар. от обеих частей.

$$\ln x^{-2\ln x} + \ln(4-x)^{-4\ln x} = \ln(4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$-2 \cdot \ln^2 x - 4 \cdot \ln x \ln(4-x) = \ln(4-x) \cdot \ln(4-x) - \ln x^2$$

$$-2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln(4-x) - \ln^2(4-x) = 0$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln(4-x) + \ln^2(4-x) = 0$$

$$\ln^2(4-x) - 2 \ln^2 x \cdot \ln(4-x) + 2 \ln^2 x - \ln x \ln(4-x) = 0$$

$$(\ln(4-x) - 2 \ln x)(\ln(4-x) - \ln x) = 0$$

4 3 уравнение

$$\ln \frac{4-x}{x^2} = 0$$

$$\frac{4-x}{x^2} = 1$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \text{ но по ОДЗ}$$

$$x \geq 0$$

$$x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y = \frac{4 - \sqrt{17} + 1}{2}$$

5 4 уравнение

$$\ln \frac{4-x}{x} = 0$$

$$\frac{4-x}{x} = 1$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{4 - \sqrt{17} + 1}{2} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

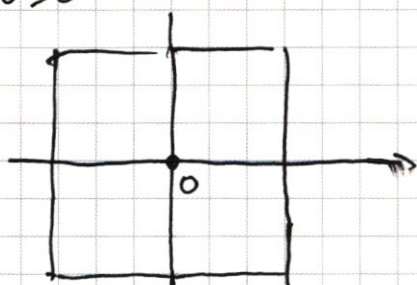
№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$1^{\circ} |y+5-x| + |y+5+x| = 10$$

$$\begin{cases} y+5-x = \pm m \\ y+5+x = \pm n \\ a+b=10 \\ a \geq 0 \quad b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - (5 \mp m) \\ y = -x \mp (5 \mp n) \\ m+n=10 \\ m \geq 0 \quad n \geq 0 \end{cases}$$



г. 0 - центр $(0; -5)$

сторона = 10

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

при $a \in (0; 25]$ $\rightarrow$ это 4 окружности радиуса $\sqrt{a}$, с

центрами в г. $(12; 5)$; $(-12; 5)$; $(-12; -5)$
 $(12; -5)$

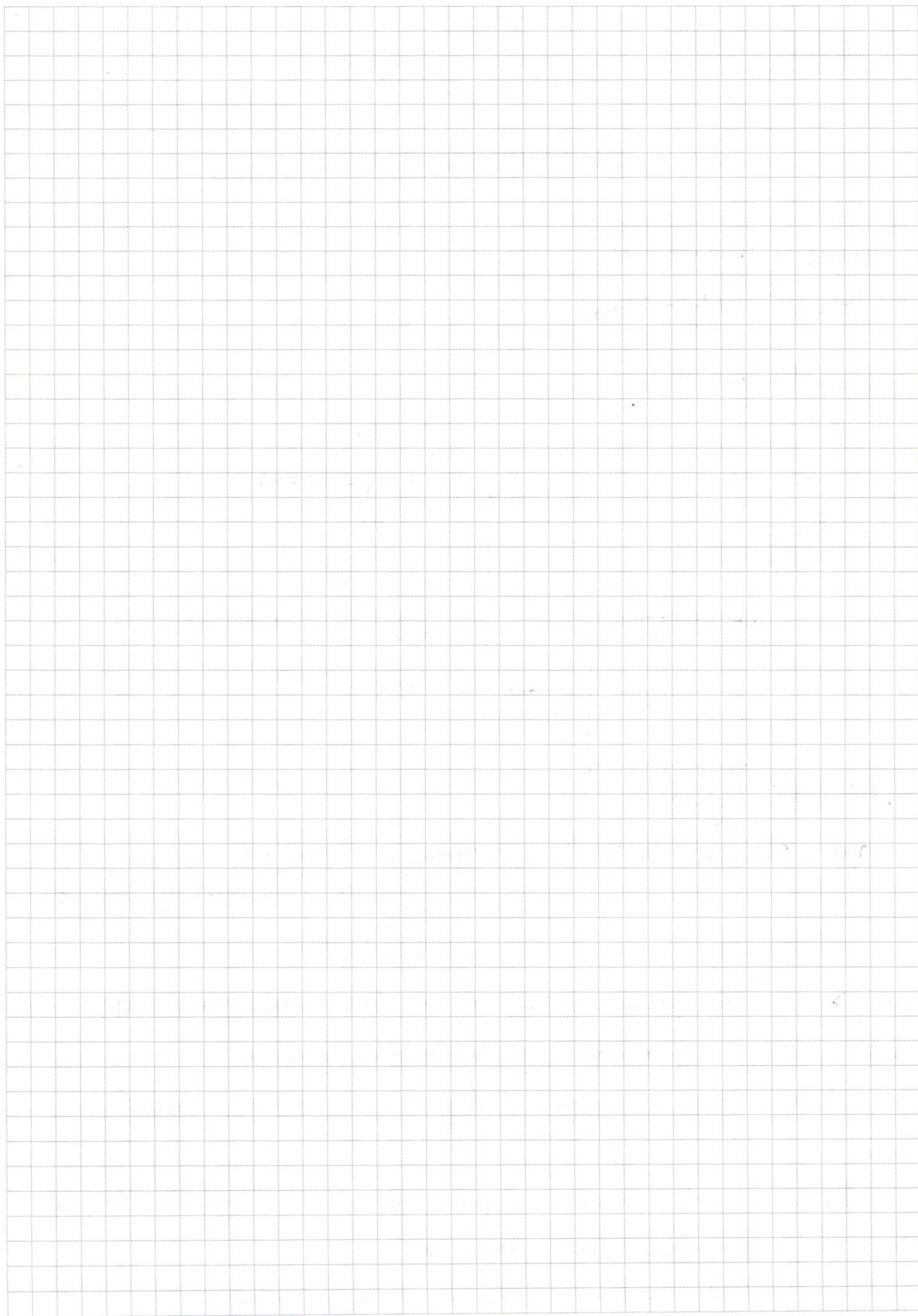
при $a \geq 25$ они расширяются, но их части переходящие через ось Ox и Oy перестают удовлетворять условию.

при $a = 49$ они касаются квадрата и система имеет 2 решения.

Далее кол-во решений будет больше 2 до $a = 169$, где есть только одно решение, при $a > 169$ $\varnothing$

Отв: $a = 49$

имеются 2 корня у 1-го.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

1) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$ и все возможные перестановки

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 560 \rightarrow \text{считаем все возможные комбинации цифр в числе.}$$

8! ↓

Убираем двойки

2) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{matrix}$ $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 8 \cdot 1120$

$$560 + 1120 = 1680$$

Отв: 1680

N3

$$1^0 (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\text{ДЛЗ: } \begin{cases} x \geq 0 & x \geq 0 \\ \frac{y}{x^2} \geq 0 & y \geq 0 \end{cases}$$

$$2^0 y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$3^0 y^2 + 2xy + x^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 3x(y+x) + 4(2x-y) = 0$$

$$(y+x)(y+x-3x) + 4(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

$$x = \frac{y}{2}$$

$$x = 4 - y$$

подставим в 1^ю ~~же~~ $y = 2x$

$$(x^2 (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$\frac{-\ln x}{6} \cdot x^6 \cdot (-\ln x) = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

Возьмем натур. логарифм от обеих частей

$$\ln 16^{-\ln x} + \ln x^{-6 \ln x} = \ln 2^{\ln \frac{2}{x^6}} + \ln x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$-4 \cdot \ln 2 \cdot \ln x - 6 \ln^2 x = \ln 2 (\ln 2 - 6 \ln x) + \ln x (\ln 2 - 6 \ln x)$$

$$-4 \ln 2 \ln x - 6 \ln^2 x = \ln^2 2 - 5 \ln 2 \cdot \ln x - 6 \ln^2 x$$

$$\ln 2 \cdot \ln x - \ln^2 2 = 0$$

$$\ln 2 (\ln x - \ln 2) = 0$$

$$\ln x = \ln 2$$

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = 4 \end{matrix} \quad - 1 \text{ случай}$$

2 случай

подставим в первое ур-е $y = 4 - x$

$$x^2 (4-x)^4 \cdot \ln x = (4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)}$$

Возьмем натур. логарифм от обеих частей.

$$\ln x^{-2 \ln x} + \ln (4-x)^{4 \ln x} = \ln (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$-2 \cdot \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln (4-x) = \ln (4-x) \cdot (\ln (4-x) - \ln x^2)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln (4-x) = \ln (4-x) (\ln (4-x) - 2 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln (4-x) = \ln^2 (4-x) - 2 \ln x \cdot \ln (4-x)$$

$$-2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln (4-x) - \ln^2 (4-x) = 0$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln (4-x) + \ln^2 (4-x) = 0$$

$$(\ln^2 (4-x) - 2 \ln^2 x \cdot \ln (4-x) + 2 \ln^2 x - \ln x \cdot \ln (4-x) = 0$$

$$\ln (4-x) (\ln (4-x) - 2 \ln^2 x) - \ln x (\ln (4-x) - 2 \ln x) = 0$$

$$(\ln (4-x) - 2 \ln x) (\ln (4-x) - \ln x) = 0$$

3 ур-е $\ln \frac{4-x}{x^2} = 0$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 17$$

$$\frac{4-x}{x^2} = 1$$

$$4-x=x^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{т.к. по } 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y = \frac{4 - \sqrt{17} + 1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) 4-й шаг: $\ln \frac{4-x}{x} = 0$

$$\frac{4-x}{x} = 1 \quad 4-x=x \quad x=2$$

$$y=2$$

Ответ: $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y=\frac{4-\sqrt{17}+1}{2} \end{cases}$

и 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$1) \cos 9x - \cos 5x = -2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \sin \frac{9x-5x}{2} = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$2) \sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$3) \cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x = 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$= 2\sqrt{2} \sin 7x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 2\sqrt{2} \sin 7x \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \cos 4x - \cos \frac{\pi}{2} = -2 \cdot \sin \left(\frac{4x+\frac{\pi}{2}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{4x-\frac{\pi}{2}}{2} \right) = -2 \cdot$$

$$-2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{получили 2}$$

$$2\sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) + 2\sqrt{2} \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \cdot \left(\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \left(2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$$

$$x = \frac{\pi h}{2} + \frac{\pi}{8} \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$x = \frac{2\pi h}{5} + \frac{\pi}{20} \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$x = \frac{2\pi m}{9} + \frac{\pi}{12} \quad m \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$9261 \mid 3$$

$$3087 \mid 3$$

$$1029 \mid 3$$

$$348 \mid 343$$

$$1 \mid 1$$

$$1 \mid 1$$

$$\frac{18}{13}$$

$$\frac{843}{26} \mid \frac{13}{2}$$

$$\frac{343}{29} \mid \frac{12}{2}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln' y \ln x^2}$$

$$1242323$$



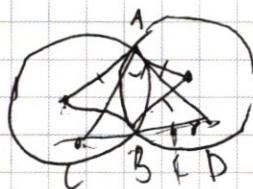
№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$x=1^0 |a+b| + |a-b| = 10, \quad a = y+5, \quad b = x.$$

$$\begin{cases} a+b > 0 \\ a-b > 0 \\ a=5 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \quad a=5$$

№6



$$5-3=2$$

$$7-5-3=-1$$

$$y^2 - 4y + yx - 2x^2 + 8x - 2xy = 0$$

$$y(y-4+yx) - 2x(x+4-y) = 0$$

$$y(x+y-4) - 2x \cdot x$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos \frac{13x}{2} = 2$$

NS

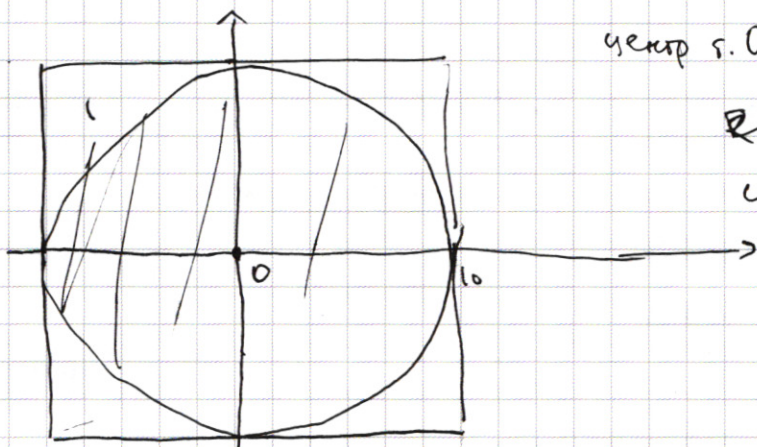
Отв: только при $a = 49$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$1^\circ |y+5-x| + |y+5+x| = 10$$

$$\begin{cases} y+5-x = \pm m \\ y+5+x = \pm n \\ a+b=10 \\ a \geq 0; b \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - (5 \mp m) \\ y = -x - (5 \mp n) \\ m+n=10 \\ m \geq 0 \quad n \geq 0 \end{cases}$$



центр с. 0(0; -5)

сторона 10

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a.$$

при $a \in (0; 25]$ $\rightarrow$ это 4 окружности радиуса $\sqrt{a}$, с

центрами в т. $(12; 5); (-12; 5)$

$(12; -5); (-12; -5)$

при $a > 25$ они расширяются, но их части

переходящие за ось Ox и Oy перестают удовлетворять условию.

при $a = 49$ они касаются квадрата и система имеет 2 решения

Далее кол-во решений будет $\geq$ больше 2 до $a = 169$ - тогда здесь одно решение, а при $a > 169$ решений нет



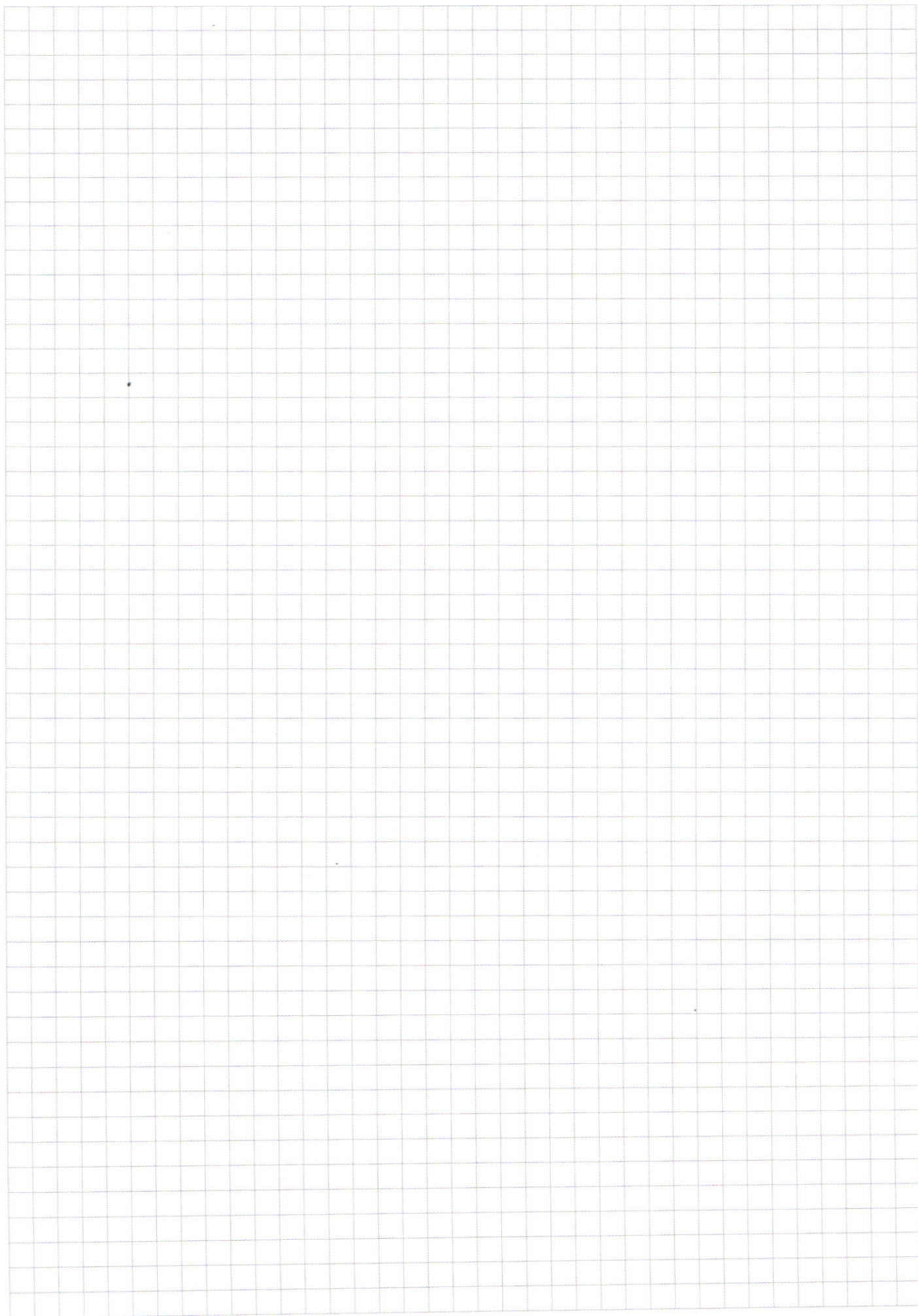
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)