

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

4. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

5. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

8. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

9. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

10. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

- 1) Чтобы в произведении цифр было 7^3 , в числе должно быть ровно три цифры 7.
- 2) Чтобы в произведении цифр было 3^3 , в числе должны стоять либо три цифры 3, либо одна цифра 9 и одна цифра 3.
- 3) Остальные цифры числа должны быть единицами, тогда произведение сохранится. [! других вариантов нет по основной теореме арифметики]

1 случай: 3 цифры 7 на 8 позиций можно поставить C_8^3 способами. 3 цифры 3 можно поставить на оставшиеся 5 позиций C_5^3 способами, оставшиеся две единицы ставим C_2^2 способом.

Получаем $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8! \cdot 5! \cdot 2!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 0!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 2} =$

$= 560$

2 случай: 3 цифры 7 на 8 позиций C_8^3 способов, 1 цифра 9 на 5 позиций: C_5^1 , 1 цифра 3 на 4 позиций: C_4^1 , 3 цифры 1 на 3 позициях: C_3^3

Получаем $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \frac{8! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!}{3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 0!} =$
 $= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 16 \cdot 7 \cdot 10 = 1120$ различных
последов.

Так как случаи 1 и 2 рассматривают
 разные числа (ни одно из случаев 1 не содер-
 жится в случае 2), а других случаев
 быть не может (но ота 7^3 составляется
 из цифр только как при сёржи, 3^3 - из 1 девятки
 и 1 тройки
 или трёх троек), то сложив получив-
 шиеся случаи и получим, что всего
 существует $560 + 1120 = 1680$ различных
 натуральных чисел, удовлетворяющих
 условию задачи. $\rightarrow$ (для числа было бы 3360)

Ответ: 1680.

2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

Используя формулы разности косинусов
 и суммы синусов, получаем:

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

Используя формулы косинуса двойного угла:

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin^2 2x - 2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$\sqrt{2} \sin 2x (\sin 2x - \cos 2x) + \sqrt{2} \cos 2x (\sin 2x - \cos 2x) = 0$$~~

$$\sqrt{2} (\sin 2x - \cos 2x) (\sin 2x + \cos 2x) + 2 \sin 2x (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\sin 2x - \cos 2x) (\sin 2x + \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x = \sin 2x$$

при $\cos 2x = 0$ $\sin 2x = 1$
и равенство неверно,
поэтому $\cos 2x \neq 0$ и по-
делив на $\cos 2x$, получим
 $\tan 2x = 1$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} = \sin 2x$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin 2x$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \sin 2x = 0$$

По разности
синусов

$$2 \sin \frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}) = 0 \quad \text{или} \quad \cos(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$-5x = -\frac{\pi}{4} + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi}{20} - \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$K = -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}$$

ОТВЕТ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$

$$-\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} & 3. \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$x > 0$, т.к. определён $\ln x$
 $y > 0$, т.к. определена $y^{\ln \frac{y}{x^2}}$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} & \text{используя св-ва логарифмов} \\ y^2 - 4xy + 4x^2 + 3xy - 6x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x + 7\ln x} = y^{\ln y} \\ (y-2x)^2 + 3x(y-2x) - 4(y-2x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x} \\ (y-2x)(y-2x+3x-4) = 0 \end{cases}$$

1) при $y-2x=0$, $y=2x$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln(2x) - 3\ln x}$$

$$(2x)^{3\ln x} = x^{2\ln x} \cdot (2x)^{\ln(2x)}$$

$$e^{\ln 2x \cdot 3\ln x} = e^{\ln x \cdot 2\ln x} \cdot e^{\ln 2x \cdot \ln 2x}$$

$$e^{3\ln x \cdot \ln 2x} = e^{\ln^2 2x + 2\ln^2 x}$$

$$3\ln x \cdot \ln 2x = \ln^2 2x + 2\ln^2 x$$

$$\ln^2 2x - \ln x \cdot \ln 2x + 2\ln^2 x - 2\ln x \cdot \ln 2x = 0$$

$$\ln 2x (\ln 2x - \ln x) + 2\ln x (\ln x - \ln 2x) = 0$$

$$(\ln 2x - 2\ln x)(\ln 2x - \ln x) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln 2x = 2 \ln x \text{ или } \ln 2x = \ln x$$

$$\ln 2x = \ln x^2 \text{ или } 2x = x$$

$$2x = x^2 \text{ или } x = 0$$

п.р. $x > 0$, по реш. явл. только $x = 2$, тогда
 $y = 2x = 4$

2) при $y - 2x + 3x - 4 = 0$; $x + y = 4$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x}; \quad y^{3 \ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2 \ln x};$$

$$e^{3 \ln y \cdot \ln x} = e^{\ln^2 y} \cdot e^{-2 \ln^2 x}$$

$$3 \ln y \cdot \ln x = \ln^2 y + 2 \ln^2 x$$

~~$$\ln y (\ln y - \ln x) + 2 \ln x (\ln x - \ln y) = 0$$~~

$$(\ln y - 2 \ln x) (\ln y - \ln x) = 0$$

$$\ln y = \ln x^2 \text{ или } \ln y = \ln x$$

$$y = x^2 \text{ или } y = x$$

~~Мы~~ (мы сделали по все, что и в пункте, но без подстановки y из 2-й системы)

Подставим $y = 4 - x$:

$$4 - x = x^2 \text{ или } 4 - x = x$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad \text{или} \quad 2x = 4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{или} \quad x = 2$$

$$y = 4 - x = \frac{8 - (-1 \pm \sqrt{17})}{2} =$$

$$= \frac{9 \mp \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 4 - x = 2$$

Объединяя пункты 1 и 2, получаем все решения исходной системы:

Ответ: $(2; 4); (2; 2); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right);$
 $\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \right).$

5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

2 реш. $x = ?$

В координатах xOy первое уравнение задаёт прямые в 4 областях плоскости:

I: при $y > -x - 5$ и $y > x - 5$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2y + 10 = 10; \quad y = 0$$

II: при $y > -x - 5$ и $y < x - 5$

$$x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

III: при $y < -x - 5$ и $y < x - 5$

$$-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

IV: при $y < -x - 5$ и $y > x - 5$

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

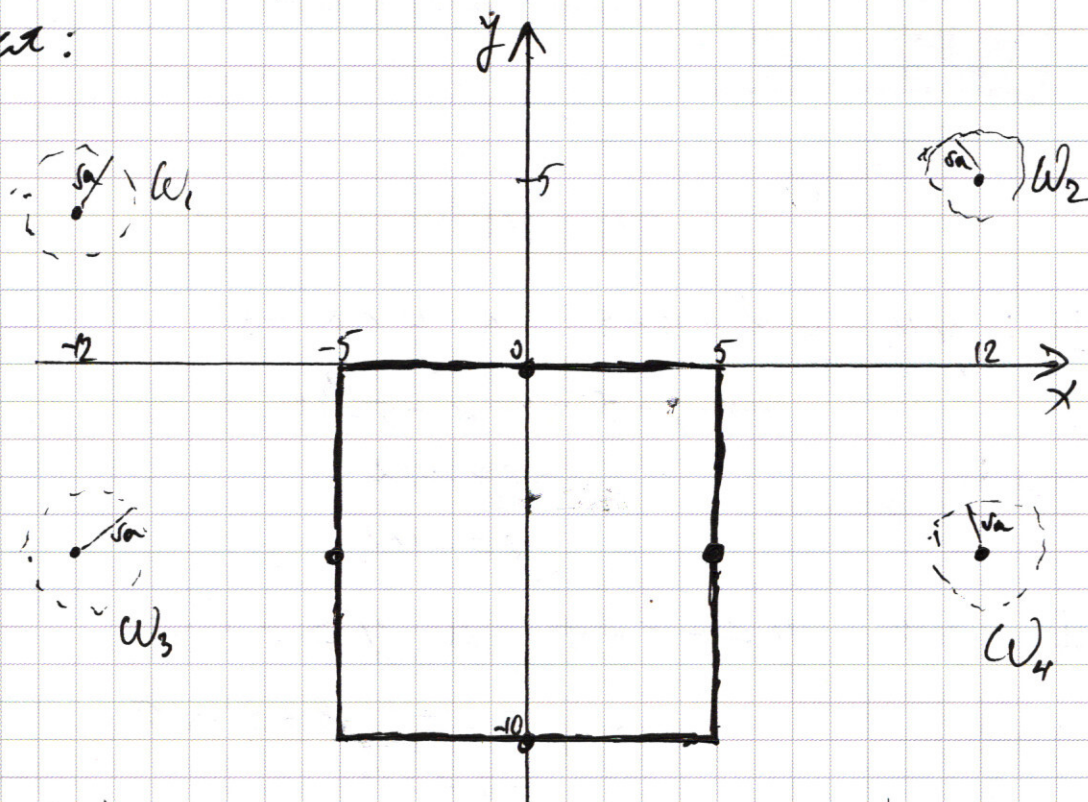
$$x = -5$$

Получаем, что первое уравнение системы задаёт отрезки, ограничивающие квадрат между $x = -5, x = 5$ $y = 0, y = -10$

Второе ур-е при $a < 0$ решений не имеет, т.к. сумма двух квадратов не может равняться отрицательному числу; при $a = 0$ четыре решения $x = \pm 12$ $y = \pm 5$ не являются решениями первого ур-я (ни одно из четырёх) (т.к. при $y = -5$ должно быть $x = \pm 5$)
при $y = 5$ реш. может быть

При $a > 0$ второе ур-е задаёт четыре окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центрами в точках с координатами $(12; 5)$; $(-12; 5)$; $(12; -5)$; $(-12; -5)$.

Ситуация:



Если $(x_0; y_0)$ — решение, то $(-x_0; y_0)$ — тоже решение, т.к. решения первого ур-я системы (линия квадрата) и решения второго (4 окр-та) симметричны относительно $x=0$. Поэтому система имеет 2 реш., если при $x=0$ 2 реш. или 1 реш. при $x>0, x \leq 5$

① При $x=0$ $y=0$ или $y=-10$, тогда

$$\begin{cases} (0-12)^2 + (0-5)^2 = a \\ (0-12)^2 + (-10-5)^2 = a \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{реш.} \\ \text{реш.} \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} 2 \text{ реш.} \end{matrix} \right.$$

$$\boxed{a = 169}$$

Окр-та W_3 и W_4 пересекутся в $(0; -10)$ и, вместе с W_1 и W_2 , в $(0; 0)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② При $0 < x < 5$ $y=0$ или $y=-10$ будут решениями ~~уравнения~~ $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$,

$$\text{т.к. } (0-5)^2 = (10-5)^2,$$

поэтому будут два решения системы $(x_0; y_0)$; $(x_0; \overset{10-y_0}{\cancel{y_0}})$ и еще два при $x < 0$: $(-x_0; y_0)$; $(-x_0; \overset{10-y_0}{\cancel{y_0}})$

Поэтому этот случай не подходит

③ При $x=5$ линия квадрата должна пересекать только W_4 (касание) или только W_2 или только W_3 или только W_4 .

1. $y=5$ при ~~$x=5$~~ $(5-12)^2 + 0 = a$
(касание W_4) $a = 49$

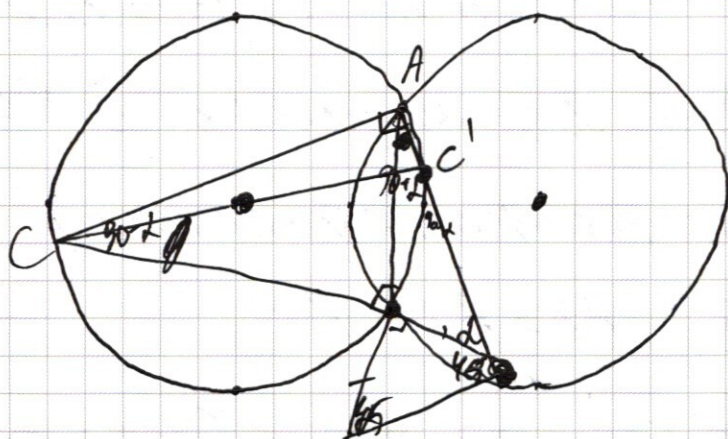
W_3 касается в $(-5; -5)$ W_1 и W_2 не пересекают

2. касание W_3 в $(5; -5)$,
тогда W_4 в $(-5; -5)$

т.к. расст. от центров
больше 7: $(12-5)^2 + 5^2 > 49$

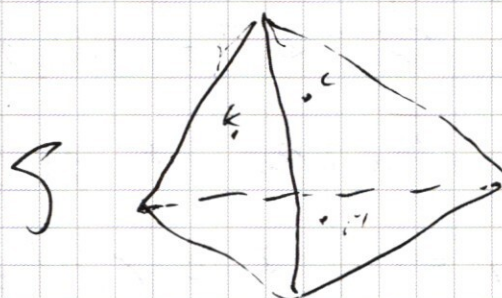
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^k + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33}k - 2x$$



$$2^k < 76 - 3 \cdot 2^{34} + 2(2^{32} - 2)x$$

~~$\alpha = 95^\circ$~~ $\angle B = \angle C$

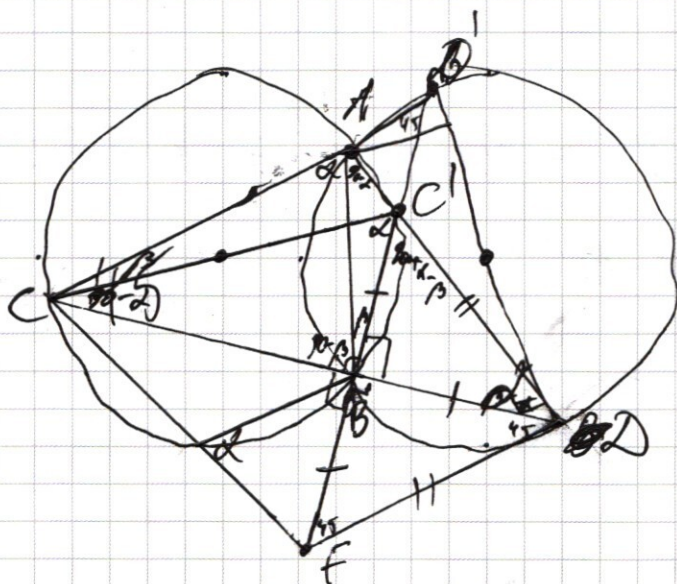


$$DC \cdot DB$$

$$DB \cdot DC = DC' \cdot DA$$

$$AB \cdot DC = DC' \cdot DA$$

$$DC = \frac{DC' \cdot DA}{DB}$$



$$CF^2 = DC^2 + DB^2 - 2 \cdot DC \cdot DB$$

$$CF^2 = 100 + C'F^2 - 20 C'F \cdot \cos \alpha$$

$$DC^2 + 2DB^2 - 2DC \cdot DB$$

$$DC^2 = CA^2 + AD^2$$

$$DB^2 = 100 - BD^2$$

$$\angle C'CB = \angle BAC' \text{ (впис.)} \quad \angle BAC' = \angle BD'D \text{ (впис.)}$$

ω_1 ω_2

$$\frac{C'B}{\sin \angle CCB} = 2 \cdot R = 20 \text{ и}$$

$$\frac{BD}{\sin \angle BD'D} = 2R = 20$$

п.к. $\angle C'CB = \angle BD'D$, то $C'B = BD$

Тогда в $\triangle C'DF$ DF — медиана и высота,
значит, $\triangle C'DF$ — равнобедренный

$$C'D = DF = BD/2, \quad BD = BF = BC'$$

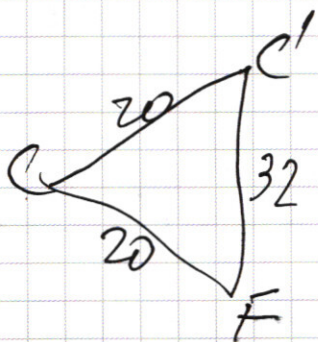
Тогда в $\triangle CC'F$ CF — мед. и высота $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CF = CC' = 2R = 20$$

$\triangle CC'F$ — равнобед.

$$b) \quad BF^2 = CF^2 - CB^2 = 20^2 - 12^2 = 8 \cdot 32 = 2^8 = 4^4$$

$$BF = 16 = BD = BC'$$



Ответ: а) 20, б)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 9 \cdot 3 \cdot 7^3 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$7 \quad 7 \quad 7$$

$$333 \quad 11$$

$$9 \quad 3 \quad 111$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 56$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cdot 1$$

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

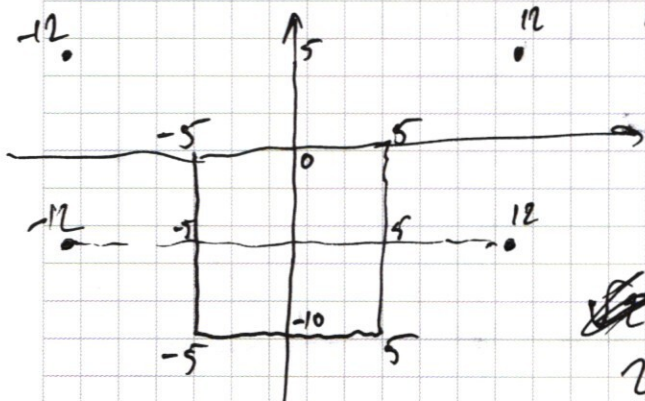
$$1120$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\sqrt{289+25} = \sqrt{314}$$

$$\sqrt{49+25} = \sqrt{74} \approx 8.6$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$



$$2 \sin 7x - 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \cos 4x - 1$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 4x$$

$$-\sqrt{2} \cos^2 2x + \sin^2 2x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \cos 7x \cos 2x - 2\sqrt{2} \cos^2 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 2x - \cos 4x = 0$$

$$-\cos^2 2x + \sin^2 2x = 0 \quad 10 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4$$

$$(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 7x$$

$$\cos 2x = 1$$

$$x^{-\ln x} = x^{-\frac{1}{\log_e x}}$$

$$y > 0 \quad x > 0$$

$$\ln \frac{y}{x^7} = \ln y - 7 \ln x$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y} : y^{7 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{3 \ln x} = y^{\ln y}$$

$$(y-2)^2 - \cancel{x+y-2} \quad xy - 2x^2 + 6x - 4$$

$$y^2 - 4 \cdot x \cdot y + 4x^2 + 3xy - 6x^2 + 6x - 4y = 0$$

$$(y-x)^2 + 3x(y-x) - 4(y-2x) = 0$$

$$\ln 2x (\ln 2x - \ln x) + 2(\ln x / \ln x -$$

$$y + x + 5$$

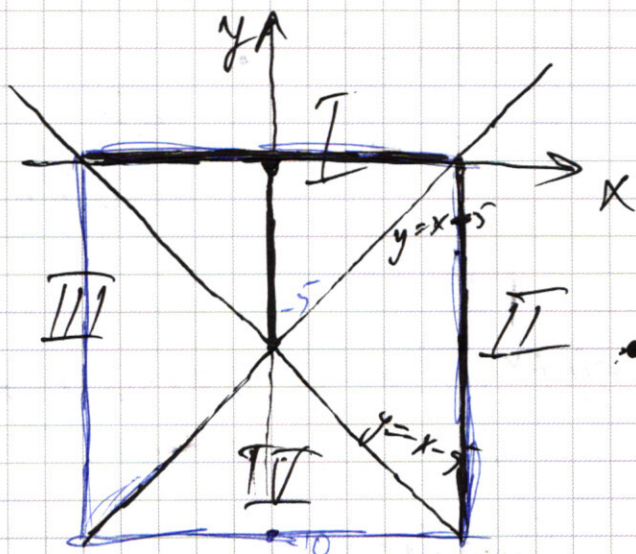
$$+$$

$$-x-5$$

$$y - x + 5$$

$$x$$

$$x-5$$



$$I: y = 0$$

$$II: x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$x = 5$$

$$III: -x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$-2y = 20$$

$$IV: -x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① При $0 < x \leq 5$ $y=0$ или $y=-10$. Тогда

$(|x|-12)^2 + 5^2 = a$ должно иметь ~~одно~~
решение на $[0; 5]$.

$$(x-12)^2 + 25 - a = 0 \quad 1 \text{ рш. на } [0; 5]$$

$$(x-12)^2 = a - 25$$

при $a - 25 < 0$ нет рш.; при $a - 25 = 0$ $x=12$, но
 $12 \notin [0; 5]$

при $a - 25 > 0$
 $a > 25$

$$x - 12 = \pm \sqrt{a - 25}$$

$$x = 12 \pm \sqrt{a - 25}$$

~~$$x = 12 + \sqrt{a - 25} \in [0; 5]$$~~

$$x = 12 + \sqrt{a - 25} \notin [0; 5],$$

~~$$x = 12 - \sqrt{a - 25} \in [0; 5]$$~~
н.к. $\sqrt{a - 25} \geq 0 \quad 12 + \sqrt{a - 25} \geq 12$

$$x = 12 - \sqrt{a - 25} \in [0; 5] \text{ при}$$

$$\begin{cases} 12 - \sqrt{a - 25} > 0 \\ 12 - \sqrt{a - 25} \leq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a - 25} < 12 \\ \sqrt{a - 25} \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < a - 25 < 144 \\ a - 25 \geq 49 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

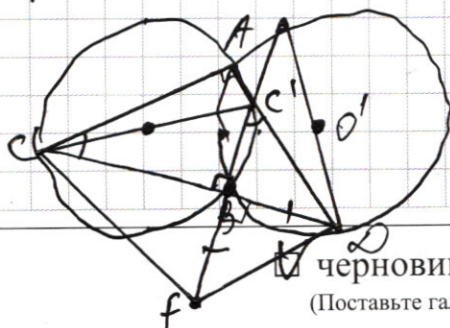
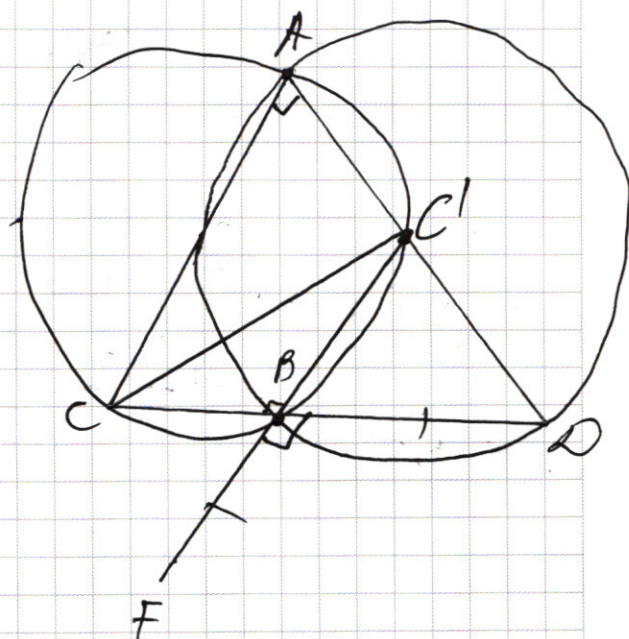
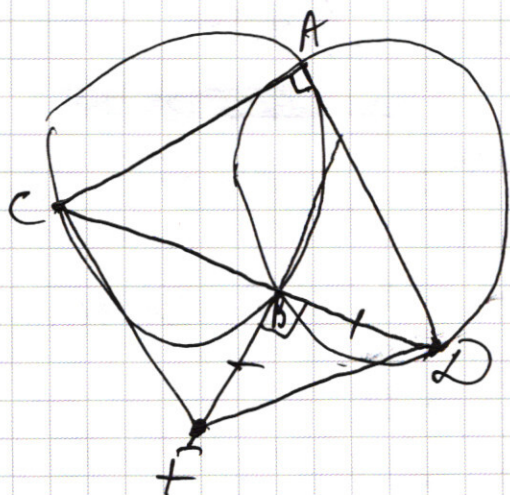
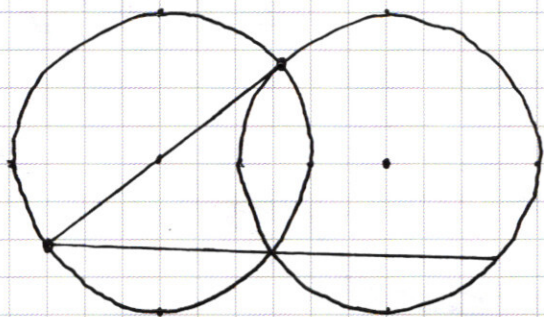
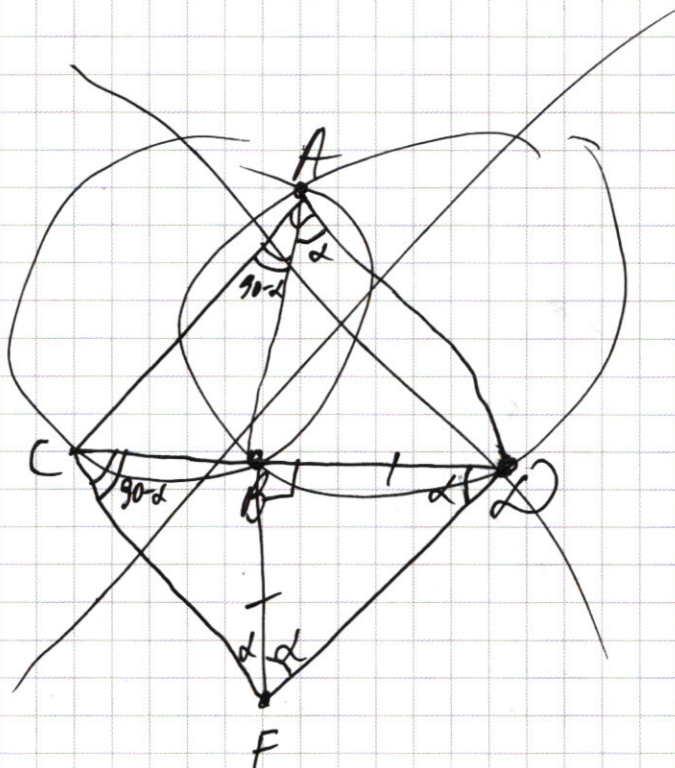
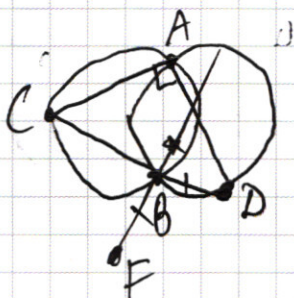
$$\begin{cases} 25 < a < 169 \\ a \geq 74 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$74 \leq a < 169$$

289
225
514

289?



☐ черновик

(Поставьте галочку в нужном поле)

☒ чистовик

Страница №

(Нумеровать только чистовики)