

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ~~1. [3 балла]~~ Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y^4 - \ln x = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{7}$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

~~$76 + 2(2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$~~
 ~~$76 + 2^{33}x - 2x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$~~
 ~~$76 + 2^{33}x - 2x - 3 \cdot 2^{34} \geq 2^x$~~
 ~~33~~
 ~~$76 + 2^{33}x - 2x - 3 \cdot 2^{34} \geq 2^x$~~

Если $x < 6$,
то левая часть < 0 ,
но модуль $> 2^{32}$,
~~тогда~~

Если $x < 6$,
левая часть
очевидно < 0 .

Свернём к кер-бу:

$$76 + 2(2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$-2x + 76 + (x - 6) \cdot 2^{33} \geq 2^x$$

Очевидно, $x \geq 6$.



-подходит. Неравенство

образуется в равенство.
при $x = 6$.

$\Rightarrow$
 $x \geq 6$

Разность в разность синусов

$$\sin 7x =$$

(N2)

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$(\cos 5x + \sin 5x) \neq \cos 4x + \sin 4x$$

$$\cos 9x =$$

$$9x = 4x + 5x$$

$$\cos(4x + 5x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(5x + 4x) + \sin 5x = 0.$$

Other: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Используем дополнительный угол.

~~$$\sqrt{2} \cos(9x - 45^\circ) = 1$$~~

~~$$1) \cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \cos(9x - 45^\circ)$$~~

~~$$2) \sin 5x - \cos 5x = -\sqrt{2} \cos 5x$$~~

Разность разность cos и сумму sin:

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\cos 9x = \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

$$\sin 9x = \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x$$

$$\cos 5x = \cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x$$

$$\sin 5x = \cos 4x \sin x + \sin 4x \cos x$$

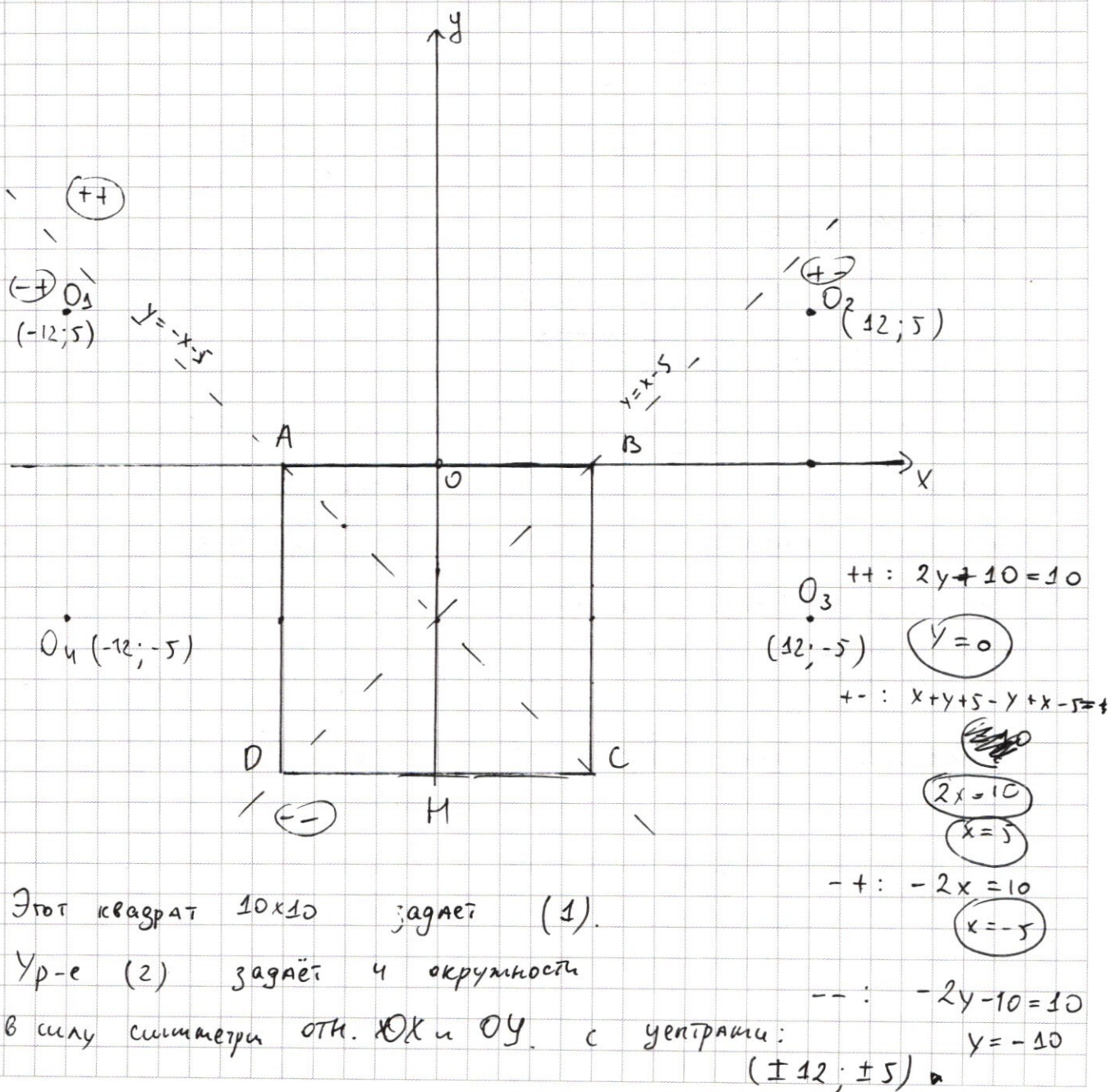
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Воспользуемся методом областей и раскроем модули
в первом уравнении: (1)



Этот квадрат 10×10 задаёт (1).

Ур-е (2) задаёт ч окружности

(в силу симметрии отн. Ox и Oy с центрами:

и радиусом $\sqrt{a}$. (Очевидно, что это, т.к. является суммой 2-х квадратов)

[Вернее, если $\sqrt{a} \geq 5$, то это не совсем 4 окружности]

Тогда заметим, что в силу симметрии картинки отн. ОУ, система имеет 2 решения ~~тогда~~ тогда и только тогда, когда окружности с центрами O_3 и O_4 касаются сторон квадрата, т.к. в этот момент расстояния от O_1 и O_2 до ближайших к ним точек квадрата (A и B) $> R_{O_3} = R_{O_4} = 12 - 5 = 7$.

Тогда $\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$.

При меньших a решений нет, при больших - ≥ 3 .

т.к. O_3 и O_4 дают 4 решения,

~~Они касаются~~ а когда они пересекаются в O и H , O_1 и O_2 дают ещё решения.

~~Но при $a = 514$~~

В какой-то момент с увеличением a радиусы превосходят $\sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314}$ и тогда O_3 и O_4 уже не дают решений, но O_1 и O_2 дают ≥ 3 .

И только когда радиусы становятся равными

$\sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314}$, O_1 и O_2 дают по одному решению ровно. При $a > 314$ решений, очевидно, нет.

Ответ: 49; 314.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N1)

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

a b c d e f g h

~~Заметим, в нашей системе будет 2 единицы.~~

Заметим, что у нас будет > 2 единицы в записи числа и ровно 3 семерки (т.к. $21 > 9$, $49 > 9$ — не учтены). Соответственно, троек будет от 3 до

Соответственно, тройки либо будут тройками, либо распределяться в 3 и 9.

Пусть тройки остались тройками, тогда чисел:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 56 \cdot 10 = 560$$

Пусть у нас есть 3 и 9:

$$C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120.$$

$$\text{Итого: } 1120 + 560 = 1680 \text{ чисел.}$$

Ответ: 1680.

№4 (продолжение)

$S_{KLM} = ?$

Из выше изложенного: $KO = OM = OL$, SO — ось $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle SKO = \angle SMO = \angle SLO = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle SOK = \angle SOM = \angle SOL = \arccos \frac{3}{5} \Rightarrow$

Если мы опустим из K, L и M перпендикуляры на OS , то они все попадут в одну точку H , т.к. $OH = KO \cdot \sin(\arccos \frac{3}{5})$.

А это значит, что K, L и M лежат в плоскости, $\perp SO$.

~~Получаю по подобию:~~
 ~~$\frac{S_{KLM}}{S_{PQR}} = \left(\frac{SH}{SA}\right)^2 = \left(\frac{\frac{2}{3}R}{\frac{5}{3}R}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2$~~

$$SH = SO - OH = \frac{5}{3}R - R \cdot \frac{4}{5} = \frac{25-12}{15}R = \frac{13}{15}R$$

Получаю по подобию:

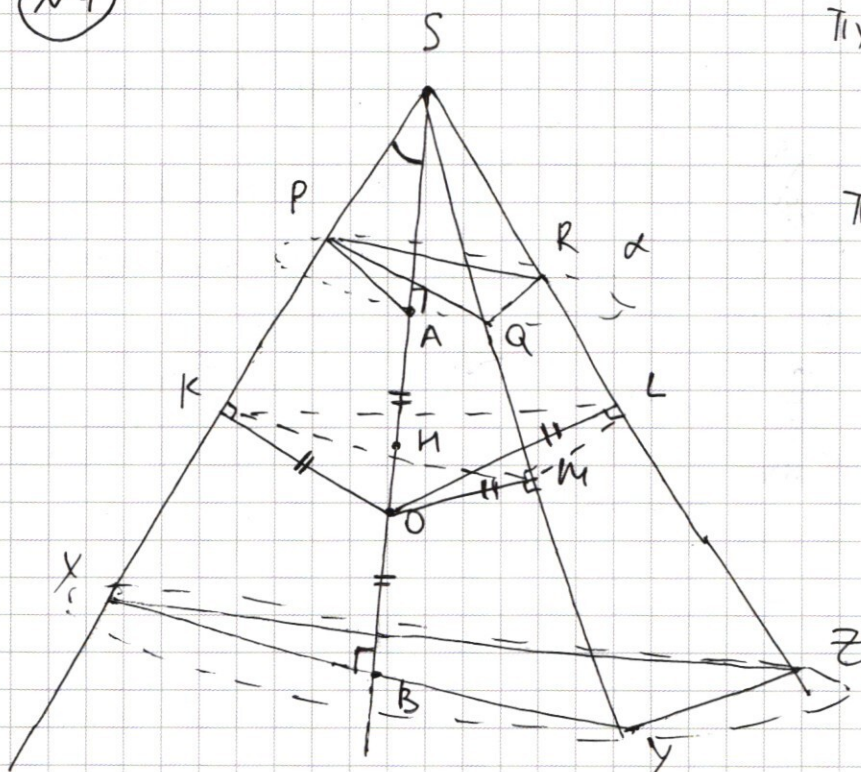
$$\frac{S_{KLM}}{S_{PQR}} = \left(\frac{SH}{SA}\right)^2 = \left(\frac{\frac{13}{15}R}{\frac{2}{3}R}\right)^2 = \left(\frac{13 \cdot 3}{15 \cdot 2}\right)^2 = \frac{169}{100}$$

Получаю $S_{KLM} = \frac{169}{100} \cdot 1 = \frac{169}{100}$.

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$, $S_{KLM} = \frac{169}{100}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Пусть радиус
сферы = R .

Пусть плоскости α и β ,
 $\perp OS$ пересекают OS
в точках A и B .

и образуют
и высекают
 $\triangle PQR$ и
 $\triangle XYZ$

Треугольники, высекаемые α и β ($\alpha \parallel \beta$) подобны.

Если их площади относятся как $1:16$, то коэффициент
подобия - $1:4$. Подобие ~~же~~ Δ вытекает из факта в
пространстве: $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \frac{SP}{PX} = \frac{SQ}{QY} = \frac{SR}{RZ}$.

Отсюда же вытекает подобие $\triangle SAP$ и $\triangle SBY$ с тем
же коэффициентом $\Rightarrow \frac{SA}{SA+2R} = \frac{1}{4} \Rightarrow SA = \frac{2}{3}R$.

Тогда $SO = SA + AO = \frac{2}{3}R + R = \frac{5}{3}R$

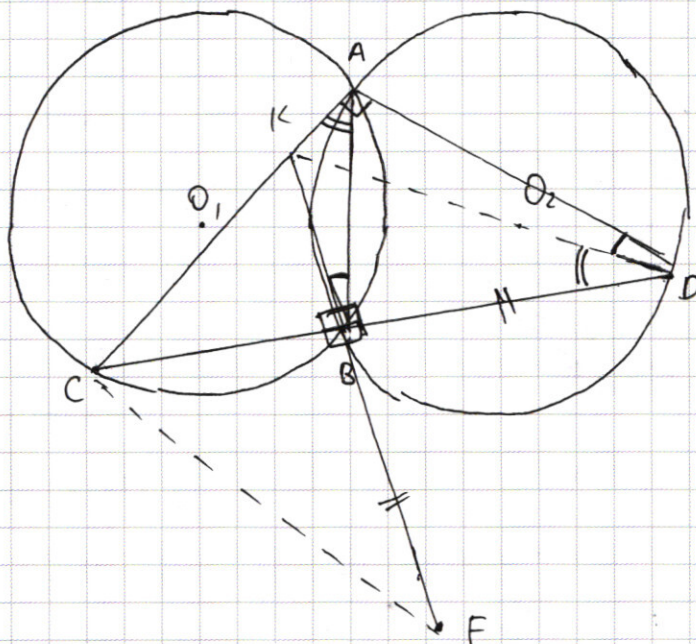
Тогда в прямоугольном $\triangle KSO$ $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

$\angle KLM = ?$

W2

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x &= \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \\ (\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ (\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ -2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \end{aligned}$$

W6



$$R_1 = R_2 = 10$$

• Заметим, что

KADB - вписанный

(KD - диаметр)

$$CF = ?$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Разложим второе уравнение на множители:

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y - 2x)(y + x - 4)$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

① Пусть $y = 2x$

~~$$\begin{aligned} (16x^6)^{-\ln x} &= (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})} \\ (16x^6)^{\ln(\frac{1}{x})} &= (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})} \\ \ln\left(\frac{2}{x^6}\right) &= \ln \frac{1}{x^6} + \ln 2 = \ln 2 + \ln\left(\frac{1}{x}\right)^6 = \ln 2 + 6 \ln \frac{1}{x} \\ (16x^6)^{\ln \frac{1}{x}} &= (2x)^{\ln 2 + 6 \ln \frac{1}{x}} \end{aligned}$$~~

Подставим в (1):

~~$$(x^2 y^4)^{-\ln x}$$~~

$$\begin{aligned} (x^2 y^4)^{-\ln x} &= (xy^2)^{-2 \ln x} = x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} \\ y^{\ln(\frac{y}{x^7})} &= y^{\ln y - \ln x^7} = y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x^7} \end{aligned}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$$

Заметим, что
 $y^{-4\ln x} \neq 0$

Логарифмируем по основанию e :

$$-2\ln x \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln y - 7\ln x \cdot \ln y$$

$$\ln x (3\ln y - 2\ln x) = \ln^2 y$$

$$\ln x (3\ln 2 + \ln x) = (\ln 2 + \ln x)^2$$

Замена: $\ln x = a$

$$3 \cdot \ln 2 \cdot a + a^2 = a^2 + 2a\ln 2 + \ln^2 2$$

$$a \cdot \ln 2 = \ln^2 2$$

$$a = \ln 2$$

$$\ln x = \ln 2$$

$\Downarrow$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$

Это - первая пара решений.

Проверяем, удовлетворяет условию.

② Пусть $x + y = 4$

~~Пусть~~ Пусть $(x_0; y_0)$ - решение, ~~тогда~~ y

Тогда $(y_0; x_0)$ также решение (в силу симметрии)

Однако изначально (1) - не симметрично $\Rightarrow$

если $a \neq b$, то они не могут быть парой решений.

Пусть $x_0 = y_0 = 2$.

Подставим в левую и правую части:

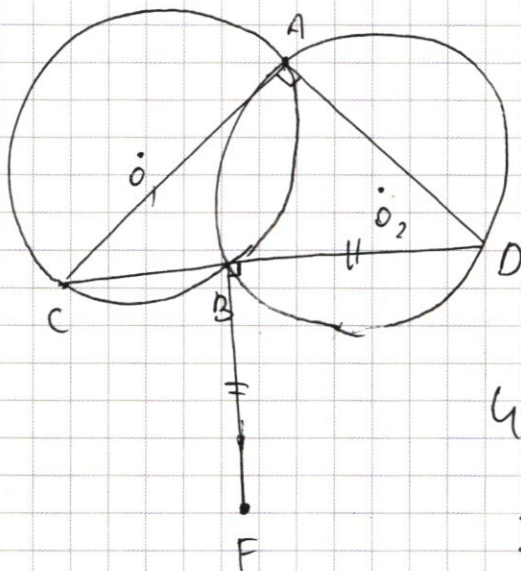
$$(2^6)^{-\ln x} = 2^{-6\ln x}$$

$$2^{\ln(\frac{2}{2^4})} = 2^{-6\ln x}$$

Подходит.

Ответ: $(2; 4), (2; 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

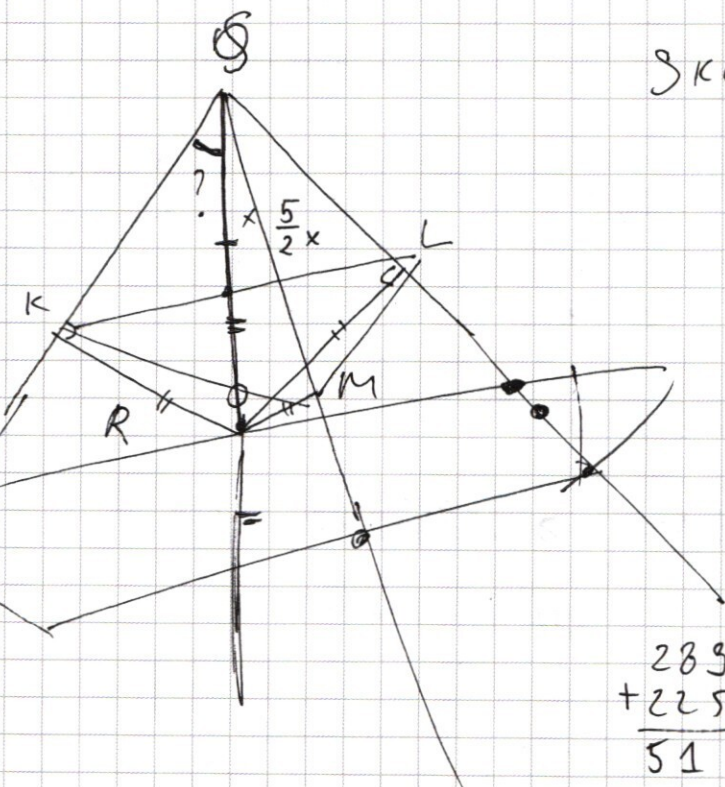
 $\sqrt{6}$ 

$$Y_{SA} = SA + 2R$$

$$3SA = 2R$$

$$S/A =$$

З К Л М



$$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{4}$$

A simple hand-drawn smiley face consisting of two vertical lines for eyes and a curved line for a mouth, located in the top right corner of the page.

$$q_x = x + 2R$$

$$R = \frac{3}{2} \times$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 225 \\ \hline 514 \end{array}$$

$$\cos(5x+4x) \rightarrow \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(5x+4x) + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x +$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos 4x (\cos 5x - \sqrt{2}) + \sin 5x$$



$$(3) \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$(y^2 - xy - x^2) + (8x - 4y) - x^2$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$76 + 2^{33}x - 2x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33}(x - 6) \geq 2^x$$

$$76 - 2x + 2^{33}(x - 6) \geq 2^x$$

$$(x - 6)(2^{32} - 2) + 64 \geq 2^x$$

$$(x - 6)(2^{32} - 2) + 64 \geq 2^x$$

$$(x - 6)(2^{32} - 1) + 2^5 \geq 2^{x-1}$$

$$(x - 6)(2^{32} - 1) \geq 2^{x-1} - 2^5$$

$$(x \geq 6)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x + \sin 5x = 0.$$

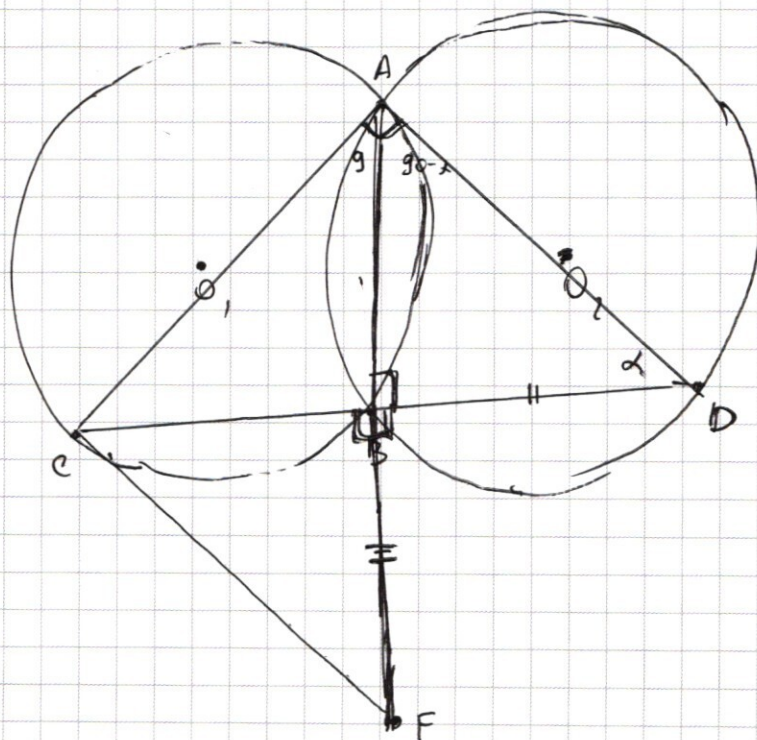
$$(\sin 5x - \cos 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \cos 4x (\sin 5x + \cos 5x) = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$= (\sin 5x - \cos 5x) (1 - \sin 4x) + \cos 4x (\sin 5x + \cos 5x) = 0.$$

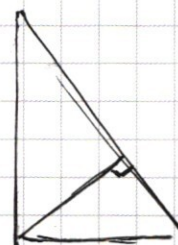
$$(y - 2x)(y + x - 4)$$

(6.)

$$76 + 2(2^{32} - 1) > y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$



$R = 10$



~~800~~

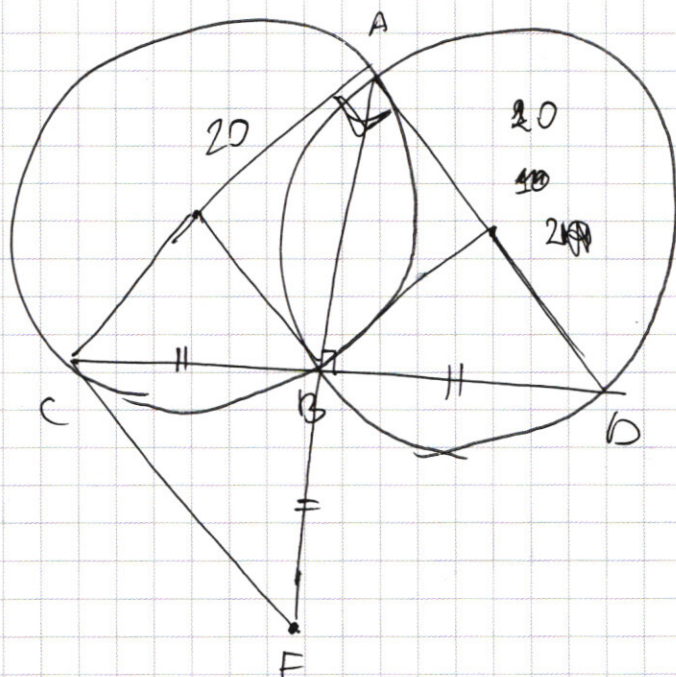
~~$\cos 9x - \cos 5x + \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$~~

~~№ 25~~

~~$\ln x \cdot (3 \ln(x=x) - 2 \ln x) = \ln^2(4-x)$~~

~~$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$~~

~~$(\cos 8x + \sin 3x) + (\sqrt{2} \sin x - \cos 7x) - \sqrt{2} \cos 4x$~~



800

$10\sqrt{2}$

$(5\sqrt{2})$