МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 1680

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений (2;2) (2;4).

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16. $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$; $S = 6{,}25$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения. 49, 514

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-2x)(x+y-4)=0$

$\cancel{\ln x}$

$2^2 \cdot 2^8$ $\quad 2^{\ln \frac{1}{28}}$

$\Rightarrow y=2x$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = (xy^2)^{-2\ln x} = x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x}$

$y^{\ln y/x^7} = y^{\ln y - \ln x^7} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$ $\quad y^{4\ln x} \neq 0$ т.к. $y \neq 0$ (ООЗ)

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-3\ln x}$ $\quad a; b$

$-2\ln x \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln y + 3\ln x \cdot \ln y$ $\quad x+y=4$

$2\ln x\,(\ln x \cdot \ln y - 1) = \ln y \cdot \ln y$ $\quad a+b=4$ $\quad b+a=4$

$2\ln x\,(\ln x \cdot \ln 2x - 1) = \ln^2 2x$ $\quad x=1 \quad y=2$

$2\ln x \ln 2x - 2 = \ln 2x$

$\cancel{\ln 2x\,(2\ln x-1)}$

$x=2$

$y=2$

$\ln 2x\,(2\ln x - 1) - 2 = 0$

$\ln$

$(2^2 \cdot 2^4)^{-\ln 2} = 2^{-6\ln 2}$

$(2^{10})^{-\ln 2}$ $\quad 2^{2\ln}$ $\quad 2^{\ln 1/26}$

$\ln x\,(3\ln(4-x) - 2\ln x) = \ln^2(4-x)$

$\ln(4-x)\,(3\ln x - \ln(4-x)) = 2\ln^2 x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$9x = a \quad 5x = b$

$\cos a - \cos b - \sqrt{2}\cos(a-b) + \sin a + \sin b = 0$

$\cos a - \cos b - \sqrt{2}\cos a \cos b - \sqrt{2}\sin a \sin b + \sin a + \sin b = 0$

$-\sqrt{2}\cos(4x)$

$\sqrt{2}\cos(9x - 45^\circ) = \sqrt{2}\cos(5x + 45^\circ)$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x$

~~$\sqrt{2}(\cos(9x+45^\circ) - \cos 4x) = \sqrt{2}\cos(5x+45^\circ)$~~

$\boxed{\cos(9x - 45^\circ) - \cos(5x + 45^\circ) - \cos 4x = 0}$

$\sin 9x + \sin 5x =$

$= 2\sin 7x \cos 2x$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos$

$5x + 45^\circ = \alpha$

$4x = \beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\begin{cases} x = \alpha+\beta \\ y = \alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{x+y}{2} \quad \beta = \frac{x-y}{2}$

$\cos 9x - \cos 5x =$

$= -2\sin 7x \cdot \sin 2x$

$-2\sin 7x \cdot \sin(2x + 45^\circ)$

$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 9x\right) = \sqrt{2}\cos(9x - 45^\circ)$

$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right) = -\sqrt{2}\cos(5x + 45^\circ)$

$\boxed{\cos(9x - 45^\circ) - \cos(5x + 45^\circ) - \cos 4x = 0}$

$-2\sin 7x \cdot \sin(2x - 45^\circ) - 1 + 2\sin^2 2x = 0$

$\cos\left(\alpha+\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\alpha - \cos\beta = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x)$

$\sqrt{2}\cdot\cos(2x + 45^\circ)$

$\sin(\alpha+\beta) - \cos\alpha - \cos\beta = 0$

$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha - \cos\beta = 0$

$\cos\beta(\sin\alpha - 1) + \cos\alpha(\sin\beta - 1) = 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9261 = 9 \cdot 3 = 7^3 \cdot 3^3$

$9261 : 9 = 1029$, $1029 : 3 = 343$, $343 : 7 = 49$

1 : 1680

$343 \times 27 = 2401 + 686 = 9261$

$49 \times 7 = 343$

$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8\cdot$

777 333 11

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$

$56 \times 20 = 1120$

$\ln x = a$

$\cancel{x = a^e}$

$x = e^a$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

$x + y = \alpha$

$x - y = \beta$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y$

$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos \alpha -$

$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$

$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$

$-2\sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

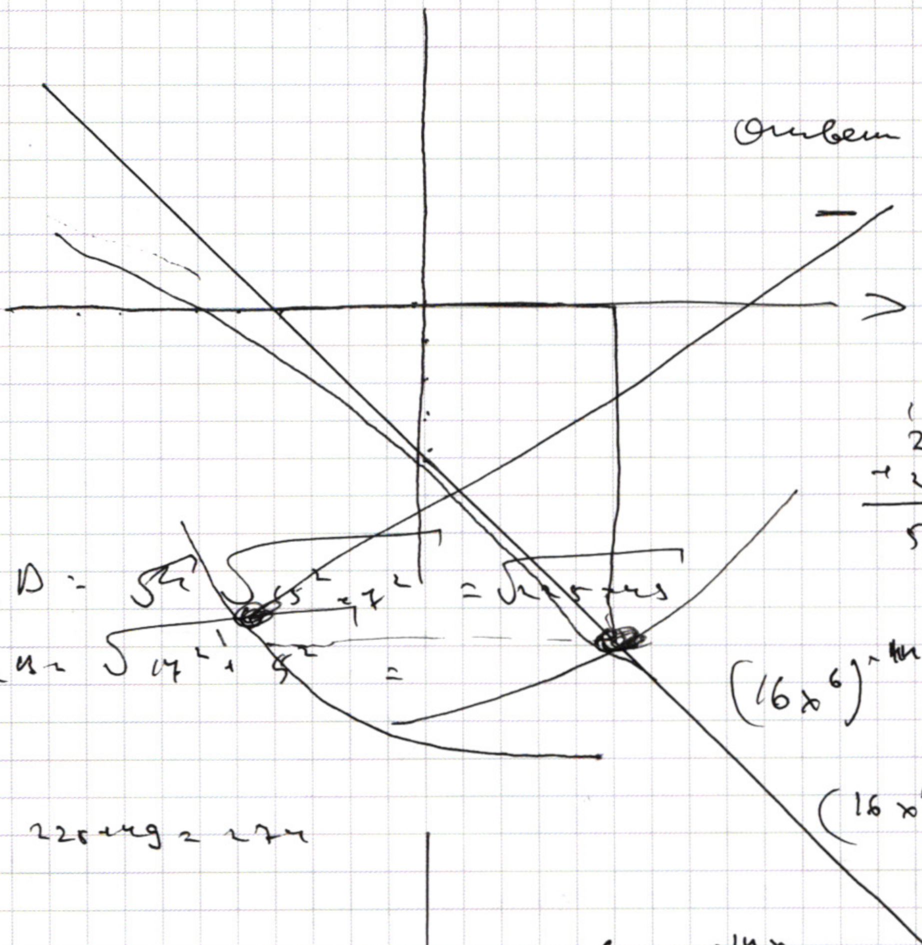
$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\cos 4x = \sqrt{2}\cos(9x - 5x) = \sqrt{2}\cos 9x \cdot \cos 5x + \sqrt{2}\sin 9x \cdot \sin 5x$

$\cos 9x - \sqrt{2}\cos 9x \cdot \cos 5x - \cos 5x + \sin 9x - \sqrt{2}\sin 5x \cdot \sin 5x + \sin 5x = 0$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



Ответ в 5 ?

— 49,514

514

$$\begin{array}{r} 289 \\ +\,225 \\ \hline 514 \end{array}$$

$O_1D = \sqrt{5^2+7^2} = \sqrt{225+49}$

$O_2M = \sqrt{17^2+5^2} =$

$(16x^6)^{-\ln x} = 2x^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{6\ln x}}$

$225+49 = 274$

$\cancel{16x^6}\ 16^{-\ln x}\cdot(x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2}\cdot\left(\frac{x^6}{2x}\right)^{-}$

$-x^2-xy = -x(x+y)$

$2x^2+8x+4 = y^2-4y-4+4x^2-xy+2y^2$

$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{4}$

$-4x^2+8x-4+y^2-4y+4-xy+2x^2 = 0$

$(16x^6)^{-\ln x} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{6\ln x}}$

$-4(x-1)^2+(y-2)^2+x(2x-y)$

$\cancel{y^2-4y+4}$

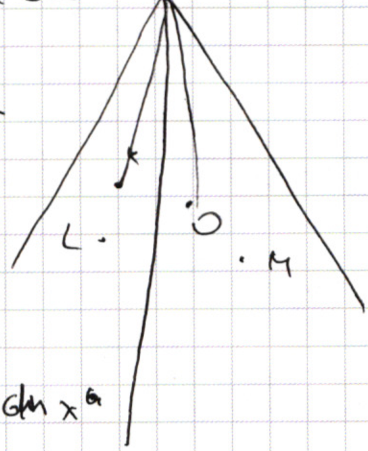
$4x = x+2R$

$(y-2-2(x-1))(y-2+2x-1) =$

$3x = 2R$

$x = \frac{2}{3}R$

$= 2x-y-3$



$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2-6\ln x^6}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Заметим, что $9261 = 343 \cdot 27 = 7^3 \cdot 3^3$.

а) В нашем восьмизначном числе обязательно присутствует ровно 3 семёрки. Если было бы больше, то степень вхождения семи была бы больше, аналогично с меньшим кол-вом. При этом 7^2 - уже не цифра.

б) Поймём, что других цифр, кроме 1, 3, 7, 9 быть не может. Если цифра чётная, то произведение будет чётным, если будет пятёрка, то произведение будет делится на 5.

в) Поймём, что количество троек либо одна, либо три. Больше трёх быть не может по понятным причинам, нуля быть не может, т.к. из цифр, кратных 3 только 3, 6, 9 (6 не подходит по чётности), а девятками мы не сможем набрать 3^3. Если троек ровно две, то их произведение будет 3^2, если возьмём девятку, то будет слишком много, если не возьмём ничего, то не хватает (степеней троек)

Итого, осталось разобрать два случая

<u>1-й случай</u>: цифра 3 ровно одна. Тогда мы имеем три семёрки, одну тройку, одну девятку и 3 единицы.

~~Т.к. единицы не различимы, а вариантов поставить 5 цифр на вариантов поставить 3 семёрки на 8 мест C_8^3, вариантов поставить одну тройку на оставшиеся 5 мест $\cancel{C_5^2}$ 5 и 4 варианта поставить 9 получаем $C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{}$~~

~~Единицы не различимы. Вариантов поставить семёрки на 3 места 8·7·6 (первую на одно из 8, вторую на одно из оставшихся 7, третью на одно из оставшихся 6), 5 вариантов поставить тройку и 4 варианта поставить 9 получаем 8·7·6·5·4 = вариантов~~

~~II-й случай у нас есть 3 цифры 7 и 3 цифры 3. Вариантов поставить семёрку 8·7·6, вариантов поставить тройку на оставшиеся 5·4·3~~

Единицы не различимы. Вариантов поставить 3 неразличимые цифры на 3 из 8 мест ровно C_8^3. Вариантов поставить тройку и девятку на оставшиеся 5 мест 5·4 (5 мест для тройки и оставшиеся 4 места для 9.)

Итого $\frac{8!}{3!5!} \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120$ вариантов

<u>II случай</u> когда есть 3 семёрки и 3 тройки. Получаем C_8^3 вариантов для семёрок и C_5^3 вариантов для троек. (И в 1 и во 2 случае если мы фиксируем все цифры то единицы неважно куда ставить)

Итого $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$

Итого вариантов $1120 + 560 = 1680$

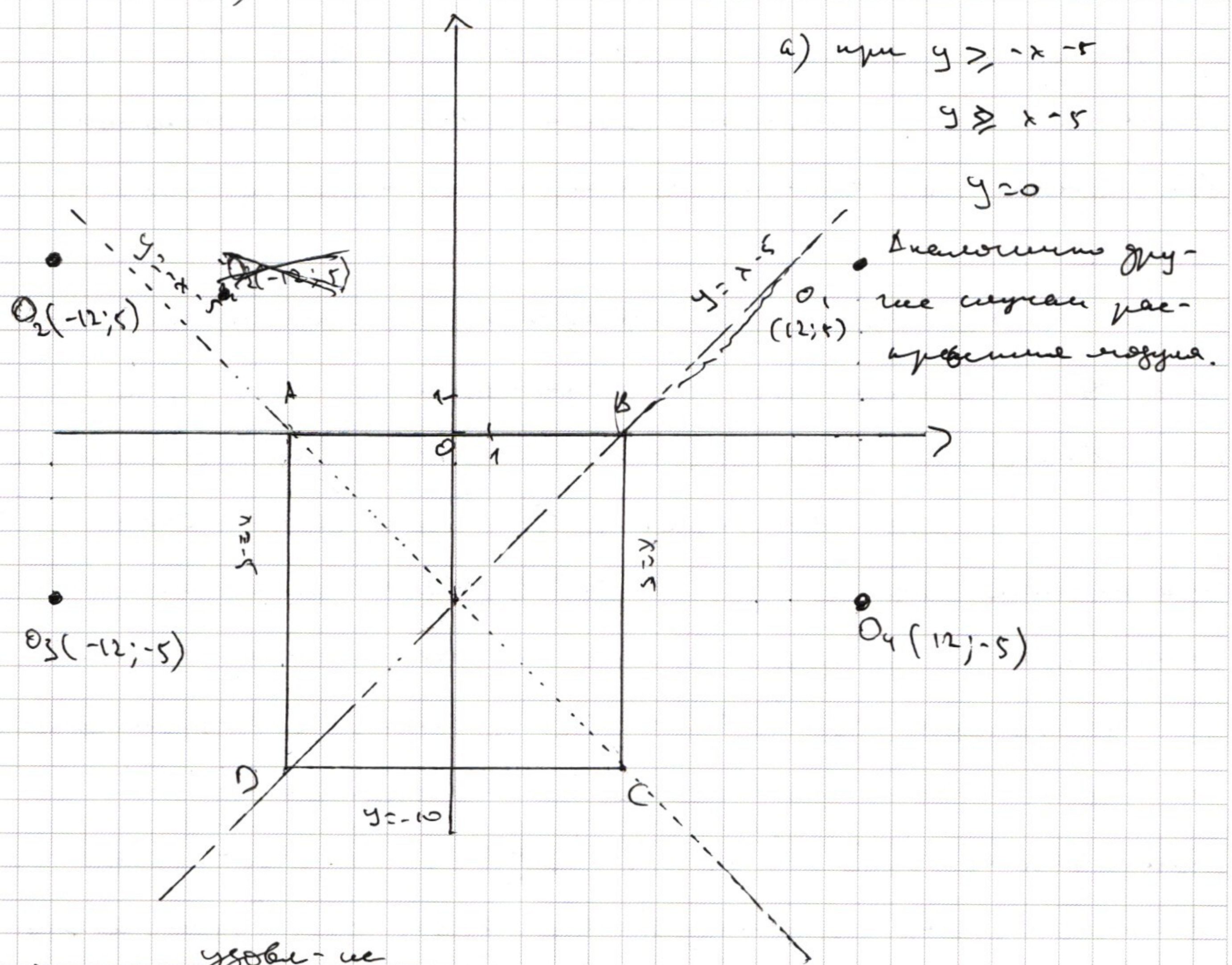
Ответ: 1680 вариантов.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 & (1)\\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=9 & (2)\end{cases}$$

а) Посмотрим, как выглядит на ~~граф~~ OXY множество (1)



Точки, ~~задающие~~ удовл-ие уравнению (1) задают границу квадрата ABCD со стороной 10. При этом (2) задаёт 4 окружности радиуса $\sqrt{4}$, т.к. $(x-12)^2+(y-5)^2=9$ задаёт окружность радиуса 5a с центром в (12; 5), а при „наматывании" модуля нужно отразить картинку в 4 квадранта.

б) Очевидно, что $a = 49$ подходит. Потому что окружности с центром в O_3, O_4 касаются $ABCD$, а ~~$AO_2 =$~~ $AO_2 = \sqrt{7^2 + 5^2} > 7$ (радиус окружности).

Тогда будем постепенно увеличивать радиус и смотреть на количество точек пересечения (эквивалентно решениям системы). При ~~$r < AO_2$~~ $7 = r < AO_2$ будет ровно 4 точки пересечения (по две у окружностей с центрами в O_3 и O_4).

При $r < O_3O$ у левой части будет как минимум две точки пересечения. В силу симметрии у правой тоже.

При $r = O_3O$ будет две совпадающие точки пересечения ~~с~~ с окружностями ~~в~~ с центрами в O_3 и O_4 и как минимум одна точка пересеч. окр. с центром в O_2 и не совпадающая с O. При дальнейшем увеличении радиуса до $r \geq O_3B$ ~~д~~ две нижние окружности ~~д~~ будут иметь по две точки пересеч. с квадратом. ~~да~~ Далее же у нижних окружностей не будет точек пересечения с квадратом.

При этом $O_2D = \sqrt{15^2 + 7^2} \leq O_2B = \sqrt{17^2 + 5^2}$, следовательно, окр. с центром O_2 всегда будет иметь две точки пересечения с квадратом (как и окружность с центром в точке O_1) до того момента, пока $r < O_2C$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

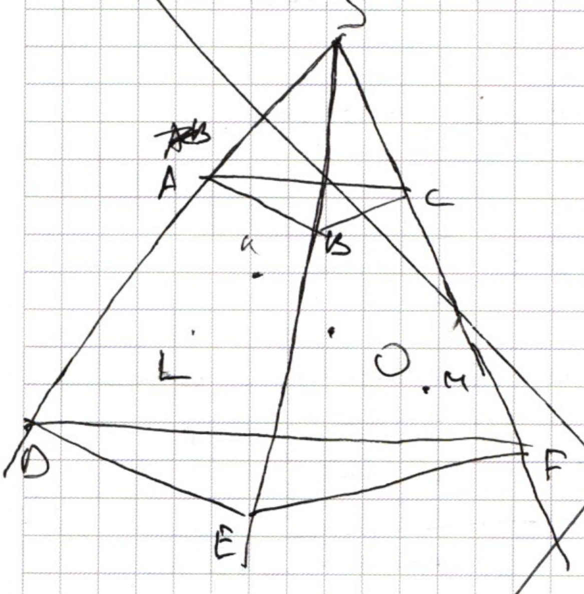
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $r > O_2C$ окружности вообще не будут пересекать $ABCD$. А при $r = O_2C$ у окружностей с центрами в O_1 и O_2 будет ровно по одному пересечению. (т.к. $O_2C > O_2D$

$a = r^2 = O_2C^2 = 17^2 + 15^2 = 289 + 225 = 514$

Ответ: $a = 49$, $a = 514$.

№4.



~~Дано~~:

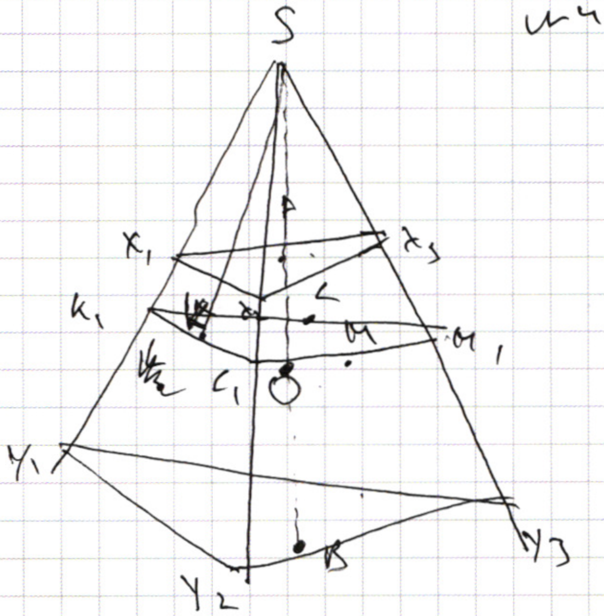
Пусть $\triangle ABC$ — треугольник, высекаемый плоскостью, перпендикулярной SO, $\triangle DEF$ — тоже треугольник, высекаемый из угла плоскостью, касающейся сферы и $\perp SO$.

$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{1}{16}$ Т.к. плоскости параллельны, то треугольники подобны, а значит $k = \frac{1}{4}$ $\left(\sqrt{\frac{1}{16}}\right)$

Тогда подобны и $\triangle SAB \sim \triangle SDE$ с таким же $k \Rightarrow \frac{SB}{SE} = \frac{1}{4} = \frac{SB}{SB+2R}$ (где R - радиус сферы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow SB = \frac{2}{3}R$.

№4.



Пусть α и β - плоскости, касающиеся сферы и $\perp SO$. Пусть они высекают $\triangle X_1X_2X_3$ и $\triangle Y_1Y_2Y_3$

$A = (X_1X_2X_3) \cap SO$

$B = (Y_1Y_2Y_3) \cap SO$

т.к. $\alpha \perp SO$ и $\beta \perp SO$ то $\alpha \parallel \beta$ и $\triangle X_1X_2X_3 \sim \triangle Y_1Y_2Y_3$ и $k = \frac{1}{4}$ (коэффициент подобия)

Тогда из т. Фалеса в пространстве вытекает, что $\frac{SA}{SB} = \frac{1}{4}$. Пусть r - радиус сферы, тогда

$$\frac{SA}{SA+2r} = \frac{1}{4} \Rightarrow SA = \frac{2}{3}r \Rightarrow SO = \frac{5}{3}r.$$

Тогда из $\triangle SKO$ - прямоугольного вытекает, что $\sin \angle KSO = \frac{r}{\frac{5}{3}r} = \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}}$

Заметим, что $(KLM) \perp SO$. Значит $\triangle K_1L_1M_1$ всё так же подобен $\triangle X_1X_2X_3$ и $\triangle Y_1Y_2Y_3$ (где $K_1; L_1; M_1;$ точки пересечения с ребрами угла плоскости) при этом $X_1K_1 = K_1Y_1$. Значит если $SX_2 = x$, $SY_2 = 4x$, ~~значит~~ $\cancel{SL_1 = \frac{3x}{2}}$ значит $SL_1 = 2{,}5x$. Значит $k_1^2 = \frac{S_{X_1X_2X_3}}{S_{K_1L_1M_1}} = 6{,}25$, а значит $\boxed{S_{K_1L_1M_1} = 6{,}25}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$; $S_{K_1L_1M_1} = 6{,}25$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н3.

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} & (1)\\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2)\end{cases}$$

1) Преобразуем (2)

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (-4x^2 + 8x - 4) + (y^2 - 4y + 4) + 2x^2 - xy =$

$= -4(x-1)^2 + (y-2)^2 + x(2x-y) = (y-2-2(x-1))(y-2+2(x-1)) +$

$+ x(2x-y) = (y-2x)(2x+y-4) - x(y-2x) =$

$\cancel{(y-2x)(}= (y-2x)(x+y-4)$

$(y-2x)(x+y-4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ x+y-4=0\end{array}\right.$$

a) $y = 2x$. Подставим в (1)

$(x^2\cdot(2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^2}\right)}$

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x}\right)}$

$(16)^{-\ln x}\cdot(x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2}\cdot 2^{-6\ln x}\cdot x^{-6\ln x}$ $\quad x>0$ по одз

$16^{-\ln x} = 2^{\ln 2}\cdot x^{\ln 2}\cdot 2^{-6\ln x}$

$2^{-4\ln x}$

2) Теперь преобразуем (1) Сначала левую часть:

$(xy^2)^{-2\ln x} = x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x}$. Теперь правую

$y^{\ln y/x^2} = y^{\ln y - \ln x^2} = y^{\ln y}\cdot y^{-2\ln x}$. Приравняем.

$\cancel{x^{-2x}}$ $x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-7\ln x}$ т.к. $y^{4\ln x} > 0$, $y > 0$ по ОДЗ

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-3\ln x}$. Прологарифмируем по основанию e:

$-2\ln x\cdot \ln x = \ln y\cdot \ln y - 3\ln x\cdot \ln y$

$\ln x\,(3\ln y - 2\ln x) = \ln^2 y$

<u>I. из ур. $y = 2x$</u>

$\ln x\,(3\ln 2x - 2\ln x) = \ln^2 2x$

$\ln x\,(3\ln 2 + \ln x) = \cancel{\ln^2 2x}\ (\ln 2 + \ln x)^2$

~~$3\ln x\cdot\ln 2$~~ $]\ \ln x = t$

$\cancel{3t}\ 3\ln 2\cdot t + t^2 = t^2 + 2t\ln 2 + \ln^2 2$

$\cancel{t(}\ t\cdot\ln 2 = \ln^2 2$

$t = \ln 2$. Перейдём к x

$\ln x = \ln 2 \Rightarrow \boxed{x = 2;\ y = 4}$. Подстановкой в (1) убеждаемся, что подходит

II. из ур. ~~$y = 4 - x$~~ $x + y = 4$

Заметим, что тогда если $(a;b)$ будет решением, то и $(b;a)$ - тоже решение. Теперь заметим, что (1) не симметричное уравнение, то есть если b и a различные, то $(a;b)$ и $(b;a)$ не могут быть решениями. Остаётся только $\boxed{x = y = 2}$. Подстановкой в обе части убеждаемся, что ~~обе~~ они обе принимают значение $2^{-6\ln 2}$

Ответ: $(2;4)$; $(2;2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

~~а) $\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2}\cos(9x - 45^\circ)$ (доп. угол)~~

~~б) $\sin 5x - \cos 5x = -\sqrt{2}\cos(5x + 45^\circ)$ (доп. угол)~~

~~Значит исходное рав-во перепишется в виде:~~

~~$\cos(9x - 45^\circ) - \cos(5x + 45^\circ) - \cos 4x = 0$~~

~~$\exists\ 9.5x + 45^\circ = \alpha$, $4x = \beta$~~ $\Rightarrow 9x - 45^\circ = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) - \cos\alpha - \cos\beta = 0$

$\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha - \cos\beta = 0$

$\cos\beta(\sin\alpha - 1) + \cos\alpha(\sin\beta - 1) = 0$

$-2\sin 7x \sin 2x + 2\sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

~~$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$~~

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0$

а) $\cos 2x = \sin 2x$ ~~$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$~~ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$

б) $2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x$ ← раскладываем по формуле разности синусов

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n_1}{5} \ (n_1 \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n_3}{9} \ (n_3 \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$

$\cancel{\cos 9x + \sin 9x =}$

$\cancel{\cos 9x - \cos 5x}$

$\cos 9x = \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x$

$\sin 9x = \sin 5x \cdot \cos 4x + \cancel{\cos 5x \cdot \cos 4x}\ \cos 5x \cdot \sin 4x$

$\cos 5x(\cos 4x + \sin 5x - 1) + \sin 5x(\cos 4x \cdot \sin 4x + 1)$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} = y$

$-76 - 2(2^{32} - 1)x < -y$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$