

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 7^3 \cdot 3^3$$

Есть два различных
"сценария"

$$\begin{array}{r} 1 \\ 56 \\ + 2 \\ \hline 112 \end{array}$$

в записи числа
используется набор
цифр
7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1.

количество вариантов

$$S_1 = \frac{8!}{3!3!2!}$$

$$S_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 28 \cdot 20 = 560$$

$$S_{\text{одн}} = S_1 + S_2 = 1680$$

Ответ: 1680

в записи
числа набор
цифр:

7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1.

количество
вариантов

$$S_2 = \frac{8!}{3!3!}$$

$$S_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 56 \cdot 20 = 1120$$

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) \cdot (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} (\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)) = 0$$

$$4 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

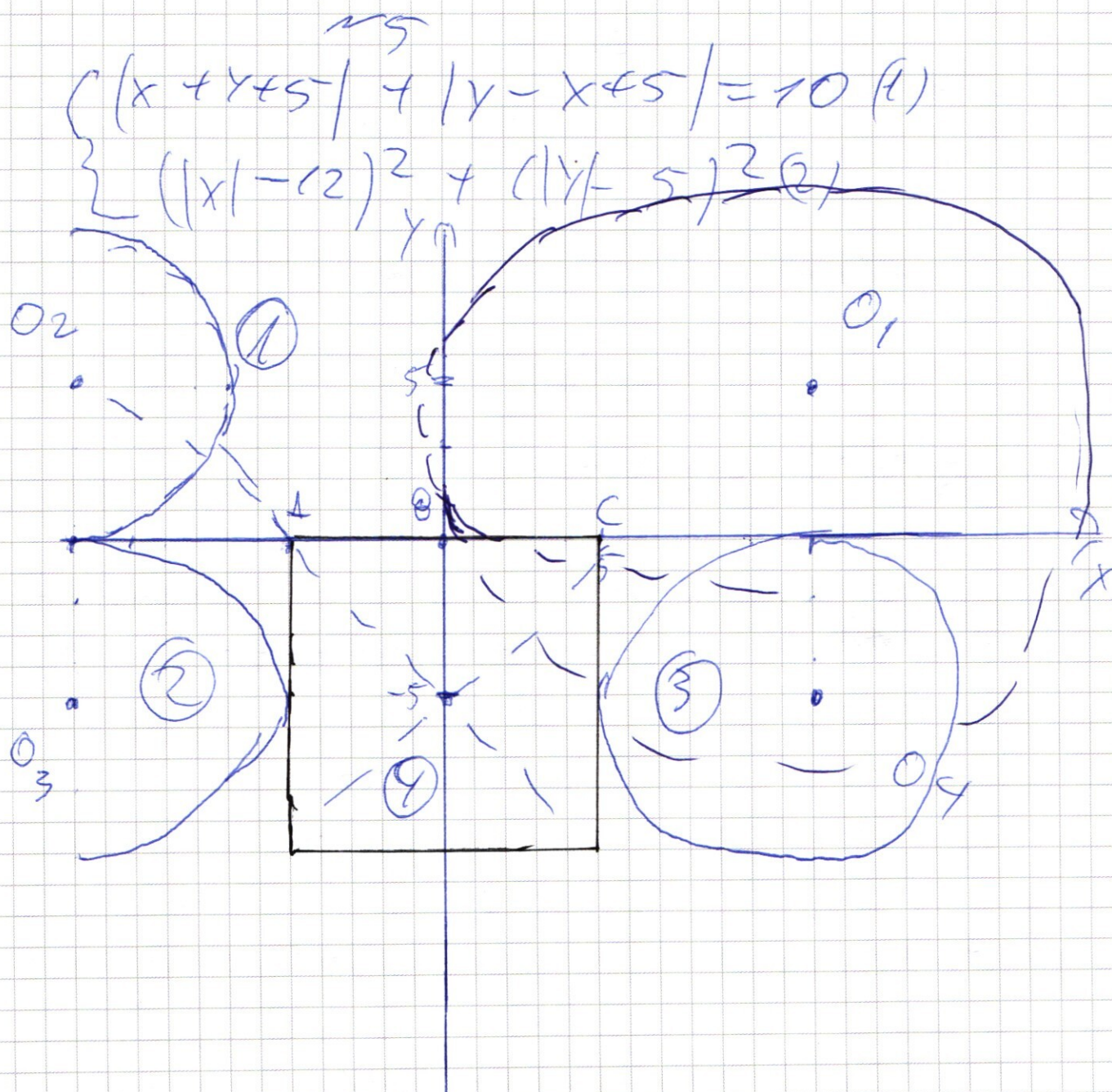
$$\begin{cases} \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \tan 2x = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \\ \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n \\ \frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$,

$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.



$$(1) |x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

если $x+y+5 \geq 0$

$$|x+y+5| = x+y+5$$

$$y-x+5 \geq 0 \Rightarrow |y-x+5| = y-x+5$$

в зоне 1 оба модуля +:

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$y = 0$$

в зоне 2 1-й модуль - " 2-й + "

$$-x-x-5 + x-x+5 = 10$$

$$x = 5$$

в зоне 3 1-й модуль + " 2-й - "

$$x+y+5 - x+x-5 = 10$$

$$x = 5$$

в зоне 4 оба модуля -

$$y = -10$$

(2) окружности лежащие в своей невырожденной R-л.а

$$O_1(1; 5) \quad O_4(12; -5)$$

$$O_2(-12; 5) \quad \text{др. когда}$$

$$O_3(-12; -5)$$

у O_1 и O_2 : 0 р. $a \in [0; 74) \cup (169; +\infty)$

когда $a = 169$ - 1 точка т.е. 1 р.

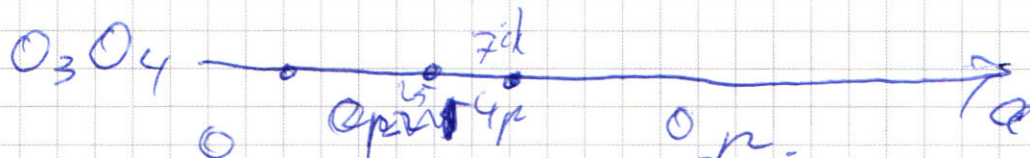
$a \in [74; 169)$ - 2 р. $O_2A = \sqrt{74}$
 $O_2B = 169$

каждая окр. пересекает 1 раз

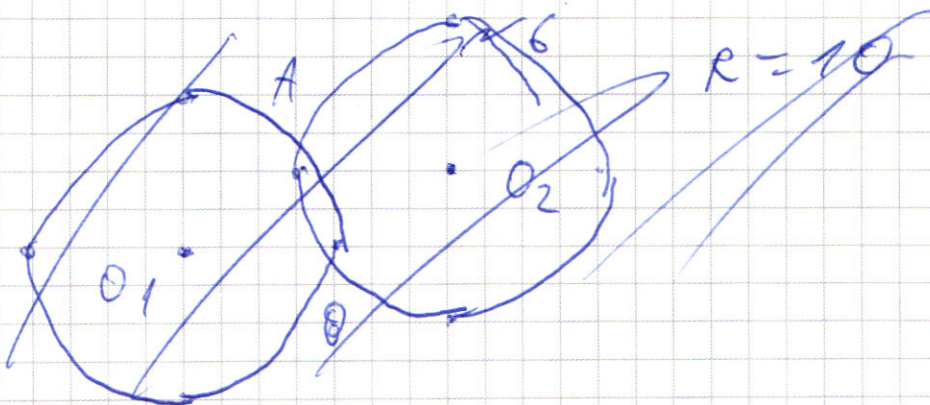


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_3 \ll O_4: a \in [0; 25] \rightarrow \text{касание}$
 $a \in (25; 74] - \text{касание}$
 $2r$ - пересечение
 $a = 25 - 2r$ - касание



$a \in \{25\} \cup (74; 169) - 2r$
 Ответ: $\{25\} \cup (74; 169)$



$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x^3} = y^{\ln(y/x^7)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ $x > 0$
 $y > 0$

$$(2) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\begin{aligned} \oplus &= (4 + \cancel{x})^2 + 8x^2 - 32x = \\ &= 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x + 4 \pm (3x - 4)}{2}$$

$$y = 2x \quad (3)$$

$$y = (4 - x)(4) \quad x \leq 4$$

$$y = 2x:$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} \text{ монотонно убывает}$$

$$\begin{aligned} 2x^{\ln(\frac{2}{x^6})} &= (2x)^{\ln 2 - \ln x^6} \\ 16^{-\ln x} \cdot x^{-6 \ln x} &= (2x)^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x} \cdot x^{\ln x} \\ 2^{-4 \ln x} &= (2x)^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x} \end{aligned}$$

$$1 = (2 \cdot x)^{\ln 2} \cdot 2^{\ln x}$$

$$\begin{aligned} 2^{\ln \frac{2}{x^2}} &= x^{\ln 2} \\ 2^{\ln \frac{x^2}{2}} &= x^{\ln 2} \end{aligned}$$

$$x = 2^{\log_2 x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln \frac{x^2}{2} = \log_2 x \ln 2$$

$$\log_2 x = t$$

$$\ln \frac{x^2}{2} = \frac{\log_2 \frac{x^2}{2}}{\log_2 e} = \ln 2 \log_2 \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 = (2^t - 1) \ln 2$$

$$t^2 - 1 = t$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 5$$

$$t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$2^t = \frac{x + 1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = 2^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$x = 2^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$$

$$x = 2^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$y = 2^{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$y = 4 - x:$$

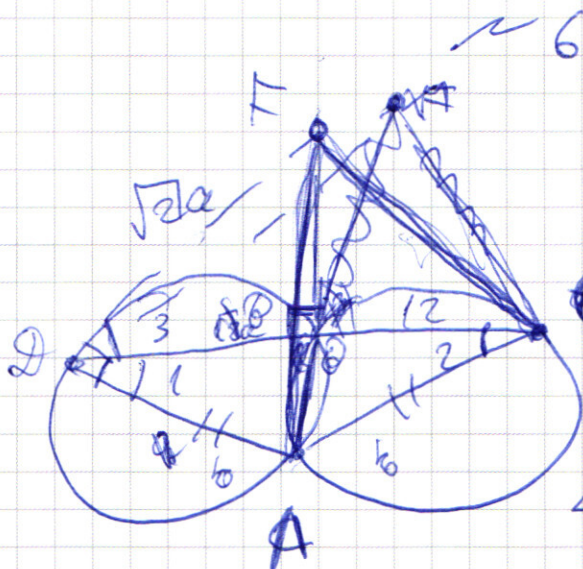
$$(x^2(4-x)^2)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

с одной стороны монотонно
убывает с другой монотонно
растет значит не больше.

$x = 4$ - корень

$y = 0$

Ответ: $(4; 0)$; $(2^{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}; 2^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}})$.



1) м.к. отрез. равны
то градусная
мера отсеченной
дуг одинакова
значит

$$\angle 1 = \angle 2 = \frac{\angle A\theta}{2}$$

т.к. $\angle C + \theta = 90^\circ$

$$\angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$$

$$A\theta = 2R^2$$

$$A\theta = 10\sqrt{2}$$

$$\Delta DFO - \text{п/д } \angle F = \angle 2 = 45^\circ$$

пусть $OD = a$ тогда $DF = \sqrt{2}a$

$$OA = AC = b$$

$$\angle 3 = \angle 1 = 45^\circ$$

$$\angle 3 = \angle 2 \Rightarrow AC \parallel DF$$

$$AD \perp DF$$

$ACFD$ - пр-к

параллелограмм

$$FC^2 = b^2 + (\sqrt{2}a - b)^2 = 2b^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ab$$

$$AO^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \text{ (м.к. } \theta C)$$

$$\frac{FC^2}{AO^2} = 2 \quad FC = \sqrt{2}AO = 20$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \text{д) } & \varphi_C = \varphi_Z \\ & Z_C^2 = a^2 + \varphi_C^2 \quad (\text{Т. пиф. в } \Delta FOC) \\ & 400 = 144 + a^2 \\ & a = 16 \end{aligned}$$

$$\cancel{a^2}^2 = a^2 + \varphi^2 - 2a\varphi$$

$$\varphi_C = a + \varphi_C = 28$$

$$\cancel{AC} \cdot AC = OC \cdot AC = \frac{\varphi_C}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2} \quad (\Delta OAC \text{ к-т; п/б})$$

$$\begin{aligned} & \cancel{AC}^2 = 2a^2 + \varphi^2 = 512 + 196 = 708 \\ & = 909 \end{aligned}$$

$$\sin \angle Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle Z = 45^\circ$$

$$\sin \angle FCO = \frac{FO}{FC} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \angle FCO = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin \angle FCA &= \sin(\angle FCO + \angle Z) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{7}{5} \right) = \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta FCA} &= FC \cdot AC \cdot \sin \angle FCA = \\ &= \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 28 = 14^2 = 196 \end{aligned}$$

Ответ: а) $FC = 20$

$$\text{д) } S_{\Delta FCA} = 196$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{h_1^2}{h_0^2} = \frac{\frac{h_1^2}{r^2}}{\frac{h_0^2}{r^2}} = \frac{\left(\frac{50-r}{r}\right)^2}{\left(\frac{16}{15}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9}}{\left(\frac{16}{15}\right)^2} = \frac{4 \cdot 15^2}{9 \cdot 16^2} = \frac{5^2}{8^2}$$

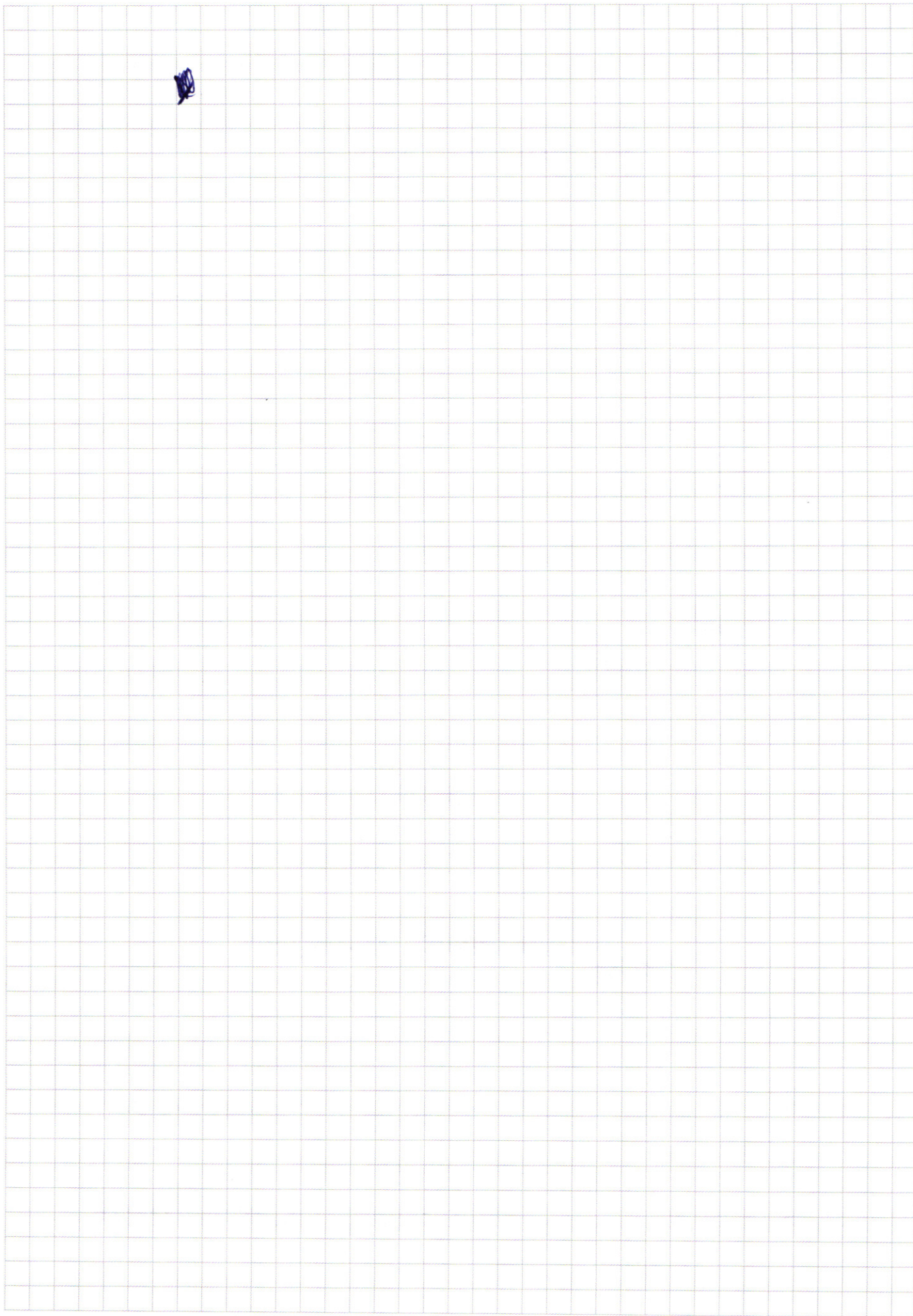
$$S_0 = \frac{64}{25} S_1 = \frac{64}{25}$$

Ответ: 4) $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$
 $\sqrt{1} \quad S_0 = \frac{64}{25}$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

↑ ↑
нечетное четное

$$\begin{aligned} 76 + 2(2^{32} - 1)x &\geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ 2 \cdot (3 \cdot 2^{32} - 1)x - 2^x &\geq 3 \cdot 2^{34} - 76 \\ 2^{33} \cdot x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} + 76 &> 0 \\ 2^{33}(x - 6) - 2(x - 6) - (2^x - 2^6) &> 0 \\ 34 \leq x \leq 7 &\text{ неравенство выполняется.} \\ \text{т.к. } x &\geq 33 \end{aligned}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$76 + (2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 - 2^{34}$$

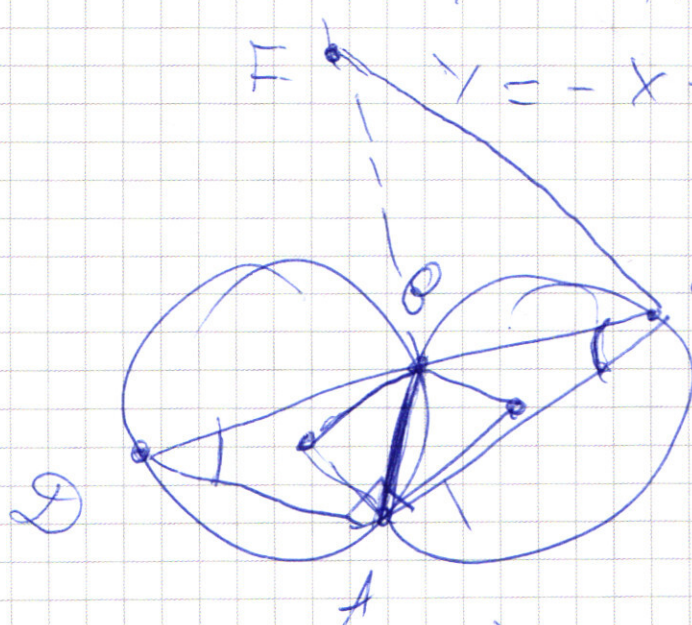
$$2x^2 - 8x + x^4$$

$$\Phi = (x+4)^2 - 8x^2 - 32x =$$

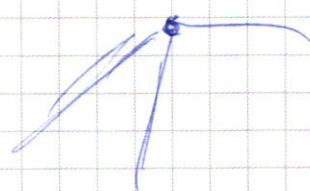
$$= (3x - 4)^2$$

$$y = x + 4 \pm 3x \mp 4$$

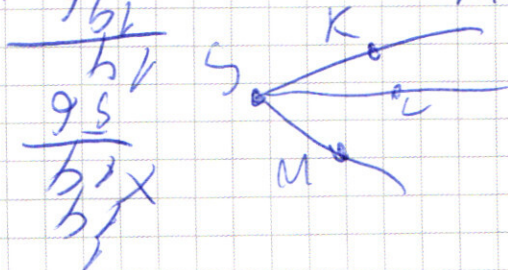
$$y = 2x^2$$



$$c = (2x)^{-\ln(\frac{2}{x})}$$



$$76 + 2(2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 - 2^{34}$$



15

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 0$$

$$y+5 \geq x$$

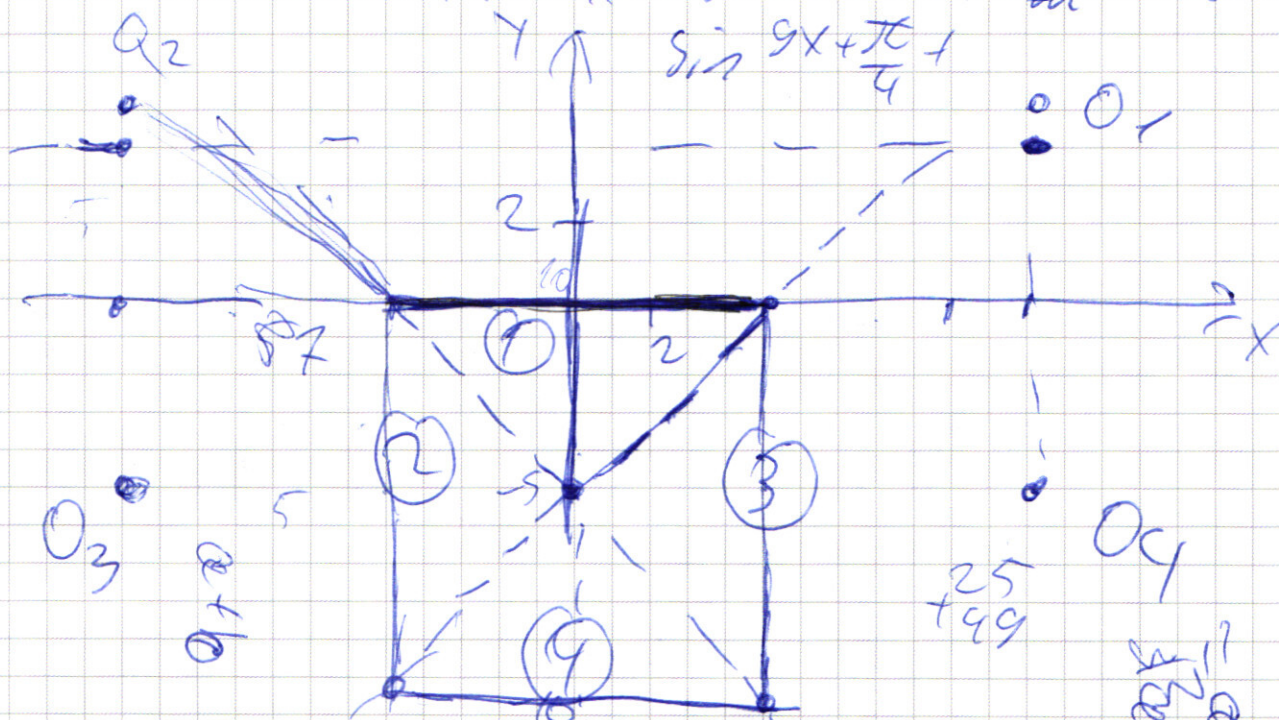
$$y \geq x-5$$

$$y \geq -x-5$$

$$x+y+5 \geq 0$$

$$y \geq -5-x$$

$$y \geq x-5$$



$$x+y+5 - x-x-5 = 10$$

$$x=5$$

$$x+y-5 - x-x-5 = 10$$

$$x=5$$

$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$y=-10$$

$$|x+y-5|$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}ab = \sqrt{2}ab$$

$$2a^2 + (a+b)^2 - \frac{2ab}{\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\cos 4x = (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cdot (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos 2x \right)$$

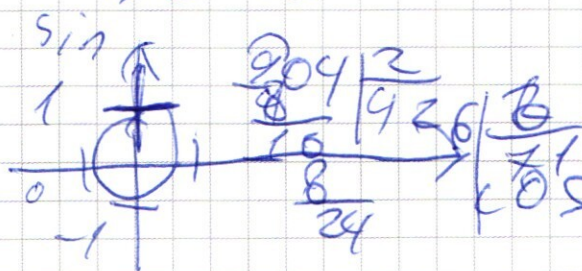
$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$2 \left(\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \right) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$4 \left(\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \right) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$256 + 196 = 392$$

$$= 904$$



$$y + x + 5$$

$$16^{-\ln x} - 6 \ln x = 2^{x \ln \frac{2}{x6}}$$

$$16^{-\ln x} - 6 \ln x = (2x)^{\ln 2} \cdot 2x^{-6 \ln x}$$

$$2^{2 \ln x} = 2x^{\ln 2}$$

$$x = 2^{\log_2 x}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 8x) =$$

$$= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$2^{33} \cdot x - 2x + 26 \geq 2^{34} \cdot x$$

$$2^{33}(x-6) - (16x-6) - \ln x =$$

$$= (2x) \ln \frac{2}{x6}$$

$$ODZ: x > 0$$

$$\frac{y}{x^7} > 0$$

m.e. x и y
одного знака
и > 0.

$$x^2 \cdot y^4 = \ln \left(\frac{x}{x6} \right)$$

$$= (2x) \ln \left(\frac{2}{x5} \right)$$

$$16x6 = 2x$$

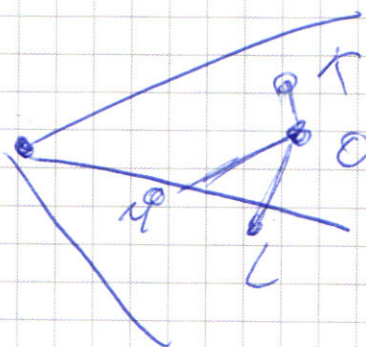
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$h_2 = h_1 + 2R$$

$$\frac{1}{16}$$

$$x6 = x + \frac{2R}{h_1}$$

$$15 = \frac{h_1}{h_1}$$



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_1 + 2R}$$