

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$; так как это число состоит из произведений цифр

$\Rightarrow$ цифры могут быть только: 1, 3, 7 или 9. В числе три единицы

$\Rightarrow$ способов их расставить $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$

3^3 мы можем написать как: 3 и 9 или 3, 3 и 3 $\Rightarrow$ 2 случая:

1) 3 и 9 $\Rightarrow$ способов выбрать ~~из~~ 3 $\Rightarrow C_{8-3}^1 = C_5^1 = 5$. способов выбрать

9: $C_{5-1}^1 = C_4^1 = 4$. (3 и 9 и 7) способов перемешивания т.к. они последовательны $\Rightarrow$ всего способов: $56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$

2) 3, 3, 3 $\Rightarrow$ способов выбрать три 3 $\Rightarrow C_{8-3}^3 = C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \Rightarrow$ всего способов: $56 \cdot 10 = 560$

После выбора в обоих случаях 7, 3 и 9 остальные места занимают единицы $\Rightarrow$ количество способов не меняется.

Всего ~~на~~ таких чисел: $1120 + 560 = 1680$.

Ответ: 1680

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}; \text{ По определению логарифма:}$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \\ x > 0 \Rightarrow \frac{y}{x^2} > 0 \end{array} \right] \Rightarrow y > 0.$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 3x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 2x^2 - 32x = 3x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = 2x; 4-x$$

~ 3 (прогнозируемые)

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^2} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}} = \frac{y^{\ln y}}{(y^2)^{\ln x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{м.к. } (y^2)^{\ln x} > 0 \Rightarrow \left(\frac{y^2}{x^2 y^4}\right)^{\ln x} = y^{\ln y} = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{\ln x}$$

$$\text{м.к. } y^{\ln y} > 0 \text{ и } \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{\ln x} > 0 \Rightarrow y^{\ln y} = \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{\ln x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y^{\ln y} = \ln \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{\ln x} \Rightarrow \ln^2 y = \ln x (\ln y^2 - \ln x^2) =$$

$$= 3 \ln x \ln y - 2 \ln^2 x \Rightarrow 2 \ln^2 x - 3 \ln x \cdot \ln y + \ln^2 y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\ln y - \ln x)(\ln y - 2 \ln x) = 0 \Rightarrow \ln y = \ln x \Rightarrow x = y$$

$$\ln y = 2 \ln x \Rightarrow e^{\ln y} = e^{2 \ln x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x^2$$

$$\begin{cases} y = 2x; y = 4-x \\ y = x; y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \text{используем м.к. } x, y > 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x=2 \Rightarrow y=4}$$

$$\begin{cases} y = 4-x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=2 \Rightarrow y=2}$$

$$\begin{cases} y = 4-x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow y = \frac{18-2\sqrt{17}}{4}}$$

$$\begin{matrix} \frac{\sqrt{17}-1}{2} < 4 \\ \frac{\sqrt{17}-1}{2} < \frac{8}{3} \\ \frac{\sqrt{17}}{2} < \frac{16}{3} \\ 17 < 81 \end{matrix} \Rightarrow \text{подойдет}$$

$$\text{Ответ: } (x; y) = (2; 2), (2; 4), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{18-2\sqrt{17}}{4}\right)$$

~ 5.

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

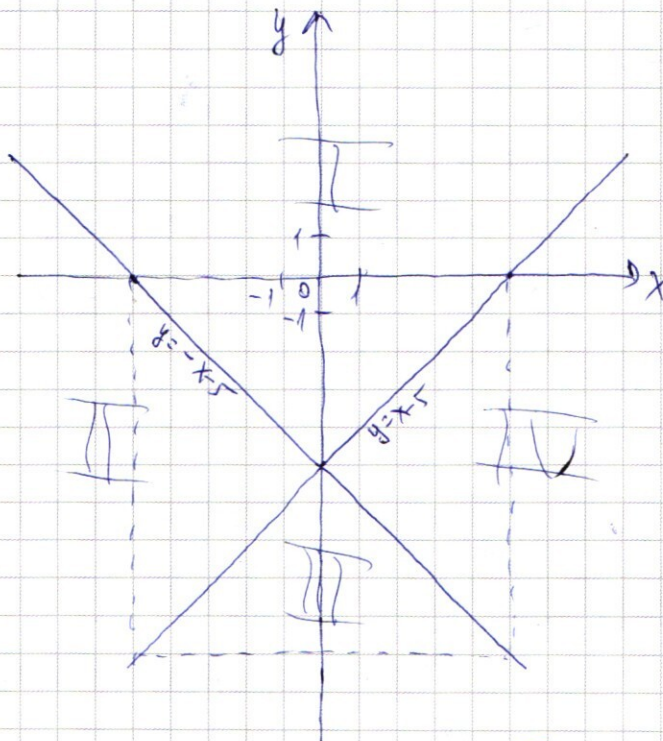
$$2(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 (варианты).

В первом уравнении можно раскрыть скобки в каких-то зонах относительно расположения прямых $y = -x + 5$ и $y = x + 5$. Эти две прямые пересекаются в точке $(0; 0)$. Точка I зона эта на части III , где есть точка $(0; 0)$. Значит, рассмотрим II , III и IV зоны относительно этих прямых.

Рассмотрим x и y в этих зонах:



I зона под прямой $y = x + 5$ и $y = -x + 5$

$$\Rightarrow x + y + 5 + y - x + 5 = 10 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x \in [-5; 5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|x| - 12)^2 + (0 - 5)^2 = a \Rightarrow (|x| - 12)^2 = a - 25 \Rightarrow \text{если } a < 25 \Rightarrow \text{нет решений.}$$

$$\text{Если } a > 25 \Rightarrow \sqrt{a - 25} \Rightarrow |x| - 12 = \pm \sqrt{a - 25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| = 12 + \sqrt{a - 25} \geq 12 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 12 \\ x \leq -12 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

$$|x| = 12 - \sqrt{a - 25}, \text{ при } 12 - \sqrt{a - 25} > 5 \Rightarrow \text{нет решений т.к. } |x| \leq 5 \Rightarrow$$

$$0 < 12 - \sqrt{a - 25} \leq 5 \Rightarrow \sqrt{a - 25} < 12, 12 - \sqrt{a - 25} \leq 5 \Rightarrow \sqrt{a - 25} \geq 7$$

$$a - 25 \leq 144 \Rightarrow a \leq 169, \sqrt{a - 25} \geq 7 \Rightarrow a - 25 \geq 49 \Rightarrow a \geq 74$$

$$\Rightarrow a \in [74; 169]$$

II зона под $y = x + 5$ и $y = -x + 5$

$$\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y \in [-10; 0] \Rightarrow (5 - 12)^2 + (y - 5)^2 = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y - 5)^2 = a - 49, a = 49 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow \text{нет решений.}$$

$$\Rightarrow a > 49 \Rightarrow \sqrt{a - 49} \Rightarrow |y| - 5 = \pm \sqrt{a - 49} \Rightarrow |y| = 5 + \sqrt{a - 49} \Rightarrow \text{если } \sqrt{a - 49} > 5 \Rightarrow \text{нет решений т.к. } |y| \leq 10$$

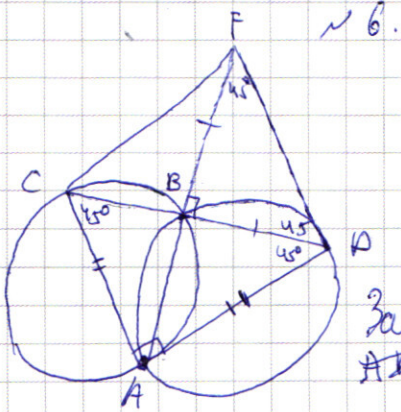
$$|y| = 5 - \sqrt{a - 49} \Rightarrow \text{если } \sqrt{a - 49} > 5 \Rightarrow \text{нет решений т.к. } |y| \leq 10$$

~ 5 (продолжение)

б) если $0 < \sqrt{a-49} \leq 5 \Rightarrow$ 2 решения м.к. $(5 + \sqrt{a-49})$ и $(5 - \sqrt{a-49}) \geq 0 \Rightarrow$ м.к. $y \leq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ~~нет~~ 0 корней уравнения только по 1 значению $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{a-49} \leq 5 \Rightarrow a \leq 74 \Rightarrow \boxed{a \in [49; 74]}$

II) Общ. м. н. $\Rightarrow -x - y - 5 - y + x - 5 = 10 \Rightarrow -2y = 20 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \in [-5; 5] \Rightarrow (y, x) = (-10, x) \Rightarrow$ остается аналогично I $\Rightarrow$
 $\Rightarrow a \in [74; 169]$

II)
15) ^{вып.} вып. по первым коэф. вып., по вторым коэф. невып. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow -x - y - 5 + y - x + 5 = 10 \Rightarrow -2x = 10 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow y \in [-10; 0] \Rightarrow$
 $\Rightarrow (|y| - 5)^2 = a - 49 \Rightarrow$ решается аналогично II $\Rightarrow a \in (49; 74] =$
Ответ: $a \in (49; 169)$.


$$R=10, \angle CAD=90^\circ, \angle FBD=90^\circ, BF=BD.$$

a) CF - ?

$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ.$$

Затем мер. смесью для АСВ А:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle A} = 2R = 20$$

Земмели теор. синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{BD}{\sin(90 - CAB)} = \frac{AD}{\sin(180 - ABA)} = \frac{AB}{\sin BDA} = 2R = 20$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\sin ABC} = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow AD = AC \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin CAB} = \frac{BD}{\cos CAB} = \frac{AC}{\sin(135 - CAB)} = 20 \Rightarrow BC = 20 \sin CAB; BD = 20 \cos CAB;$$

$$AC = 20 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos C4B + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin C4B \right) = 10\sqrt{2} (\sin C4B + \cos C4B)$$

$$BD = BF = 20 \cos \angle CAB, BC = 20 \sin \angle CAB \Rightarrow CF^2 = BC^2 + BF^2 =$$

$$= 400 \cdot \sin^2 CAB + 400 \cdot \cos^2 CAB = 400 \Rightarrow \boxed{CF = 20}$$

5) $BC = 12$; $\angle ACF = ?$

$$BC = 12 \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{400 - 144} = 16 \Rightarrow \sin \angle FCB = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos FCB = \frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin FCB = \sin(45 + FCB) = \sin 45 \cdot \cos FCB + \cos 45 \cdot \sin FCB =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \quad \text{№6 (продолжение)}$$

$$AC = 10\sqrt{2} (\sin CAB + \cos CAB) = \frac{1}{\sqrt{2}} (20 \sin CAB + 20 \cos CAB) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (BC + BD) = \frac{1}{\sqrt{2}} (12 + 16) = 14\sqrt{2}$$

$\stackrel{=BF}{\text{}}$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = \boxed{196}$$

Ответ: $CF = 20$; $S_{ACF} = 196$.

№ 2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x \Rightarrow \sqrt{2} \sin 2x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x$$

$$\sin 7x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

№ 7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} > 0 \Rightarrow y > 0$$

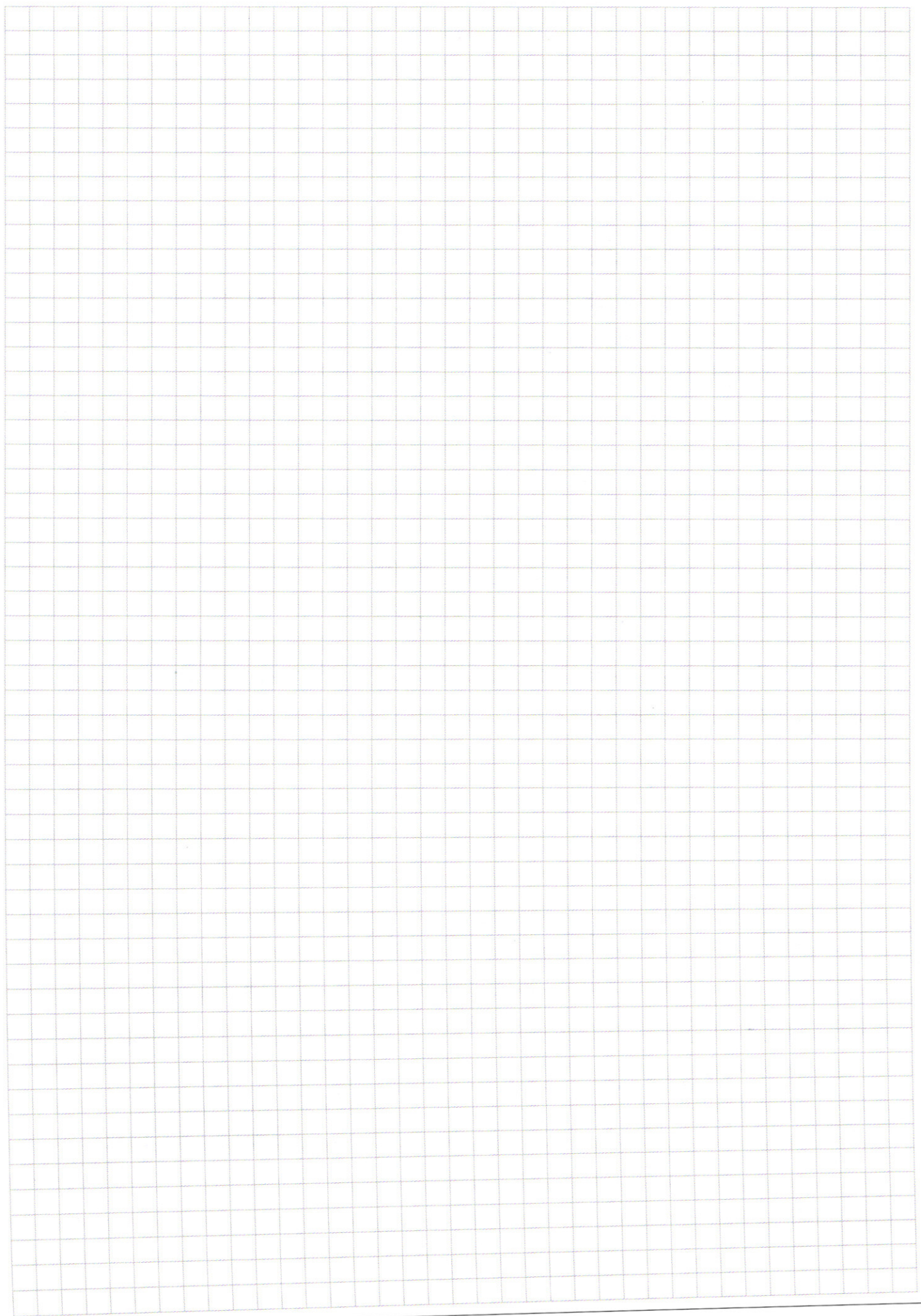
$$\text{Если } x < 0 \Rightarrow 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x < 0 \Rightarrow x < -\frac{76}{2 \cdot (2^{32} - 1)} \approx -\frac{76}{2^{32}}$$

$$\text{Вариант } x \geq 0; \text{ Тогда } x \leq 6 \Rightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 12 \cdot 2^{32} \leq y < 2x \cdot 2^{32} + 76 - 2x \Rightarrow \text{или } x = 6 \Rightarrow 64 + 12 \cdot 2^{32} = 64 + 12 \cdot 2^{32}$$

$$\Rightarrow \text{или } x < 6 \Rightarrow 2^x + 12 \cdot 2^{32} > 2x \cdot 2^{32} + 76 - 2x - \text{нет решений} \Rightarrow x > 6$$

$$y \geq 3 \cdot 2^{34} + 128$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3 \rightarrow \text{элементов} = 4 \cdot 4 = 16$$

В том числе были и меньшие

$$1, 3, 7, 9 \Rightarrow \text{в сумме были 3-сумки} \rightarrow C_3^3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 1$$

3 мы можем написать как: 3 и 9 или 3, 3 и 3 $\Rightarrow$ 2 случая:

$$1) 3 \text{ и } 9 \Rightarrow \text{выберем } 3 = C_5^1 = 5 \cdot \text{выберем } 9: C_4^1 = 4 \rightarrow \text{всего: } 5 \cdot 4 = 20$$

$$2) 3, 3, 3 \Rightarrow C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \rightarrow \text{всего } 20 + 10 = 30. \text{ Вычитаем 1.}$$

$$\text{Всего вариантов } 1120 + 30 = 1150.$$

$$\text{Ответ: } 1150.$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ 27 \\ \hline 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\text{2. } 14 \cos 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 4 \sin 7x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 10 \cos 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 4 \sin 7x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad \sin 7x \cdot \cos 2x -$$

$$- \sin 2x \cdot \sin 7x = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (2 \cos^2 2x - 1)$$

$$\sin 2x \cdot \cos 7x = \cos 4x = \sin 7x \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x \quad 2 \sin^2 7x (1 - \sin 4x) = 2 \cos^2 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

sin

$$\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$$

$$\sin(5x + 4x) + \sin 5x + \cos(5x + 4x) - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 5x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \sin 5x + \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 5x (\cos 4x - \sin 4x + 1) + \cos 5x (\sin 4x + \cos 4x - 1) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x \quad 2 \sin 7x \cdot \cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = \cos 4x$$

$$\sin 7x$$

$$\cos \frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1 + \cos(4x + \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1 - \sin 4x}{2}$$

$$\begin{array}{r} -4 \sin 4x \\ -4 \sin 4x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f'(x) = 5 \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4}) + 9 \cdot \cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \cos(5x - \frac{\pi}{4}) + \cos(9x + \frac{\pi}{4}) + 4 \cos(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin 4x$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \left(\frac{4}{x^2}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x > 0; y > 0$$

$$(2^{10})^{-\ln 2} = 2^{2 \ln 2^{-5}} = 2^{-10 \ln 2}$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 - xy = 4$$

$$1) \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$1) \quad x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = 2x; 4-x$$

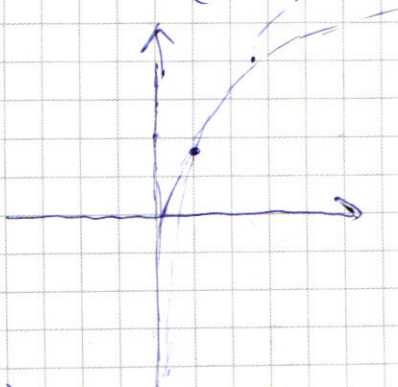
$$1) \quad y = 2x \Rightarrow (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln y - \ln x^7} = (2x)^{\ln 2x - 7 \ln x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \left(2^{\frac{4}{6}} x\right)^{-6 \ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6}\right)} \Rightarrow \frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = (2x)^{\ln 2 - \ln x^6}$$

$$1) \quad (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6}\right)} = (2x)^{\ln 2 - \ln x^6} \quad \log_a b = c \Rightarrow a^c = b$$

$$= \frac{(2x)^{\ln 2}}{(2x)^{\ln x^6}} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{(64x^6)^{\ln x}} = \frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} \Rightarrow (2x)^{\ln 2} = 4^{\ln x}$$



$$f'(x) = 2 \cdot \ln 2 \cdot (2x)^{\ln 2 - 1} =$$

$$= \frac{2 \ln 2}{(2x)^{1 - \ln 2}} > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 4^{\ln x} \cdot \ln 4 = \frac{4^{\ln x} \cdot \ln 4}{x}$$

$$\frac{2 \ln 2}{(2x)^{1 - \ln 2}}$$

$$\frac{1}{x} \cdot 4^{\ln x} \cdot \ln 4$$

$$\frac{4^{\ln x} \cdot \ln 4}{x}$$

$$(2x)^{\ln 2}$$

$$\ln 2 \cdot \ln 2x = \ln x \cdot \ln 4$$

$$\ln 2 (\ln 2 + \ln x) = \ln x \cdot 2 \ln 2$$

$$\ln^2 2 + \ln x \cdot \ln 2 = \ln x \cdot 2 \ln 2 \Rightarrow \ln x \cdot \ln 2 = \ln^2 2 \Rightarrow \ln x = \ln 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$2) \quad y = 4 - x \Rightarrow x < 4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} (x^2(4-x)^4)^{-\ln x} &= (4-x)^{\frac{\ln(4-x) - \ln x^7}{\ln(4-x)e}} \\ \frac{1}{(x^2(4-x)^4)^{\ln x}} &= \frac{(4-x)^{\frac{\ln(4-x)}{7}}}{(4-x)^{\frac{\ln x}{7}}} \Rightarrow \frac{1}{(4-x)^{\frac{\ln x}{7}}} = \frac{4-x}{e} \\ &= (4-x)^{\ln\left(\frac{4}{x^7} - \frac{1}{x^6}\right)} \Rightarrow \left(\frac{4-x}{x^2(4-x)^4}\right)^{\ln x} = \frac{4-x}{e} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{4-x}{x^2}\right)^3 \ln x = \frac{4-x}{e} \Rightarrow \ln \frac{4-x}{x^2} \cdot \ln x = \ln(4-x) - 1$$

$$(\ln(4-x))^3 - \ln x^2 \cdot \ln x = \ln(4-x) - 1$$

$$3 \ln(4-x) \cdot \ln x - 2 \ln^2 x = \ln(4-x) - 1 \quad y = 4-x$$

$$\Rightarrow 2 \ln^2 x - 3 \ln x \cdot \ln(4-x) + \ln(4-x) - 1 = 0$$

$$D = 9 \ln^2(4-x) - 8 \ln(4-x) + 8 > 0$$

$$\ln x = \frac{3 \pm \sqrt{9 \ln^2(4-x) - 8 \ln(4-x) + 8}}{2} \quad \ln(0;4) \in (-\infty; \ln 4)$$

$$\begin{aligned} (x^2 y^4)^{-\frac{1}{y}} &= \frac{x^2 y^4}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}} = \frac{y^{\ln y}}{(y^7)^{\ln x}} \Rightarrow \frac{1}{y^{\frac{\ln y}{e}}} \\ \Rightarrow \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} &= y^{\ln y} = \frac{y}{e} \quad x = 4-x \\ \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x} &= y^{\ln y} \end{aligned}$$

$$\ln \left(\frac{y^3}{x^2}\right) \cdot \ln x = \ln^2 y \Rightarrow (3 \ln y - 2 \ln x) \cdot \ln x = \ln^2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln^2 y - 3 \ln y \cdot \ln x + 2 \ln^2 x = 0 \quad y = 2x; y = 4-x$$

$$D = 9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x = \ln^2 x$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x \pm \ln x}{2} = 2 \ln x; \ln x \Rightarrow y = 4-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2; x = 2$$

$$\begin{aligned} x &= y \\ \ln y &= 2 \ln x \Rightarrow y = e^{2 \ln x} = x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow xy = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y \\ y = 4-x \end{cases} &\Rightarrow x = y = 2 \\ \begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} &\Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, y = 4 \\ \begin{cases} y = 4-x \\ y = x^2 \end{cases} &\Rightarrow x^2 + x - 4 = 0 \\ D &= 1 + 16 = 17 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} - \text{не кор.} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$a \leq 0 \Rightarrow$ не имеет решений

$a > 0 \Rightarrow$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\begin{cases} y = x+5 \\ y = x-5 \end{cases}$$

$$I) x+y+5+y-x+5=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=0 \Rightarrow y=0; x \in [-5; 5]$$

$$II) (|x|-12)^2 = a-25 \Rightarrow a \geq 25 \Rightarrow x = \pm 12 - \sqrt{a-25}$$

$$|x|-12 = \sqrt{a-25} \Rightarrow |x| = \sqrt{a-25} + 12$$

$$|x|-12 = -\sqrt{a-25}$$

$$|x| = 12 - \sqrt{a-25} \leq 5 \Rightarrow \sqrt{a-25} \geq 7$$

$$\sqrt{a-25} \geq 7$$

$$a-25 \geq 49$$

$$a \geq 74$$

$$III) x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y \in [-10; 0]$$

$$(y-5)^2 = a-49 \Rightarrow a \geq 49$$

$$a=49 \Rightarrow y = \pm 5 - 1 \text{ км.}$$

$$|y|-5 = \sqrt{a-49} \Rightarrow |y| = 5 + \sqrt{a-49}$$

$$|y|-5 = -\sqrt{a-49}$$

$$|y| = 5 - \sqrt{a-49}$$

$$\sqrt{a-49} \leq 5$$

$$a-49 \leq 25 \Rightarrow a \leq 74$$

$$a \in [49; 74]$$

$$IV) -x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y=20 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow x \in [-5; 5]$$

$$\Rightarrow (|x|-12)^2 = a-25; a \geq 25; a=25 \Rightarrow \text{не имеет}$$

$$|x|-12 = \sqrt{a-25} \Rightarrow |x| = 12 + \sqrt{a-25}$$

$$|x|-12 = -\sqrt{a-25} \Rightarrow |x| = 12 - \sqrt{a-25}$$

$$\Rightarrow \text{случайно } 12 - \sqrt{a-25} \leq 5 \Rightarrow a \in [74; 169]$$

$$V) -x-y-5+y-x+5=10$$

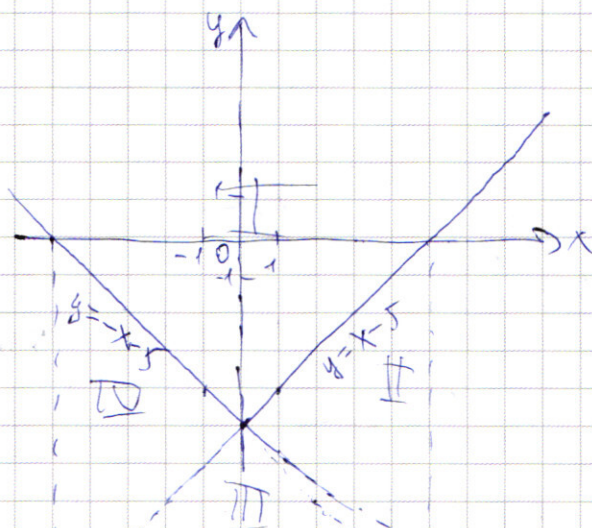
$$-2x=10 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow y \in [-10; 0]$$

$$(y-5)^2 = a-49 \Rightarrow a \geq 49 \Rightarrow |y|-5 = \sqrt{a-49}$$

$$|y|-5 = -\sqrt{a-49}$$

$$\Rightarrow \text{случайно } a \in [49; 74]$$

$$\text{Ответ: } a \in [49; 169]$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$
 $y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x$

$x=0 \Rightarrow 3 \cdot 2^{34} + 1 \leq y < 76$ - нет решений
 $x=1 \Rightarrow$

$2^x \cdot \ln 2 \quad 2 \cdot (2^{32} - 1)$

$x=1 \Rightarrow 2 + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2 \cdot 3^{33} - 2 = 2^{33} + 74$
 $2 + 6 \cdot 2^{33} \leq y < 2^{33} + 74$ - нет решений

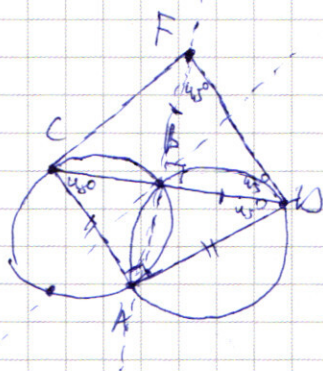
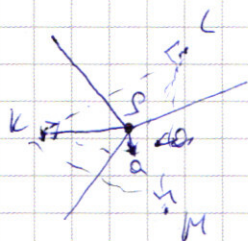
$x=2 \Rightarrow 4 + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2^{34} - 4 = 2^{34} + 72$ - нет решений

$x=3 \Rightarrow 8 + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 6 \cdot 2^{32} + 70$
 $8 + 12 \cdot 2^{32} \leq y < 6 \cdot 2^{32} + 70$

$x=4 \Rightarrow 16 + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 8 \cdot 2^{32} - 8 =$

$x=8 \Rightarrow 64 + 3 \cdot 2^{32} \leq y < 64 + 12 \cdot 2^{32}$

$x=7 \Rightarrow$
 2 пересечения $x=6$ и $76 - 2x + 2 \cdot 3^{33} \cdot x$



$$R=10$$

$$BF=BD$$

$$\angle FBD=90^\circ$$

$$\frac{AC}{\sin \angle CBA} = \frac{AD}{\sin \angle CBA}$$

$$\frac{AC}{\sin \angle CBA} = 2R = \frac{AD}{\sin (180^\circ - \angle CBA)} = \frac{AD}{\sin \angle CBA} \Rightarrow AC=AD$$

$$\frac{AB}{\sin 45} = 2R \Rightarrow AB = 2R \cdot \sin 45 = \sqrt{2}R = 20\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{\sin 45} = \frac{BD}{\sin \angle CAB} = \frac{AC}{\sin \angle CBA}; \angle CBA = 135^\circ - \angle CAB$$

$$\text{Так как } AC=AD=a \Rightarrow \frac{BC}{\sin \angle CAB} = \frac{BD}{\sin \angle CAB} = \frac{a}{\sin (135^\circ - \angle CAB)} = \frac{AB}{\sin 45} = \frac{2R}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 20$$

$$a^2 - a^2 \cos A = a\sqrt{2} = \sqrt{BC^2 + BD^2} \cos A + BD = \frac{a \cos A + \sin A}{a \cos A + \sin A}$$

$$BC = 20 \sin \angle CAB \Rightarrow a\sqrt{2} = 20 \cos \angle CAB + 20 \sin \angle CAB = 20 \sin (\angle CAB + 20^\circ \cos \angle CAB)$$

$$BC^2 + BD^2 = 20^2 \Rightarrow CF = 20$$

$$\delta) BC=12 \Rightarrow BF=16; AB=BC=12 \Rightarrow BF=BD=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2} = 12 + 16 = 28 \Rightarrow a = 14\sqrt{2} = AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle FCB = \frac{FB}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \angle FCB = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \text{ (по т. Пифагора)}$$

$$\Rightarrow \sin \angle ACF = \sin (45^\circ + \angle FCB) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \angle FCB + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \angle FCB = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 196$$

$$\text{Ответ: а) } CF=20 \quad \delta) S_{ACF}=196$$