

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 4x - 4y = 0 \quad (2)$$

из 2-го уравнения системы получаем:

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 4x = 0, \text{ решим относительно } y$$

$$D = (x+4)^2 - 4(-2x^2 + 4x) = (3x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3x + 4^2 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

из 1-го уравнения системы получаем:

$$y > 0, \text{ т.к. } (x^2 y^4)^{-\ln x} > 0, \quad x > 0, \text{ т.к. } \ln x$$

должен быть определен и $\frac{y}{x} > 0$, также

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$\ln x - 2\ln x = \ln y \ln y - 3\ln x$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \ln y$$

$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$, заметим, что при $x=1$; $\ln x=0$,
система неверна, значит

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 3 \frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases}$$

13) продолжение

тогда система примет вид:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \\ \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases}$$

откуда возможны 4 случая:

$$1) \begin{cases} \ln 2x = 2 \ln x \\ y = 2x \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = 2x \end{cases}; \begin{cases} x = 0 - \text{не удов. усл.} \\ x = 2 \\ y = 2x \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \ln(-x+4) = 2 \ln x \\ y = -x+4 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \\ y = -x+4 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} - \text{не удов. усл.} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \ln 2x = \ln x \\ y = 2x \end{cases}; \begin{cases} x = 0 - \text{не удов. усл.} \\ y = 2x \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \ln(-x+4) = \ln x \\ y = -x+4 \end{cases}; \begin{cases} -x+4 = x \\ y = -x+4 \end{cases}; \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 4), (2; 2), (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$

14)

$abcdefgh$ - шестизначное число, тогда $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2$, тогда три "3", три "7" и 2 "1" - его цифры, откуда нужных чисел, удовл. условию будут: $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$

Ответ: 560

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2\sin 7x \sin 2x = 0$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

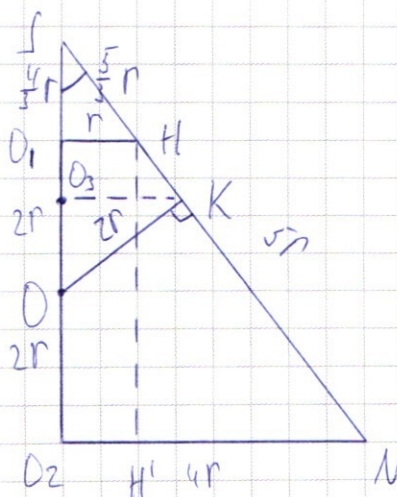
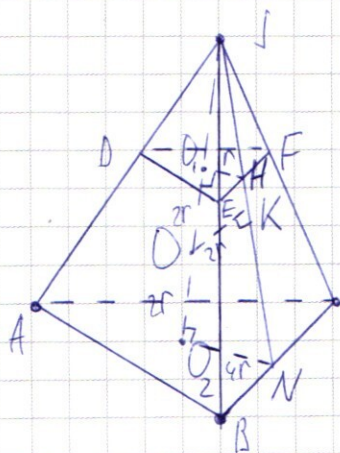
$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \sqrt{n}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{n}}{4}; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{n}}{4}; \quad n \in \mathbb{Z}$

№4



1) пусть r - радиус окр. впис. в треугольник верхнего сечения, тогда R - нижнего

2) т.к. плоскости верхнего L и нижнего β сечения касаются вписанной сферы и $L \perp JO$; $\beta \perp JO$, то JO проходит через точку верхнего и нижнего касания, иначе имелись бы к L и β две точки O проведено 2 различных перп-на,

№41 продолжение

того быть не может

3) Значит данная конфигурация явл-ся
усетённой пирамидой со вписанной сферой,
тогда т. O_1 и O_2 - точки касания плоскостей
сетки с трёхгр. углом сферы и
точки впис-х окр-ей $\triangle DEF$ и $\triangle ABC$

4) т.к. конфигурация - усет. пирамида, причём
 $(DEF) \parallel (ABC)$, т.к. $DEF \perp SO$ и $ABC \perp SO$, то
для неё им-вы все свойства усет. пир-ды

5) тогда $\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}} = \frac{1}{4}$; $R = 4r$ и

$OK = \sqrt{rR} = \sqrt{r \cdot 4r} = 2r$ - радиус сферы, тогда

$$OO_1 = OO_2 = 2r$$

6) дополним усет. пир-ду $ABCDEF$ до полной
(помогая точки $\uparrow$ и рассмотрим
плоскую проекцию части пирамиды (SO_2U)

7) проведем $NN' \perp O_2U$ и $\triangle NN'_U$ - п-ку: $NU = \sqrt{NN'^2 + N'U^2} = 5r$,
т.к. $NN' = O_1O_2 = 4r$, O_2, NN' - перпен-ик, $N'U = O_2U - O_2N = 3r$

8) $ON \parallel O_2U$, значит $\triangle SO_1N \sim \triangle SO_2U$: $\frac{SO_1}{SO_1 + 4r} = \frac{ON}{O_2U} = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}$
 $4SO_1 = SO_1 + 4r$; $SO_1 = \frac{4r}{3}$

9) в $\triangle SO_1N$ - п-ку: $SN = \sqrt{SO_1^2 + O_1N^2} = \frac{5r}{3}$, тогда $SU = 5r + \frac{5r}{3} = \frac{10r}{3}$
 $SO_2 = \frac{4}{3}r + 4r = \frac{16r}{3}$, также $\sin \angle KSO = \sin \angle NSO = \frac{ON}{SN} = \frac{3}{5}$,
откуда $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$, и $\cos \angle KSO = \frac{4}{5}$

10) $SO = 2r + \frac{4}{3}r = \frac{10r}{3}$; в $\triangle SKO$ - п-ку: $KO = OS \cos \angle KSO = \frac{10r}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8r}{3}$,
тогда проведем $KO_3 \perp SO_2$, $KO_3 = \frac{KO \cdot KO_2}{SO} = \frac{\frac{8r}{3} \cdot 2r}{\frac{10r}{3}} = \frac{8r}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

11) KO_3 - радиус вписанной окружности сетки, про-го
через точки KLM , т.к. $\triangle KLO = \triangle LLO = \triangle LOO$, т.к.
 $\angle KLO = \angle LLO = \angle LOO = 90^\circ$ и $OK = OL = OM$ - радиусы впис. окружности и
 LO - общая сторона, аналогично $LO_3 = LO_3 = KO_3$ и
 $LO_3 \perp KO_3$; $MO_3 \perp LO_3$; $(KLM) \perp LO_3$, т.е. $(KLM) \parallel (ABC) \parallel (DEF)$

12) пусть J - искомая п.с.-я сетки;

$$\frac{J}{J_{ABC}} = \left(\frac{OK}{OL} \right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} \right)^2 = \frac{4}{25}; \quad J = 16 \cdot \frac{4}{25} = \frac{64}{25}$$

Ответ: $J = \frac{64}{25}$; $\angle KLO = \arcsin \frac{3}{5}$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases} \quad 2 \text{ решения?}$$

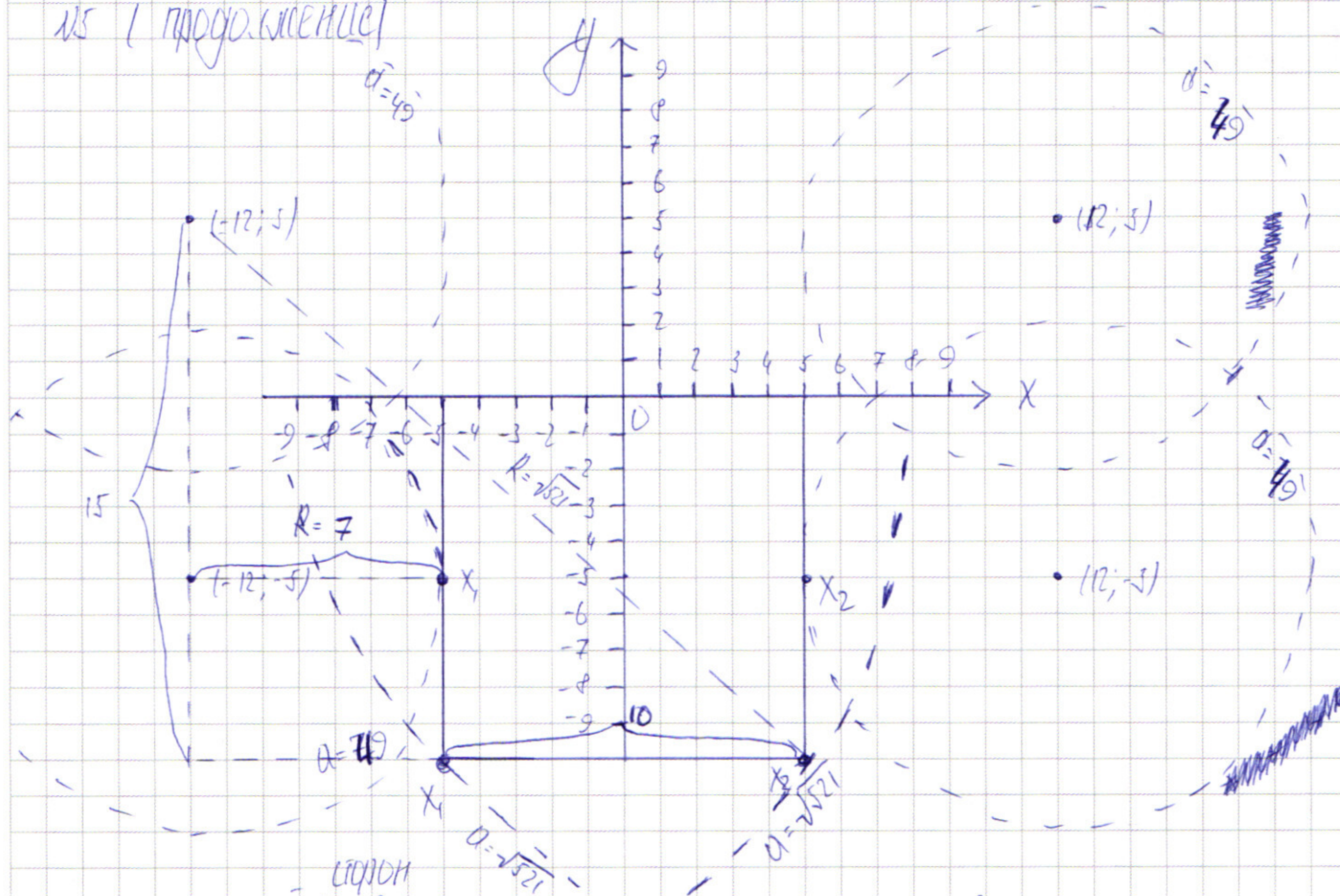
решим первую алгебраически:

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$ - имеет квадрат с
центром $(0; -5)$ и стороной $= 10$.

$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ - имеет окружности с
центрами $(12; 5)$, $(-12; 5)$, $(12; -5)$, $(-12; -5)$ и
радиусами $R^2 = a$; $R = \sqrt{a}$, т.е. $a \geq 0$

перейдем на координатной плоскости для
решения $a \geq 0$, заметим, что система имеет
2 решения в момент касания 2-х окружностей

15 / продолжение



окружностей квадрата, тогда $R=7$ и в момент прохождения двух верхних окружностей через две нижние вершины квадрата, тогда $R = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{521}$
 для первого случая $\alpha = 49$, для второго $\alpha = 521$
 Ответ: $\alpha \in \{49; 521\}$.

17

$$y \geq 2^{x+1} \cdot 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

пусть $t = 2^{32} - 1$, тогда

$$t \geq$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

abcdefgh

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261 = 3 \cdot 3087 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ 9 \\ \underline{26} \\ 26 \\ \underline{21} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ 3 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \\ \underline{12} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 2} = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

№2

$$\cos x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 3x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 3x \sin 2x = 0$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

1/3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)' = \ln x \\ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \\ y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 3x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D &= (x+4)^2 - 4(-2x^2+3x) = x^2+8x+16+8x^2-12x = 9x^2-4x+16 = \\ &= (3x-4)^2 \end{aligned}$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} = \frac{1}{\log e}$$

~~xxxx~~

$$(x^2 y^4)' = \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$x^{-2} \ln x \cdot y^{-4} dx = y^4 dy - \ln x^2$$

$$x^{-2} \ln x \cdot y^{-4} dx = y^4 dy - 2 \ln x$$

$$x^{-2} \ln x = y^4 dy - 2 \ln x + 4 \ln x$$

$$x^{-2} \ln x = y^4 dy - 3 \ln x$$

$$\log_x x^{-2} \ln x = \log_x y^4 \ln y - 3 \ln x$$

$$-2 \ln x = (\ln y - 3 \ln x) / \log_x y$$

$$\ln x^{-2} \ln x = \ln y \ln y - 3 \ln x$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x = (\ln y - 3 \ln x) / \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln x} \right)^2 - 3 \frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$\frac{\ln y}{\ln x} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \quad \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = 3 \ln x \\ y = 2x \\ y = -x+4 \end{cases}$$

$$(1) \ln 2x = 2 \ln x$$

$$\ln 2x = \ln x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$(2) \ln(-x+4) = 2 \ln x$$

$$x^2 = -x+4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} + 1 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = -x+4 = \frac{1 \mp \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$$

$$(3) \ln 2x = \ln x$$

$$2x = x$$

$$x = 0$$

$$(4) \ln(-x+4) = \ln x$$

$$-x+4 = x$$

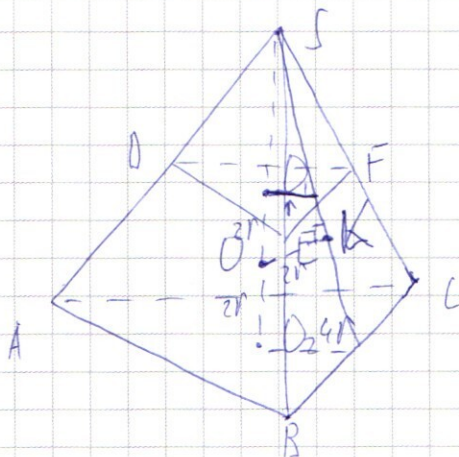
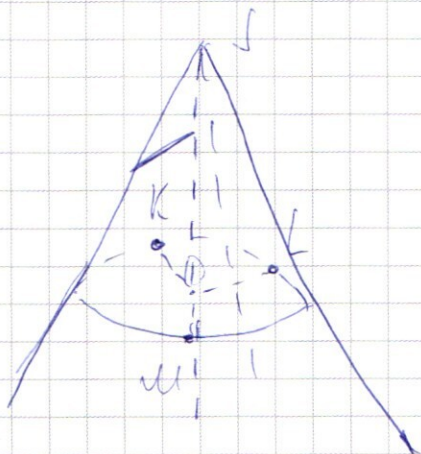
$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

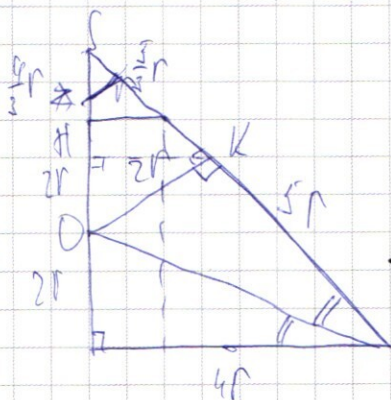
№4



r - радиус верх. осн.

$4r$ - радиус ниж. осн.

$2r$ - радиус осн.



$$\frac{x}{x+4r} = \frac{r}{4r}$$

$$\frac{x}{x+4r} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 4r$$

$$3x = 4r$$

$$x = \frac{4}{3}r$$

$$\frac{16r^2}{9} + r^2$$

$$\frac{5r + 5r}{3} = \frac{10r}{3}$$

$$\sin \angle KLO = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$$

$$OL = \frac{4}{3}r + 2r = \frac{10}{3}r - \text{диаметр } \Delta JOK$$

$$\frac{JK}{JO} = \cos \angle KLO$$

$$\cos \angle KLO = \frac{4}{5}$$

$$JK = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{10}{3}r\right) = \frac{8r}{3}$$

$$OK = JO \cdot \sin \angle KLO = \frac{10}{3}r \cdot \frac{4}{5} = \frac{8r}{3} = 2r$$

$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\frac{8r}{3}}{4r}\right)^2 =$$

$$= \frac{2r}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{25}$$

$$S_{KLM} = 16 \cdot \frac{4}{25} = \frac{64}{25}$$

$$KH = \frac{4r}{\frac{10r}{3}} = \frac{16r}{10}$$

$$= \frac{8r}{5}$$

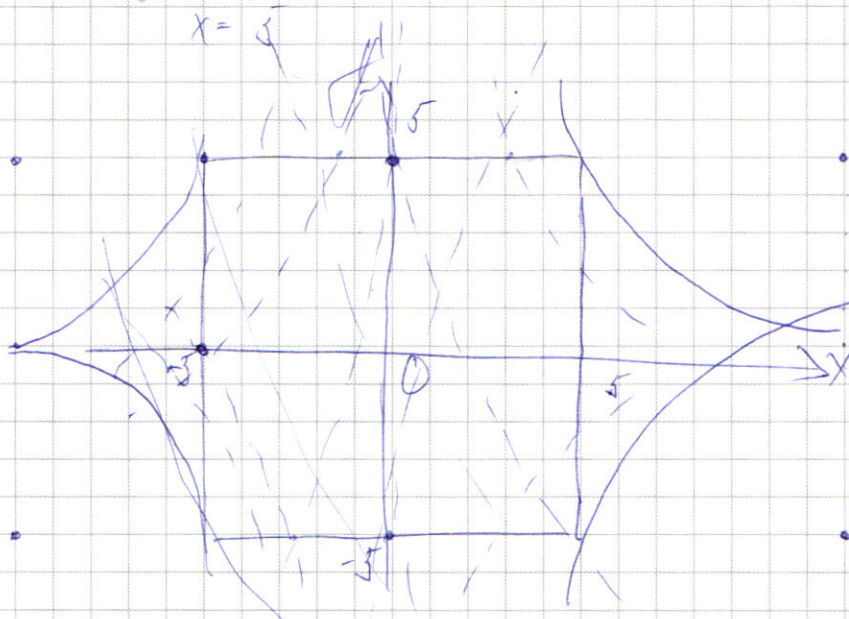
15

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$y \geq -x-5; \quad y \leq x-5$$

$$x+y+5 - y+x-5$$

$$x=5$$



$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$2y = 10$$

$$x+y-5 - y+x-5 = 10$$

$$x=5$$

$$-x+y-5 + x-x+5 = 10$$

$$-2x$$

$$x=5$$

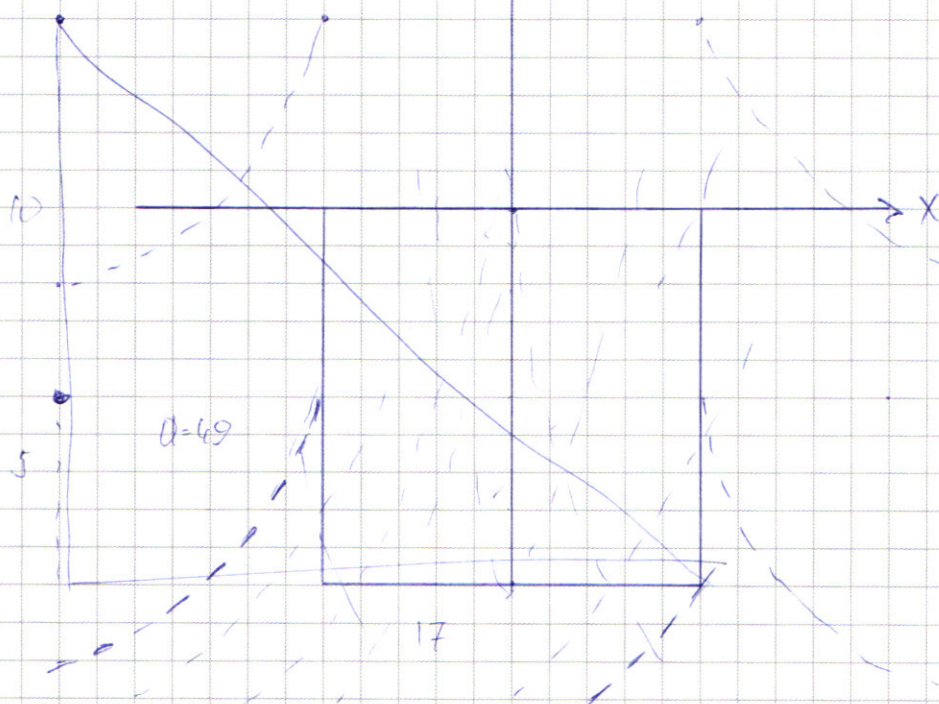
$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

y

$$17^2 + 5^2 = 289 + 25 = 314$$



$$a = 13^2 + 17^2$$

$$b = \sqrt{a} = \sqrt{13^2 + 17^2}$$

$$225 + 289$$

$$289$$

$$+ 225$$

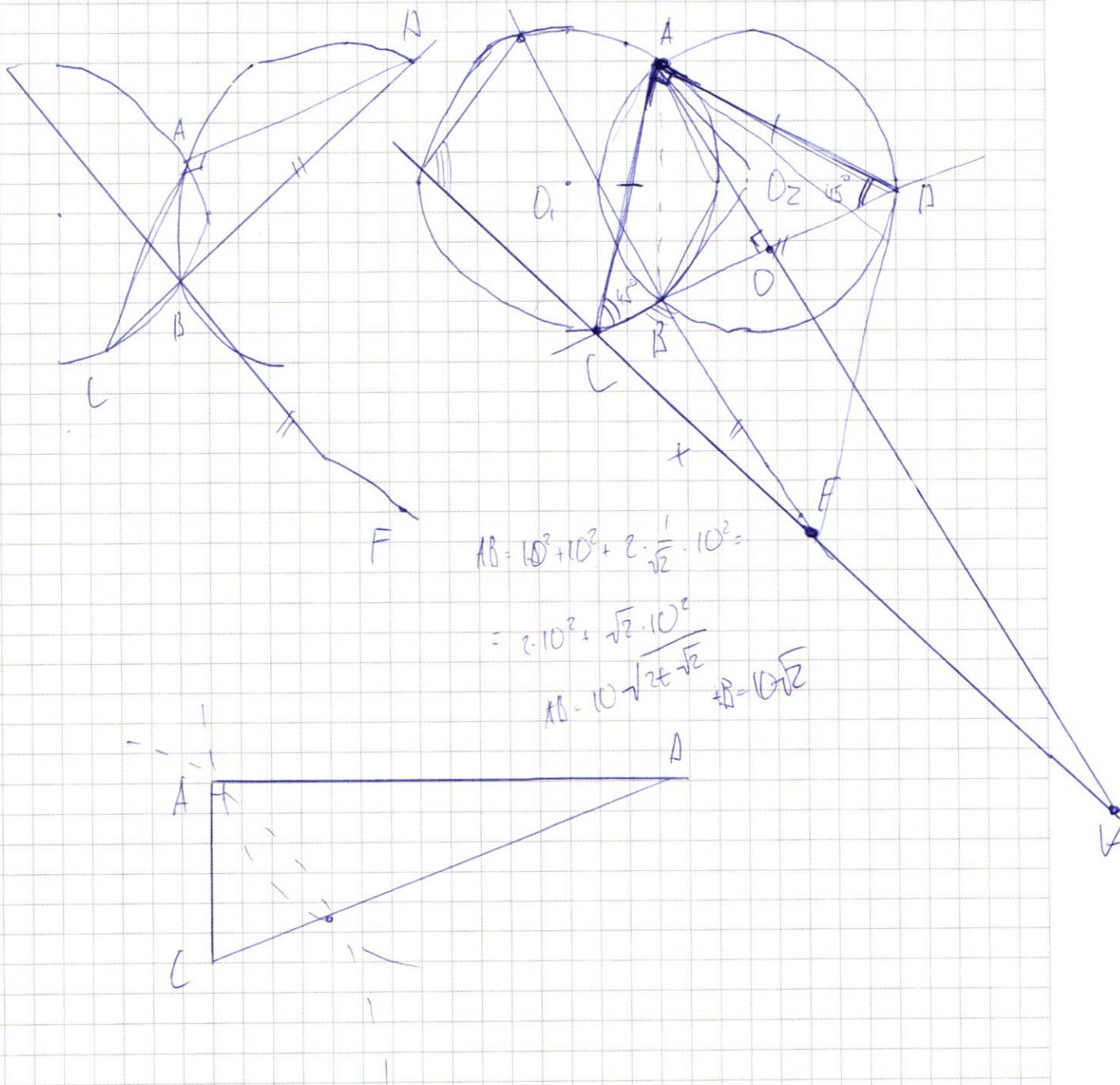
$$514$$

$$b = 514$$

$$(49, 514)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16



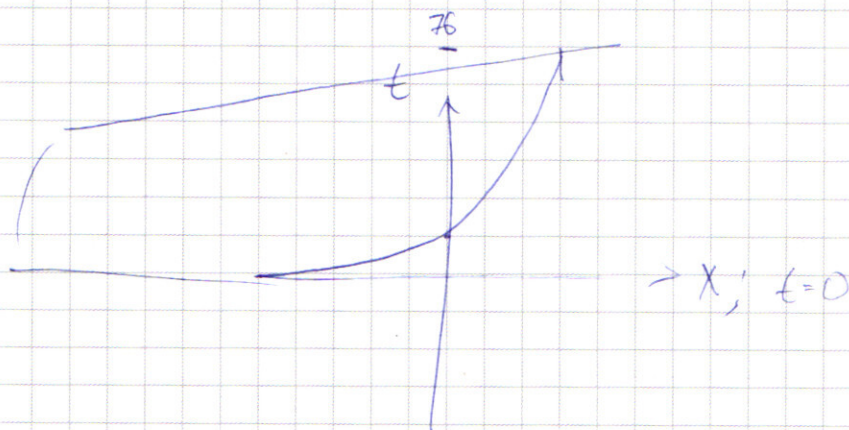
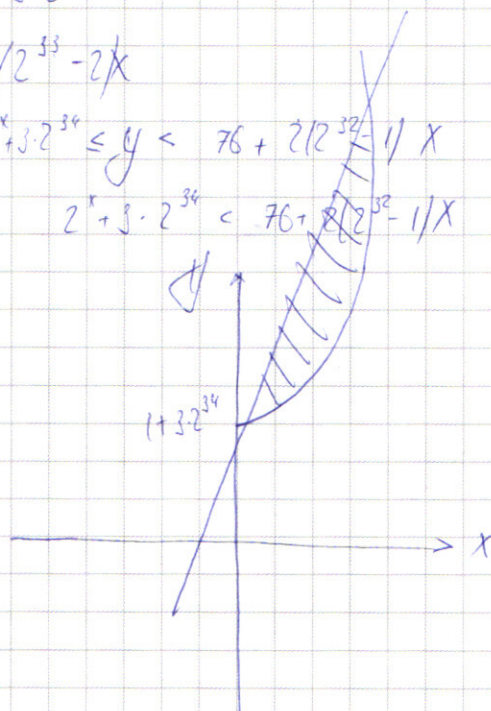
U7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)/x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2^{33} - 2/x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32} - 1)/x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)/x$$



$$(2^{16} - 1)/(2^{16} + 1) x + 76$$

$$3 \cdot 2^{34}$$

$$y = 3 \cdot 2^{34}$$

$$2(2^{32} - 1)/x + 76 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\begin{cases} \frac{2^{32} - 1}{3 \cdot 2^{33}} x + 76 > t \\ 2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq t \end{cases}$$

$$t = y + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} x + 76 > t \\ 2^x \leq t \end{cases}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)