

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задания 1.

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Плюс каждая цифра может быть равна или 1, или 3, или 7, или $9^2 = 9$. Значит, цифра 9 может встретиться не более 1 раз, т.к. если больше 9 цифр не хватит.

Суммарно: много потребляющих чисел с учетом: 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1.

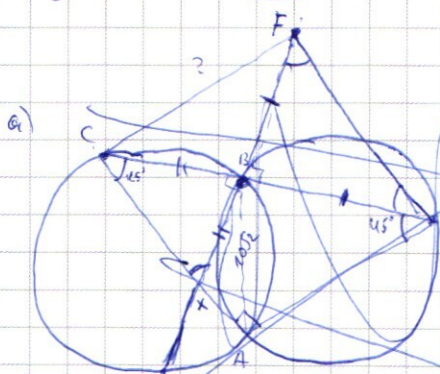
$$C_3 \cdot C_5 \cdot C_2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{6} + \frac{4 \cdot 5}{2} + 2 = 56 + 10 + 2 = 68$$

Teil 9: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1.

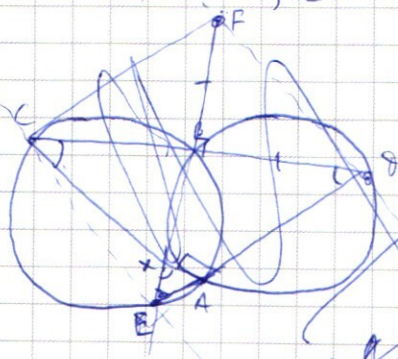
$$C_8^3 + C_8^2 + C_8^1 = 56 + 28 + 8 = 92$$

$$1420 + 560 = 1680.$$

Problem: 1680



$\angle FAD = 45^\circ$; $\angle F = \angle D = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$



Задание 6.

~~Синтетический полимер, содержащий молекулы дим. АВ~~

Значит вертикальный радиус $\rightarrow \angle A'B = \angle AOB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

$$\Rightarrow C(x) = 180 - 45x + 9x^2$$

$A \cap B \subseteq B \Rightarrow \Delta(B) \times \omega \subseteq B \cap \Omega.$

$$10 \sin 45^\circ = \frac{AB}{2 \sin 45^\circ} \Rightarrow 10 \cdot AB = 10 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

~~3. 2. 2020~~

~~Übung 1~~ FB gg E - A (opp. Geraden) $\angle BAC = \angle BEA = 45^\circ$ i. A.

~~См. приложение~~ к справке на равные доли. П. 2а

$$\angle XEA = \angle BCA = \frac{1}{2} \angle APB, \angle EXA = \angle CPB = 180 - 135 = 45^\circ \Rightarrow \angle XAE = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A Bogen von E liegen in AB

Задача 2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0;$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0;$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0;$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0;$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0;$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0;$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0;$$

$$(1) \cos 2x - \sin 2x = 0; \sin 2x = \cos 7x; 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{5}\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi n; x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi n; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 3.

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{x^{2\ln x}} \cdot \frac{1}{y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{x^{2\ln x}} \Rightarrow \frac{y^{\ln y}}{x^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{x^{2\ln x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^{2\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \Rightarrow \ln \left(\frac{y}{x}\right)^{2\ln x} = \ln(y)^{\ln \frac{y}{x^2}} \quad (y, x > 0) \Rightarrow 2 \cdot \ln x \cdot \ln \frac{y}{x} = \ln y \cdot \ln \frac{y}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{x} (2\ln x - \ln y) = 0 \Rightarrow \ln \frac{y}{x} (\ln x^2 - \ln y) = 0 \Rightarrow \ln \frac{y}{x} \ln \frac{x^2}{y} = 0.$$

$$\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 0 & y = x \\ \ln \frac{x^2}{y} = 0 & y = x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \\ y = -x + 4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = -x + 4 \\ y = x^2 \\ y = 2x \\ y = -x + 4 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ y = 4 \\ y = x^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ y = x^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = -x + 4 \end{cases}$

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right).$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 0 \end{cases}$$

(1) $A: x+y+5+y-x+5=10; y=0.$

$B: -x-y-5+y-x+5=10; y=-10.$

$C: x+y+5-y+x-5=10; x=5.$

$D: -x-y-5+y-x+5=10; x=-5.$

(2) Попр-е окр-са $C(12;5)$ и $r=5$, см.

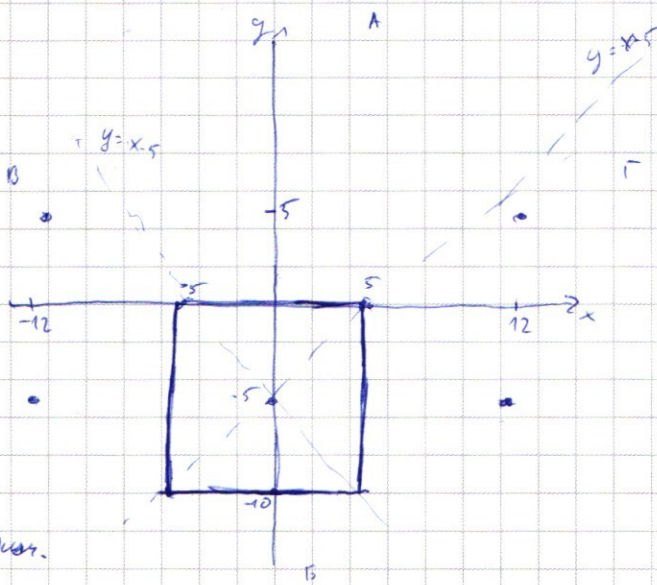
также 3 симметричных центра: O_x, O_y , и т.д.

Итого.

~~См. рис. 1~~

$$\begin{cases} S_1 = 40 \\ S_2 = 289 + 225 = 514 \end{cases}$$

~ 2 миллиарда



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $9261 = 21^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$1/3/7/9$

$9! = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$

$C_8^3 + C_5^3 + C_2^1 =$

$\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} + \frac{4 \cdot 5}{2} + 2 = 56 + 10 + 2 = 68$

$3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$

$C_8^3 + C_5^3 = \dots = 66$

$68 + 66 = 134$

$$\begin{array}{r} 441 \\ \times 21 \\ \hline 441 \\ 882 \\ \hline 9261 \end{array}$$



$(-\frac{3}{4}\pi; \frac{1}{4}\pi)$

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0$

$\cos 5x (\cos 4x - 1) + \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 5x (\sin 4x - 1) + \sin 5x (\cos 4x - 1) + \cos 5x \cos 4x = 0$

$\cos 5x (\sin 4x - 1) + \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 5x (\cos 4x - 1) + \sin 5x (\cos 4x - 1) + \cos 5x \cos 4x = 0$

$\sin 5x (\cos 4x - 1) + \cos 5x (\cos 4x - 1)$

$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x = 0$

$\cos 5x (\sin 4x - 1) + \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x) (\sin 4x - 1) + \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = 0$

$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x \geq 0 \\ \cos 4x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 5x \geq \sin 5x \\ \cos 4x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x \in (-\frac{3}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi) + 2\pi n \\ 4x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) + 2\pi n \end{cases}$

$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) + (1 - \sin 4x) (\sin 5x - \cos 5x) = 0$

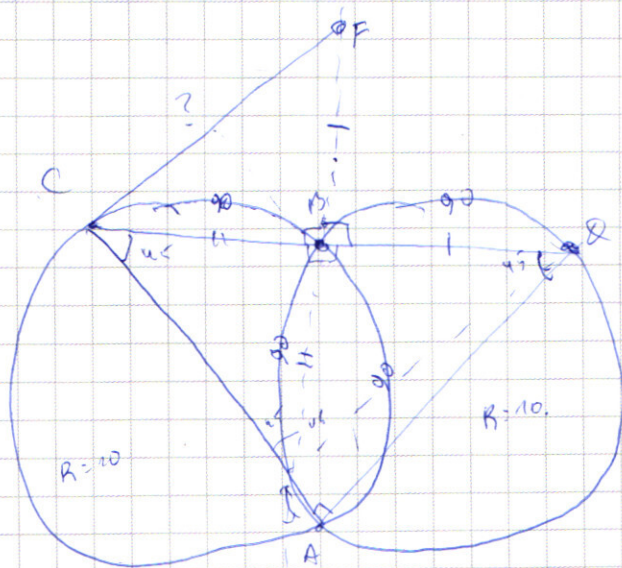
$(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) \cos 4x = (1 - \sin 4x) (\sin 5x - \cos 5x)$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2^{33}x \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq \overbrace{100 \dots 00}^x + \overbrace{1100 \dots 00}^{34} \\ y < 100 \dots 100 + \overbrace{111 \dots 110}^{34} \cdot x \end{cases} \\ & \begin{cases} y \geq 2^{34} (2^{x-34} + 3) \\ y < \end{cases} \end{aligned}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 64$$

$$\begin{aligned} & (x^2 y^4)^{-\ln x} = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \quad (\ln y - \ln x^2) = \frac{y}{y \ln x^2} = \left(\frac{2}{xy^2}\right)^{-\ln x} \\ & \begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \\ y^2 - 4y + 4 - 2(x^2 - 4x + 4) - 4 + 8 - x^2 = 0; \\ (y-2)^2 - 2(x-2)^2 = x - y - 4. \end{cases} \end{aligned}$$



$\cup (B, PQ)$

$\cup (B, PQ) = \emptyset$

$\cap (B, PQ) = \emptyset \dots PQ$

$\dots = A$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin(7x+2x) + \sin(7x-2x) = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x + \sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\cos(7x+2x) - \cos(7x-2x) = (\cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x) - (\cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x) = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0;$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0;$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0;$$

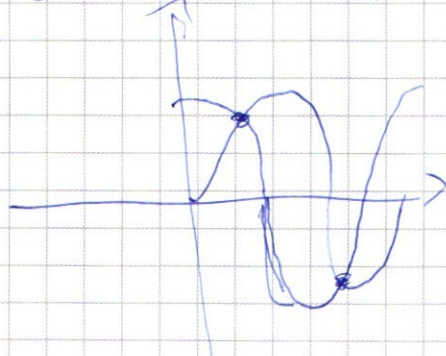
$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0.$$

$$\cos 2x = 1.$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0; \quad 2 (\sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x);$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}); \quad \sin 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2}) + \cos 2x (2 \sin 5x - \sqrt{2}) = 0;$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$



$$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi n \end{cases}$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0;$$

$$\sin(4.5x - \frac{\pi}{8}) \cos(4.5x + \frac{\pi}{8}) = 0; \quad 4.5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$2.25x - \frac{\pi}{8} = \pi n; \quad x = \frac{2}{5} \pi n + \frac{\pi}{20}; \quad x = \frac{1}{15} \pi + \frac{2}{3} \pi n$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} = 2 \cos \frac{5\pi}{10} \sin \frac{3\pi}{10}$$

$$\sqrt{2}$$

$$\sin \frac{4\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = (\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}) (\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{5})$$

$$(\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2})^2 - (\sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2})^2$$

$$|y+x+5|+|y-x+5|=10$$

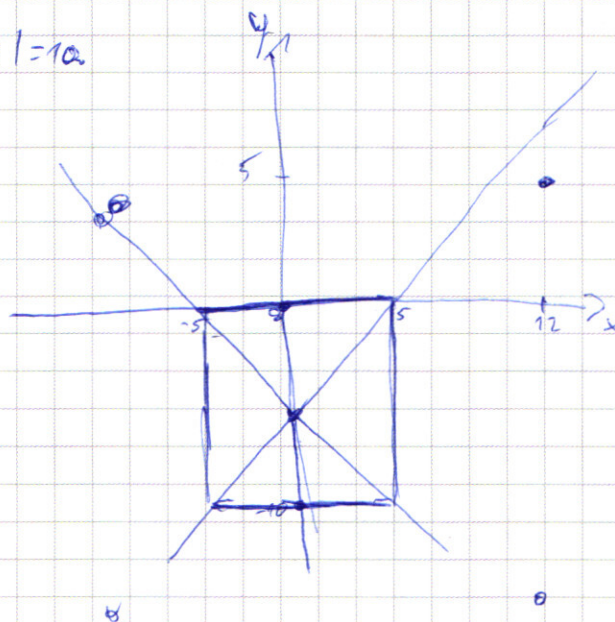
$$1) 2y = 0.$$

$$2) -2y = 20;$$

$$y = -10.$$

$$3) y+x+5-y+x-5=10;$$

$$2x = 10$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

