

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- 1) $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Значит, число может содержать цифры 1, 3, 7, $9 = 3 \cdot 3$, иначе невозможно будет получить 9261. Заметим, что "9" может быть не больше одной, иначе 9^n при $n \geq 2$ не меньше 3^4 (невозможно получить 9261, которое делится максимум на 3^3). Если "9" одна: поставим её на одно из 8 позиций, затем поставим "3", 3 "7", а остальное приходится на "1", то есть количество способов — $8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 1120$. Если "9" нет: поставим 3 "3", затем 3 "7", а остальное приходится на "1", то есть способов $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 560$. Всего таких чисел $1120 + 560 = 1680$.
Ответ: 1680

- 2) $\cos 9x + \sin 9x - (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 4x$
 $\sqrt{2}(\cos 9x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 9x \sin \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}(\cos 5x \cos \frac{\pi}{4} - \sin 5x \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$
 $\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$
 $\Rightarrow 2 \sin 7x \sin \frac{\pi}{4} = 0$ Пусть $4x = a$, $5x + \frac{\pi}{4} = b$.
 $\cos(a + b - \frac{\pi}{2}) - \cos b = \cos a \Leftrightarrow \sin(a + b) = \cos a + \cos b \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin a \cos b - \cos b + \sin b \cos a - \cos a = 0 \Leftrightarrow \cos b(\sin a - 1) + \cos a(\sin b - 1) = 0$
 Если $\cos b \geq 0$ и $\cos a \geq 0$, то $\begin{cases} \sin a = 1 \\ \sin b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{3} \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1): обе части строго положительны, $x, y > 0$. Тогда

$$(1) \Leftrightarrow \ln((x^2 y^4)^{-\ln x}) = \ln(y^{\ln(y/x^2)}) \Leftrightarrow -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln y \cdot \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y (\ln y - 2 \ln x). \text{ Пусть } \ln x = a, \ln y = b$$

$$-a(2a + 4b) = b(b - 2a) \Leftrightarrow -2a^2 - 4ab = b^2 - 2ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 3ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(2a - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a = b \end{cases} \begin{cases} \ln x = \ln y \\ \ln x^2 = \ln y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases}$$

Если $x = y$, то, подставив во (2) $y = x$, получим:

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = -2x^2 + 4x = 0. \quad x > 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Если $y = x^2$, то аналогично:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad (x > 0)$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x^2 + x - 4) = 0. \quad x = 2 - \text{учтено в 1 случае.}$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{16 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2, 2), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

$$\boxed{5} \quad |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \geq 0 \quad (2)$$

Раскроем модули в (1): $(1) \Leftrightarrow$

Уравнение (2) — 4 окружности

или их части, не выходящие

за пределы четвертей, в которых они находятся (центры в точках $(12, 5), (12, -5), (-12, -5), (-12, 5)$, радиус $\sqrt{a}$).

Попробуем увеличивать радиус окружностей. Так как расстояние до сторон квадрата от центров "нижних" окружностей равно

$$\begin{cases} y = 0 & \text{при } y \geq -x-5, y \geq x-5 \\ x = 5 & \text{при } y \geq -x-5, y < x-5 \\ y = -10 & \text{при } y < -x-5, y < x-5 \\ x = -5 & \text{при } y < -x-5, y \geq x-5 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7, пока $\sqrt{a} < 7$,

решений нет.

При $a=49$ квадрат
и окружности

имеют 2 общие

точки. Увеличивая

радиус, мы полу-

чим 4 решения:

либо дважды пере-

сечение прямых $x=\pm 5$, либо пересечение один раз $x=5$, $x=-5$ и дважды $y=0$, до тех пор пока $\sqrt{a} \neq \sqrt{5^2+12^2}=13$. Если $a=169$, то решения 2 — $(0;0)$ и $(0;-10)$. Увеличивая радиус, пересечений не будет.

Ответ: $a=49; 169$

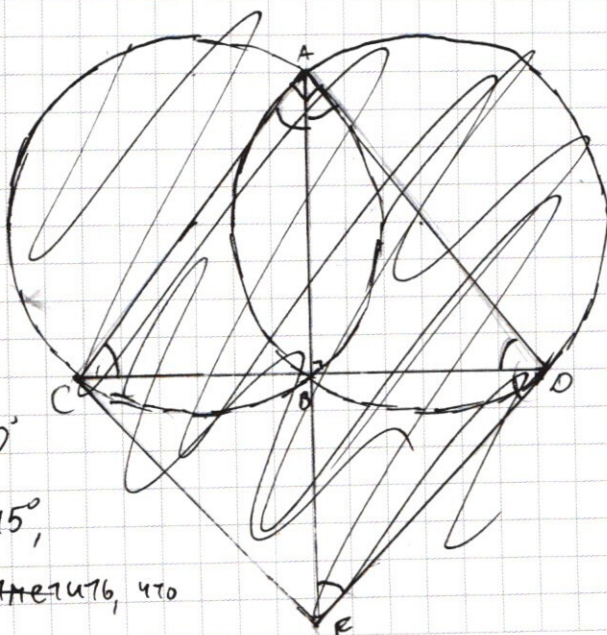
6) Заметим, что $\angle ADB = \angle AEC$, так как в равных окружностях опираются на одну и ту же хорду AB .

$\Rightarrow \angle ADB = \angle AEC = 45^\circ$, из $\triangle ACD$, где $\angle A = 90^\circ$. Но $\angle CDB =$

$\angle CDB = 45^\circ$ из $\triangle BDF \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$

Тогда в $\triangle ABD$ ($\angle B = 90^\circ$) $\angle BAD = 45^\circ$,

в $\triangle ABC$ $\angle CAB = 45^\circ$. ~~и~~ ~~то~~ отметить, что



данная ситуация реализуется: прямая BF содержит точку A ,
 так как $ACFD$ - фигура с 2^{ми} прямыми углами, около которой
 можно описать окружность ($\angle ACD = \angle$

Пусть $AC = AD = a$, $AM = b$, где

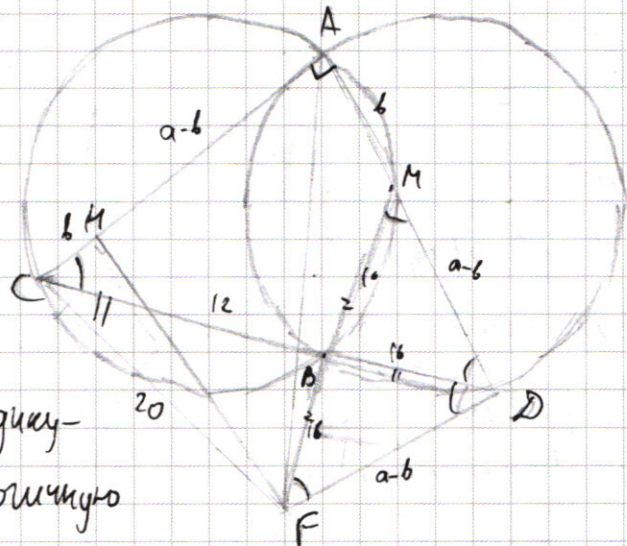
CM - диаметр Пути $FH \perp CA$.

$FH = AD = a$, $AM = FD = MD =$

$= a - b \Rightarrow CH = b$. $CF =$

$= \sqrt{a^2 + b^2} = CM = 2R = 20$. Если

$\angle F < 90^\circ$, то опускаем перпендику-
 ляр из C и получаем аналогичную
 ситуацию.



б) $BF = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 = BD$ (BD - биссектриса в равнобедренном $\triangle FDM$).

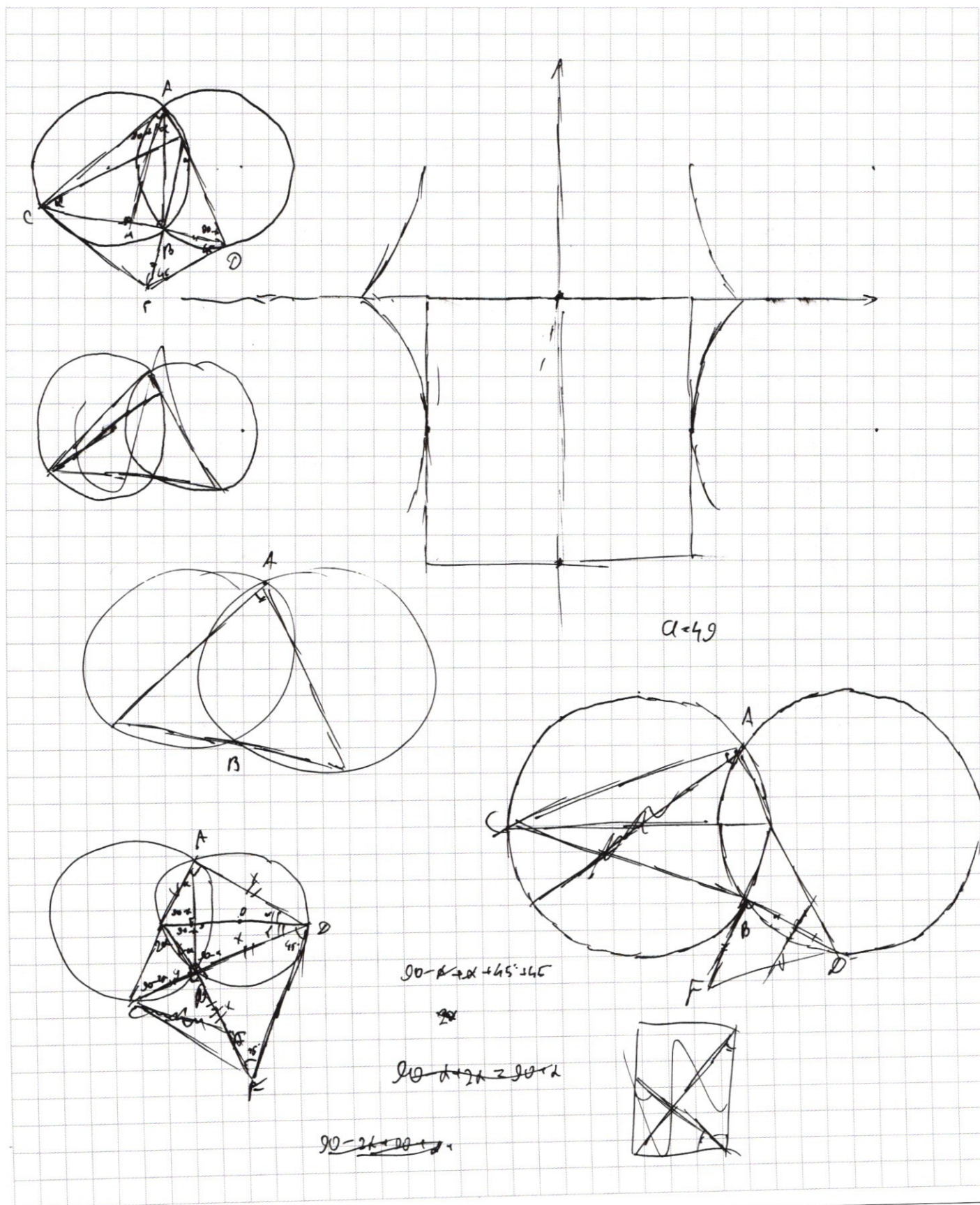
$CD = 12 + 16 = 28 \Rightarrow AC = AD = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$. $\angle ACF = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{4}{5}$

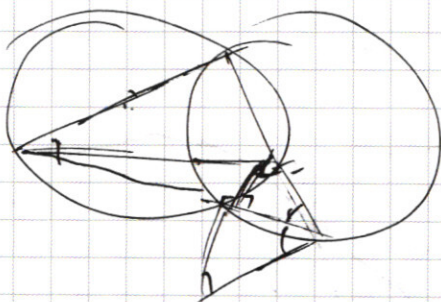
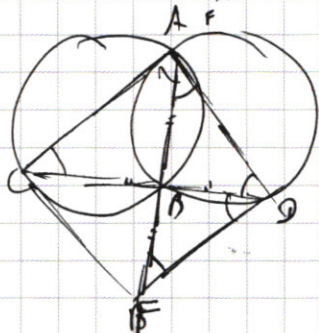
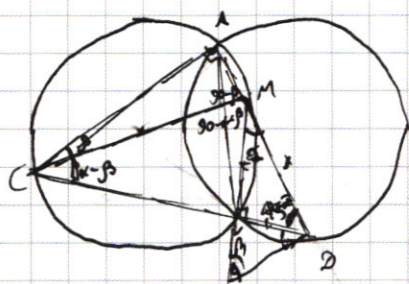
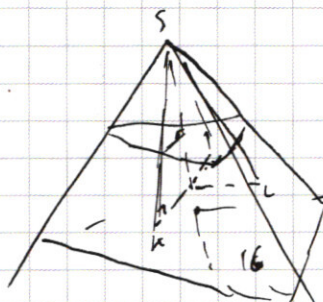
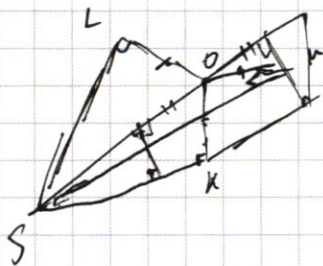
$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{4}{5} \right) =$

$= 140\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} \right) = 140 \cdot \frac{7}{5} = 196$

Ответ: а) 20; б) 196

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



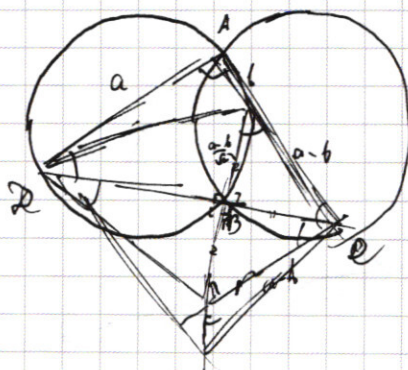
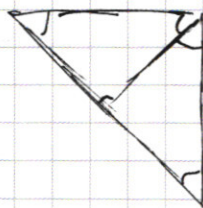
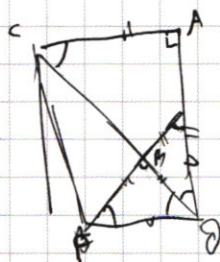


$$\frac{MD}{CD} = \frac{BD}{AD} = \frac{MB}{AC}$$

$$AC^2 + AM^2 = 400$$

$$BC^2 + BM^2 = 400$$

$$AM = MD - MP$$



$$\sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) =$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$-\sin(a+b) - \cos b = \cos a$$

$$\cos(a+b - \frac{\pi}{2}) = \cos a = \cos b$$

$$\sin(a+b) = \cos a + \cos b$$

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3 \cdot 3087 = 3 \cdot 3 \cdot 1023 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 343 =$$

$$7^3 =$$

$$= 3^3 \cdot 7^3$$

$$1, 3, 7, 9$$

$$\text{если } 9: 8 \cdot 7 \cdot C_6^3$$

если нет:

$$C_8^3 \cdot C_5^3$$

$$\frac{8 \cdot 5 \cdot 4}{6}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6}$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 9x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 9x \right) + \sqrt{2}$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x = \cos 4x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = \cos 4x$$

$$\cos 9x = \cos 5x + \cos 4x$$

$$2 \cos \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} = \cos 9x$$

$$2 \sqrt{\frac{1+\cos 4x}{2}}$$

$$\frac{9x - \frac{\pi}{4} - 5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

$$\cos \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x + \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 - \frac{\cos 5x - \cos 9x}{2}$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{-28} \\ 29 \overline{) 3} \\ \underline{-21} \\ 8 \overline{) 3} \\ \underline{-6} \\ 2 \overline{) 3} \\ \underline{-6} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 441 \overline{) 21} \\ \underline{-42} \\ 21 \overline{) 61} \\ \underline{-42} \\ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1120 \overline{) 560} \\ \underline{-560} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 56} \\ \underline{-56} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{6 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8}$$

$$A(1-B) + B-1$$

$$A+B-AB-1 = (A-1)(1-B)$$

$$2 \cos \frac{5x}{2} - 1 = \cos x$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

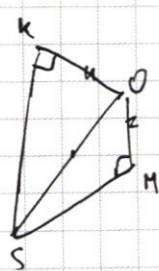
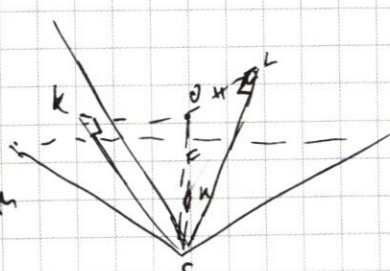
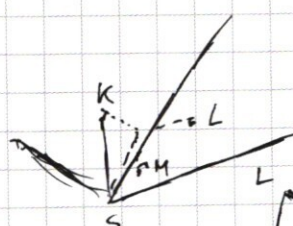
$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a+b)$$

$$-1 - \sin a \sin b = (\cos a - 1)(1 - \cos b)$$

$$\begin{cases} \cos 5x = 1 \\ \cos 4x = 1 \end{cases}$$

$$\sin 5x \sin 4x = -1$$

$$\sin 4x = -1$$



$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(\sqrt{2}y - \frac{1}{\sqrt{2}}x)^2 - 2y^2 - 2x^2 + 2\sqrt{2}xy$$

$$y^2 - 4y + 4 - 2x^2 + 8x - 8 = xy + 1^2$$

$$2y^2 - xy + \frac{1}{8}x^2 - y^2 - 4y - 4 + 4 - 2x^2$$

$$(xy)^{-\ln x^2} = y^{\ln \frac{y}{x}} \quad x+y+5 \geq 0$$

$$x^{-\ln x^2} \cdot y^{-\ln x^2} = y^{\ln y - \ln x^2} \quad y \geq -x - 5$$

$$x^{-\ln x^2} = y^{\ln y - \ln x^2 + \ln x^2} \quad y \geq x - 5$$

$$-\ln x \cdot \ln x^2 y^2 = \ln \frac{y}{x^2} \cdot \ln y \quad x+y+5 > 0$$

$$-\ln x \cdot (2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 2\ln x) \cdot \ln y \quad y+y+5 > 0$$

$$-a(2a+4b) = (b-2a) \cdot b$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 2ab$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$(a-b)(2a-b) = 2a^2 - 2ab - ab + b^2$$

$$x^4 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2$$

$$x+y+5 = y+x+5$$

$$x = 5$$

$$y^4 - x^4 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^2 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x^4 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x^2+x-4)$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$1 - 4 \cdot (-4)$$

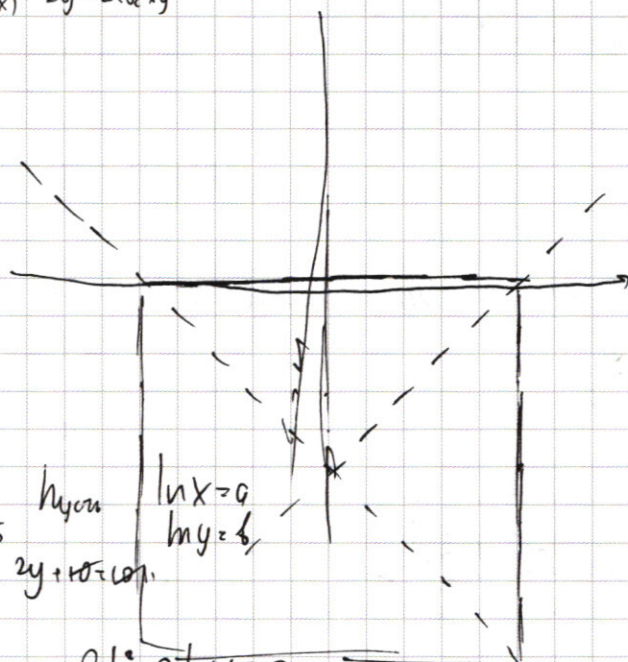
$$(\sqrt{17} - 1)^2 = 17 + 1 - 2\sqrt{17}$$

$$-2x^2 + x^2$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \quad | \quad x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -x^2 - 6x \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -4x + 8 \end{array}$$

$$x - y - 5 + y + x - 5$$

$$-2y - 10 = 10$$



$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$t = \frac{3 \pm 1}{4} = 1$$

$$t = \frac{2 \pm 1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$2a = b$$

$$\frac{2t}{t^2} = \frac{3}{2} + 1$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = 1$$

$$\ln x = \ln y$$

$$\ln x = \ln$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

