

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Разложим заданное число на простые множители:

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3, \text{ т.к. это произведение цифр в числе, то}$$

они должны быть меньше 10 $\Rightarrow$

Получается 2 набора цифр:

$$1) 3, 9, 7, 7, 7, 1, 1, 1$$

и

$$2) 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1$$

1) Рассмотрим кол-во таких чисел из первого набора

Расставим семёрки по местам или наоборот в каком

порядке они будут стоять $\Rightarrow$ вариантов C_8^3

Для единиц аналогично, но свободных мест уже 5

$\Rightarrow$ вариантов C_5^3

Для трех $C_2^1 \Rightarrow$ две десятка - C_1^1

$\Rightarrow$ Всего вариантов $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$ (по правилу произведения)

2) Для второго набора аналогично:

Для семёрок - C_8^3 ; Для трех - C_5^3 ; Для единиц - C_2^2

Суммируем все варианты (пересечений нет, т.к. наборы различны и дискретны)

$$C_8^3 \cdot C_5^3 (C_2^1 \cdot C_1^1 - C_2^2) = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} (2+1) =$$

$$= \frac{8! \cdot 3}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 = 1680 \text{ - кол-во чисел}$$

Ответ: ~~1680~~ 1680

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ ((x-12)^2 + (y-5)^2 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое равенство:

$$1) \quad x+y+5 \geq 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 \geq 0$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$2y = 0$$

$$(y=0) \Rightarrow x \geq -5 \quad \text{и} \quad x \leq 5$$

$$2) \quad x+y+5 \geq 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 < 0$$

$$x+y+5 - (y-x+5) = 10$$

$$2x = 10$$

$$(x=5) \Rightarrow y \geq -10 \quad \text{и} \quad y < 0$$

$$3) \quad x+y+5 < 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 \geq 0$$

$$-(x+y+5) + (y-x+5) = 10$$

$$-2x = 10$$

$$(x=-5) \Rightarrow y \geq -10 \quad \text{и} \quad y < 0$$

$$4) \quad x+y+5 < 0 \quad \text{и} \quad y-x+5 < 0$$

$$-(x+y+5) - (y-x+5) = 10$$

$$-2y = 20$$

$$(y=-10) \Rightarrow x \leq 5 \quad \text{и} \quad x > -5$$

Рассмотрим второе равенство:

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 0, \quad \text{при} \quad x \geq 0, y \geq 0$$

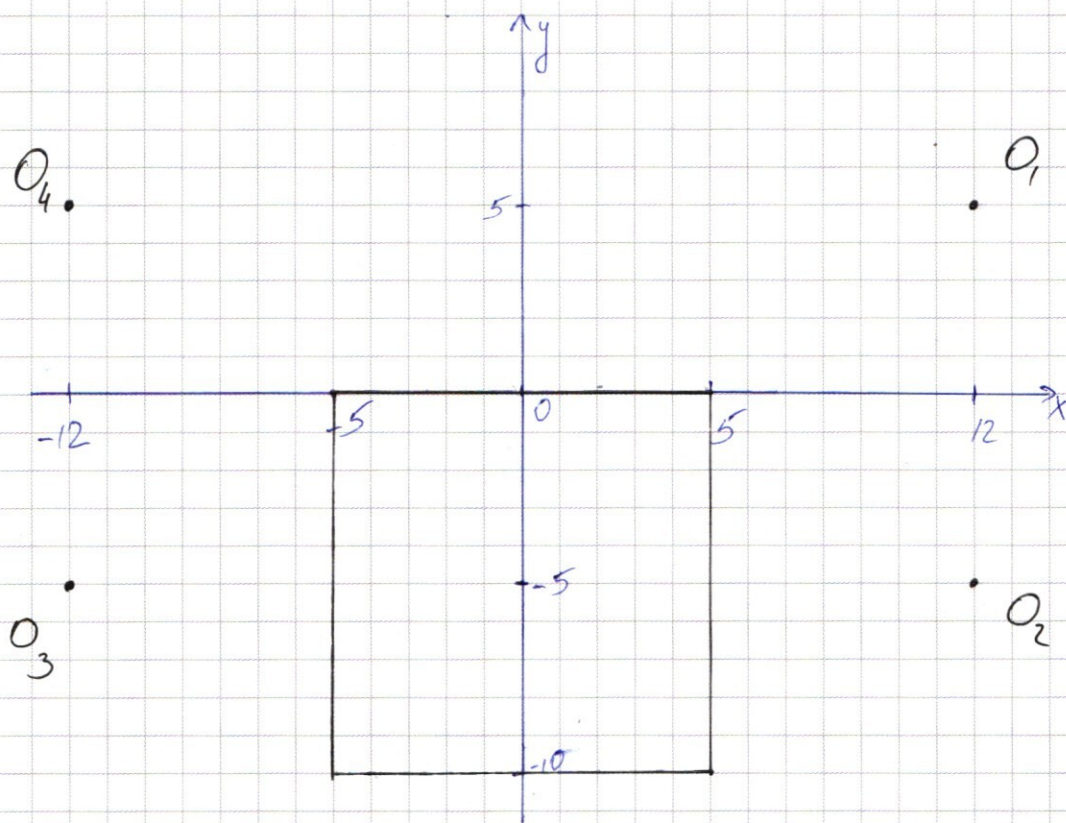
$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 0, \quad \text{при} \quad x < 0, y \geq 0$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = 0, \quad \text{при} \quad x \geq 0, y < 0$$

$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = 0, \quad \text{при} \quad x < 0, y < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Таким образом наметим все на графике:



Из центров, отмеченных точками O_1, O_2, O_3, O_4 , можно нарисовать окружности радиусами $\sqrt{a}$, так, чтобы они имели только 2 общие точки с функцией $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$ (на рисунке это серый прямоугольник)

Важно! Окружности могут быть только в своей четверти.

При $\sqrt{a} < 5$ нет ни одной общей точки

При $\sqrt{a} > 5$ и $a \leq 5^2 + 5^2 - 4$ общие точки

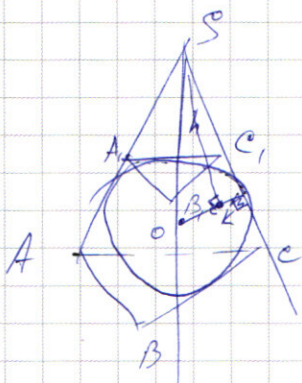
При $\sqrt{a} = 5$ - 2 общие точки

При $a > 5^2 + 5^2$ и $a \leq 13^2$ - 4 общие точки

При $a = 13^2$ - 2 общие точки и при $a > 13^2$ - ни одной общей точки $\Rightarrow a \in [5^2, 13^2]$

Ответ: при $a = 49$ и при $a = 169$

№4



$$A_1 B_1 C_1 S \sim ABCS$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{1} = \frac{(2h)^2}{16}$$

$$1 = \frac{2}{4}$$

$$2 = 4$$

h - высота пирамиды $A_1 B_1 C_1 S$

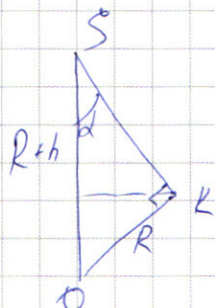
$2h$ - высота пирамиды $ABCS$

$$2h = h + 2R$$

$$2R = 3h$$

$$R = 1,5h$$

$SK = SL = SM$ - т.к. это касательные к сфере



$$\sin \alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{1,5h}{2,5h} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\sin \alpha = 0,6$$

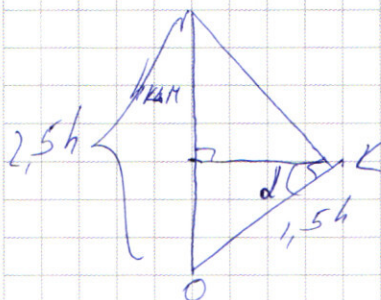
Площадь сечения плоскости KLM не дано, чтобы найти площадь возьмем ~~прямую~~ пирамиду с одинак. боков. ребрами.

Таким образом плоскость KLM параллельна ABC

$$\Rightarrow \text{можно записать подобие: } \frac{(h_{KLM})^2}{S_{KLM}} = \frac{h^2}{1}$$

$$S_{KLM} = \frac{(h_{KLM})^2}{h^2}$$

; h_{KLM} - высота до плоскости KLM , S_{KLM} - площадь сечения пирам. уга плоскостью KLM



$$h_{KLM} = 2,5h - 1,5h \sin \alpha = (2,5 - 0,9)h = 1,6h$$

$$S_{KLM} = (1,6)^2 = 2,56$$

$$\text{Ответ: } \sin(\angle KSO) = 0,6; S_{KLM} = 2,56$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \left(\frac{4}{x^2} \right)} \quad N3$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}}$$

$$1 = \frac{y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}}{y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}}{y^{3\ln x}}$$

$$y = e^{\ln y}$$

$$x = e^{\ln x}$$

$$\ln y = \frac{\log_y y}{\log_y e} = \frac{1}{\log_y e}$$

$$1 = \frac{y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}}{y^{3\ln x}} = e^{(\ln y)^2 - 3\ln y \ln x + 2(\ln x)^2} = e^{2\ln x}$$

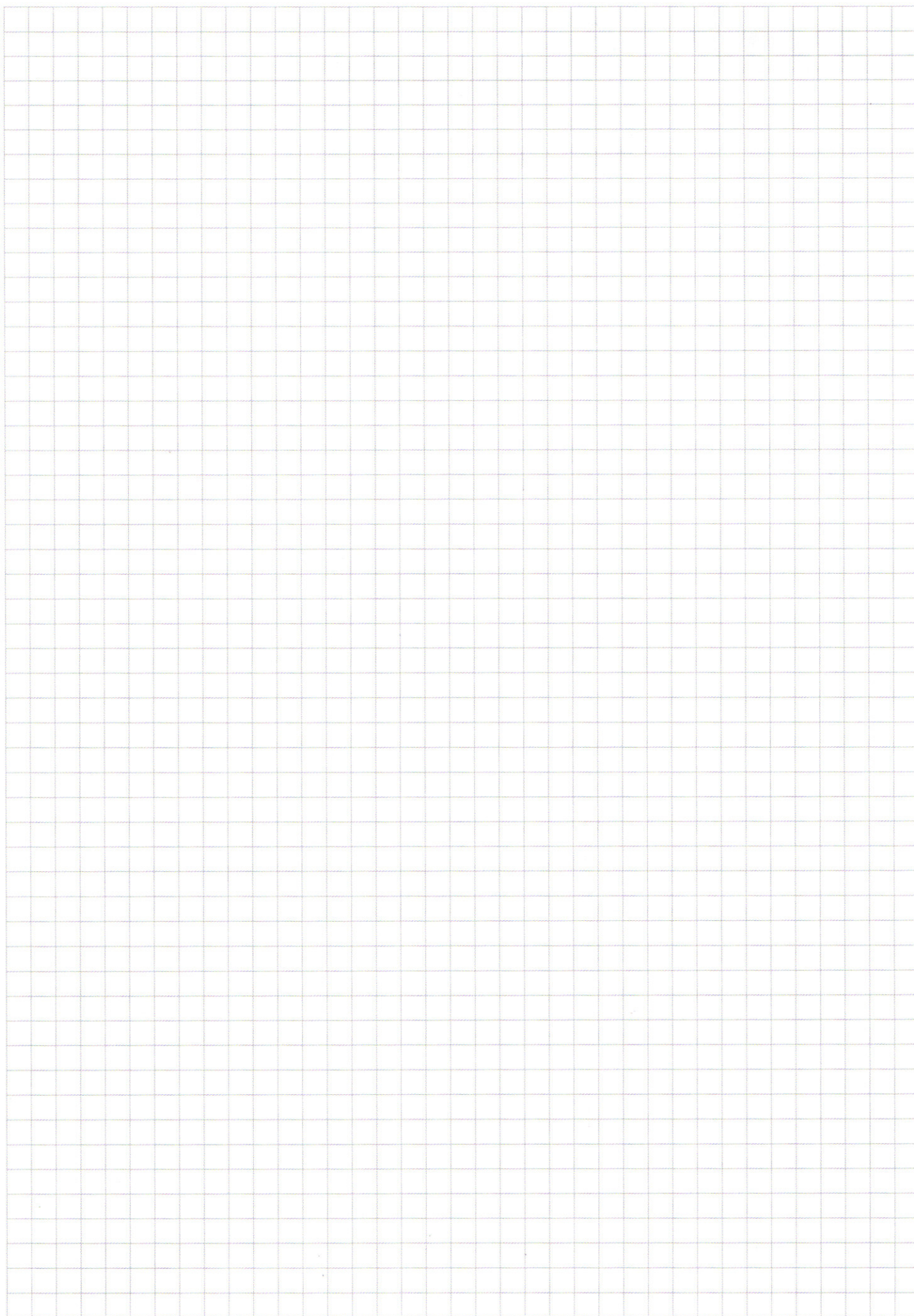
$$= e^{(\ln y - \ln x)(\ln y - 2\ln x)}$$

$$\Rightarrow (\ln y - \ln x)(\ln y - 2\ln x) = \ln 1$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$D = (x+4)^2 - 4(8x - 2x^2) = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+4 \pm \sqrt{9x^2 - 24x + 16}}{2}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 + 5.4 + 6 + 6 =$$

$$2 + 5.3 + 5.4 = 5.7 \quad (35) \quad 28 - 5 = (23)$$

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 343 \cdot 3 = (3^3 \cdot 7^3)$$

$$\begin{array}{r} 9261 \div 9 \\ 9 \overline{) 9261} \\ \underline{9} \\ 26 \\ \underline{27} \\ 81 \\ \underline{81} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \div 3 \\ 3 \overline{) 1029} \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \div 7 \\ 7 \overline{) 343} \\ \underline{28} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 96 \\ 25615 \\ 8 \\ 90 \end{array}$$

$$9(\ln x)^2 - 8(\ln x)^2 = (\ln x)^2$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x + \ln x}{2} = \ln x$$



$$1) \quad (7, 7, 7) < (9, 3, 3, 3)$$

$$\sin(b-a) = \cos b \cos a + \sin b \sin a$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 =$$

$$2) \quad 777, 333, 111$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$10 \cdot 7 = 42$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 + C_8^3 \cdot C_5^3 =$$

$$= C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 3 = \frac{8!}{2! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{7!}{3!} = 1680$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(60^\circ - 30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$\ln y = \ln y$$

$$\cos(a+b) - \cos b + \sqrt{2} \cos a + \sin(a+b) + \sin b = 0$$

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b - \cos b + \sin a \cos b + \sin b \cos a + \sin b = \sqrt{2} \cos a$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$e^{\ln \frac{y}{x^2}} = \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$e^{\ln x^2} = x^2$$

$$x \neq 0$$

$$y \neq 0$$

$$1 = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \cdot y^{2 \ln x^4} \cdot x^{2 \ln x^2}$$

$$1 = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \cdot y^{8 \ln x} \cdot x^{4 \ln x^2}$$

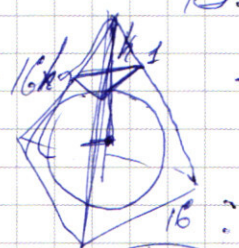
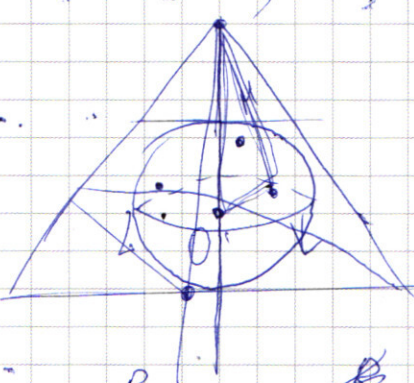
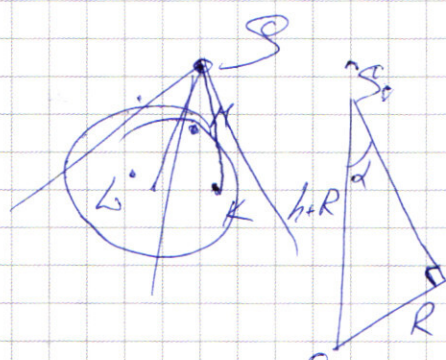
$$y^{\ln y} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - xy + \frac{x^2}{2})$$

$$y^2 - xy - 4y - 2(2x - 1)^2 = -1$$

$$y(y-4) - 2x(x-1) - x^2 = 0$$

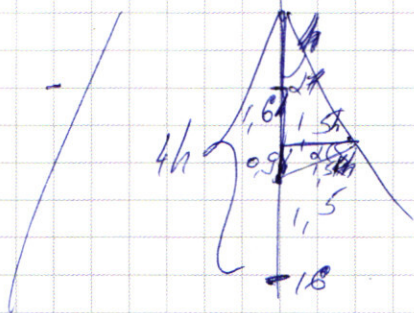


$$2R = 15h$$

$$R = 7,5h$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{h+R} = \frac{7,5}{8,5} = \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$$

$$32x - 2x = 24$$



$$\sin \alpha = \frac{2,5h}{1,5h} = \frac{2,5}{1,5} = \frac{5}{3} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} = 0,6$$

$$\sin \alpha = 0,6 \Rightarrow \alpha = 36,87^\circ$$

$$0,6 \cdot 1,5 = 0,9$$

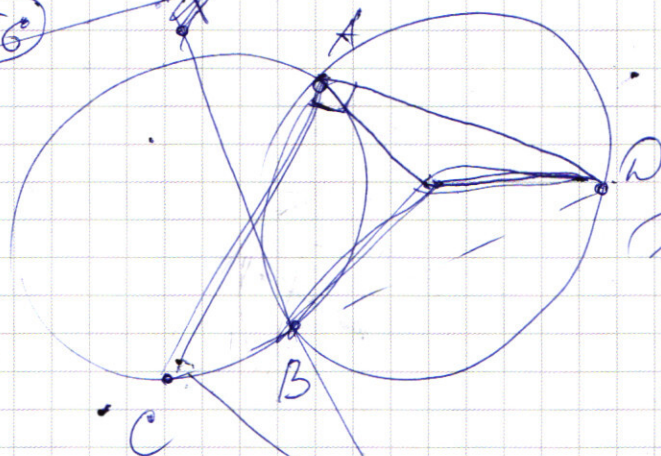
$$24 / 8 = 3$$

$$2,5 - 0,9 = 1,6$$

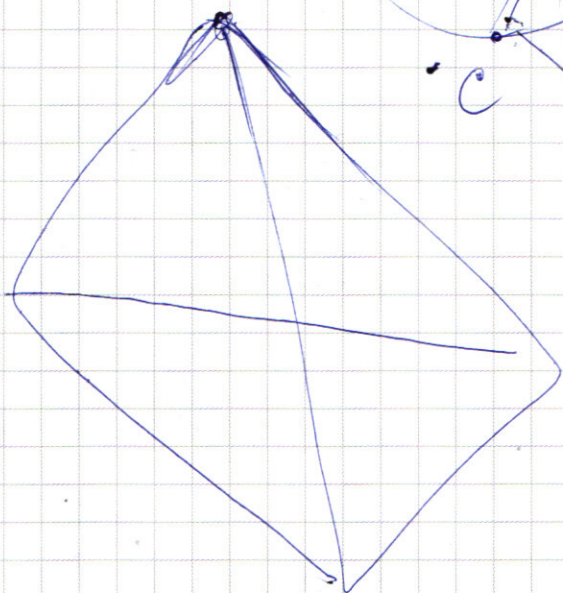
$$3^2 \cdot 8^2 - 9^2 = \frac{1}{h^2} = \frac{5}{(1,6h)^2}$$

$$\frac{3}{1,6} = \frac{15}{8} = 1,875$$

$$3^2 \cdot 8^2 - 9^2 = 2,56$$



$$(14 - 12)^2 = 4$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

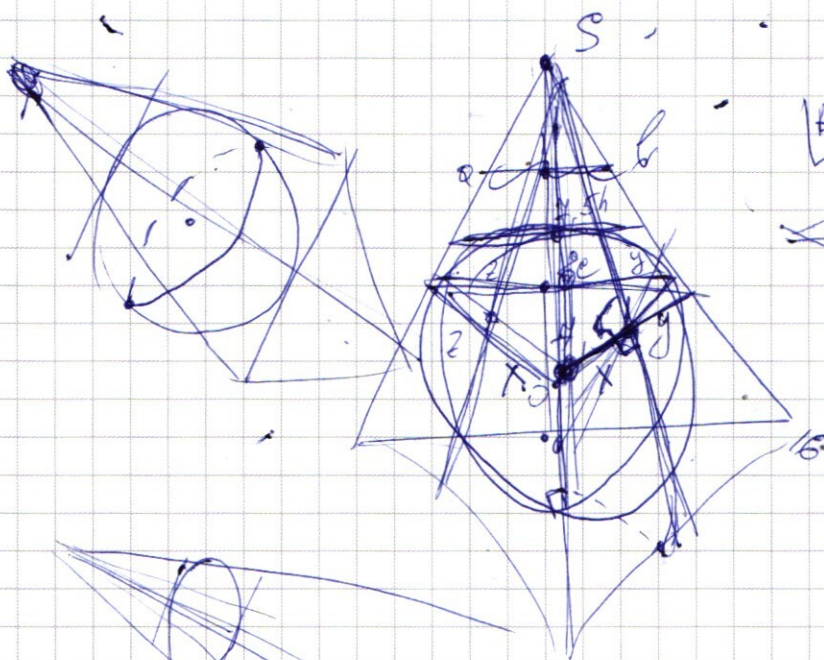
$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) + (-x^2 - xy + 8x - 4y) = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(a+b) - \cos b - \sqrt{2} \cos a + \sin(a+b) + \sin b = 0$$



$$\frac{a}{2} = \frac{c}{x} = \frac{b}{y}$$

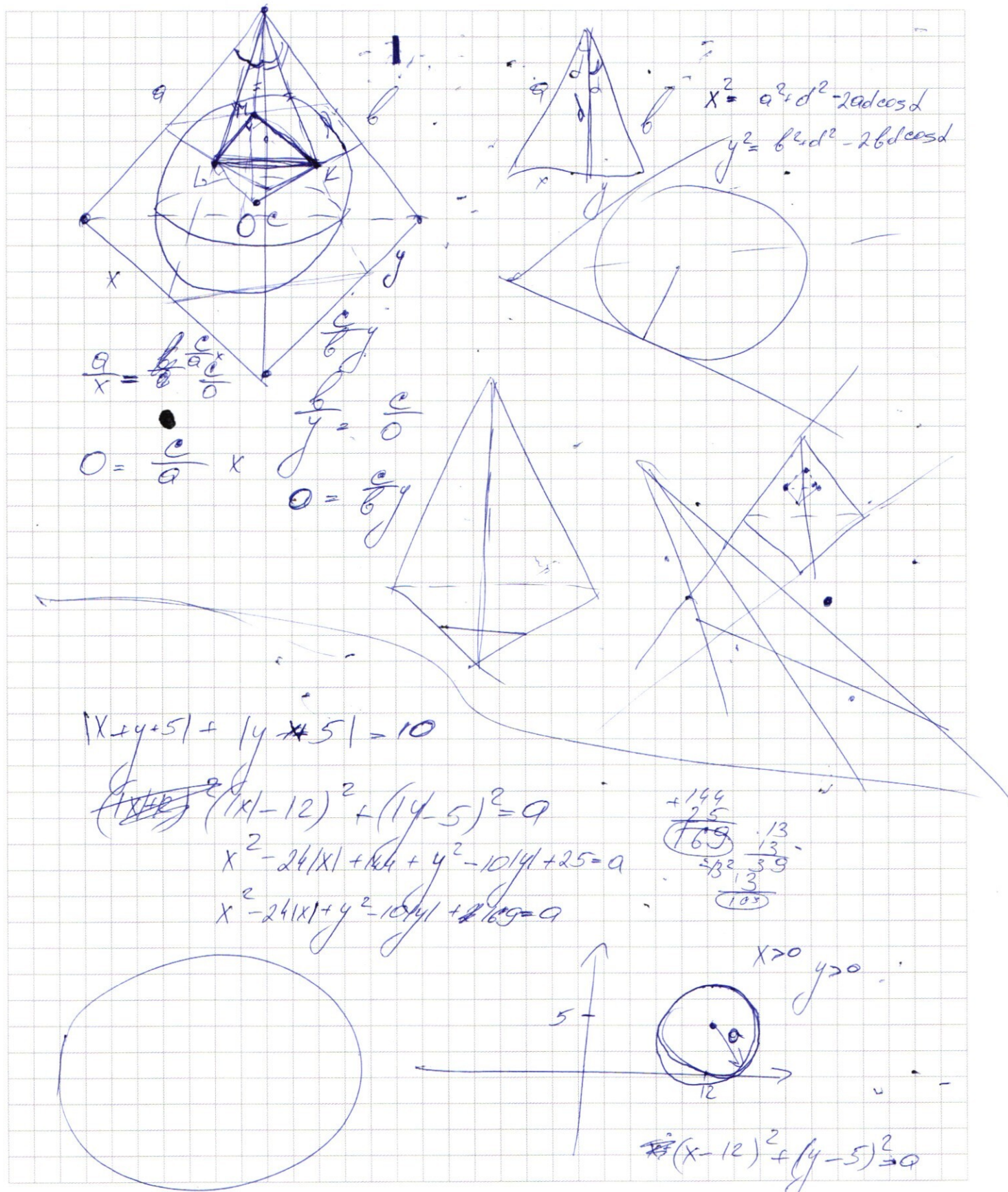
$$y = \frac{b}{c} x$$

$$z = \frac{a}{c} x$$

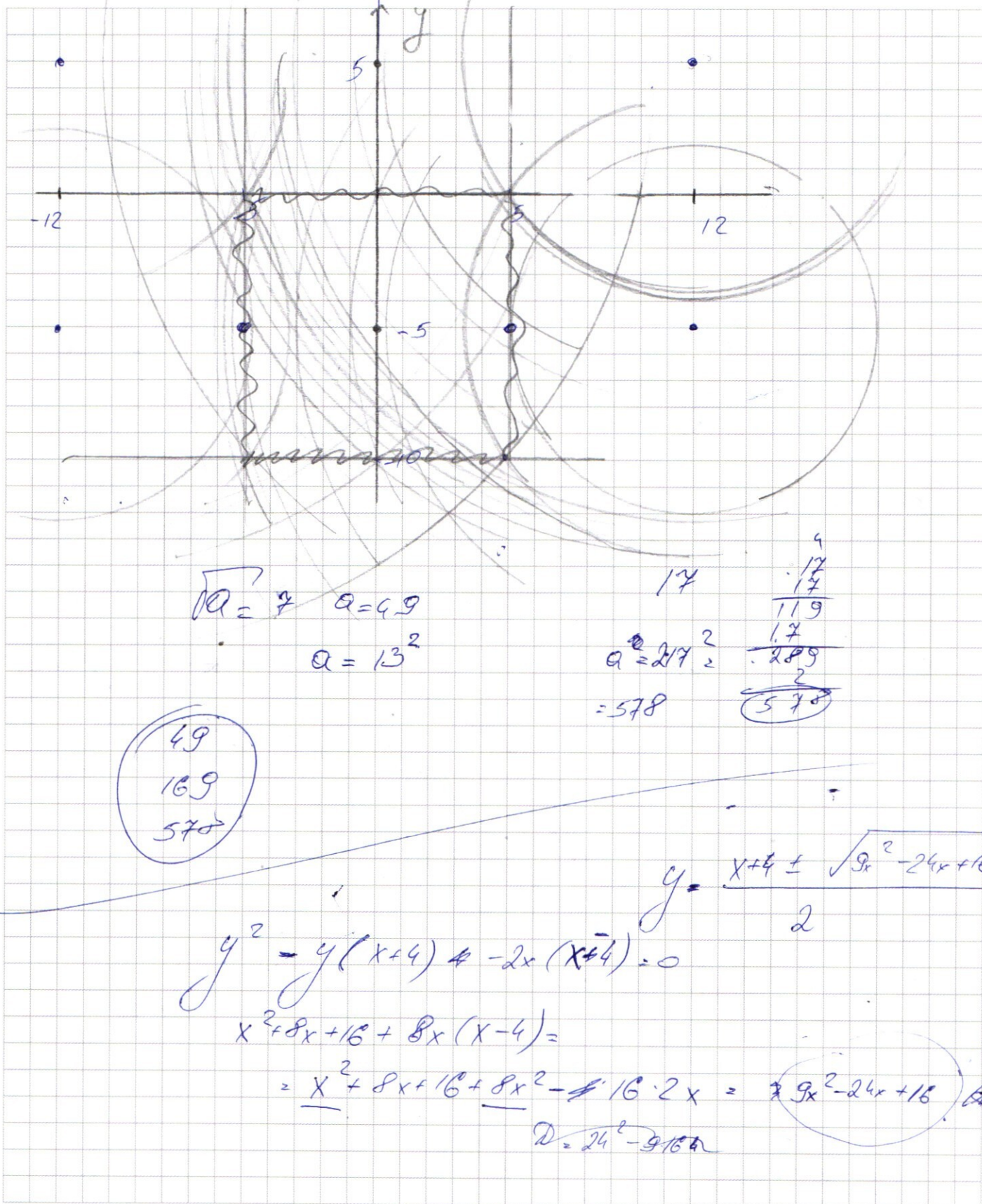
$$\sqrt{8,5^2 - 4,5^2}$$

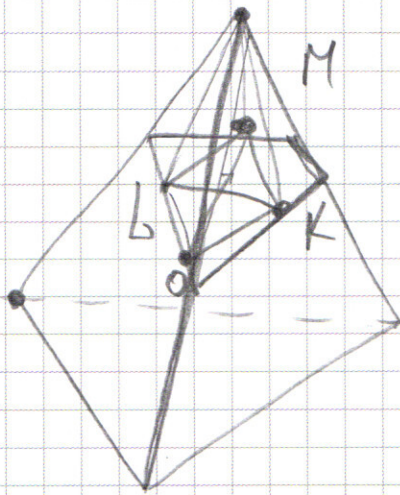
$$\sqrt{8,5^2 - 4,5^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



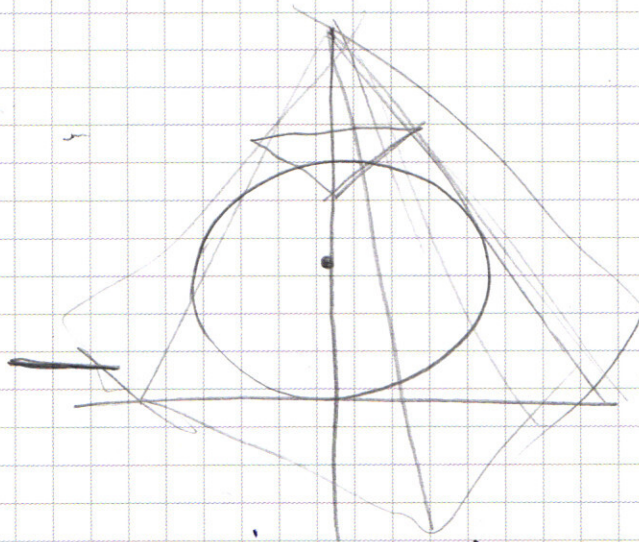


$\sqrt{2} \cos \phi$



$\frac{1}{3} R \cdot S_{\text{основания}}$

$$\frac{1}{3} \cdot 16h \cdot 16 = V$$



$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2^{33} \cdot x - 2x$$

$$a = 4x$$

$$b = 5x$$

$$2(2^{32} - 1)$$

$$4x < 0 < 6$$

$$e^b = y$$

$$e^a = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln x = a$$

$$\ln y = b$$

$$y \geq 3 \cdot 2^{34}$$

$$3 \cdot 2^{34} \leftarrow 76 + 2^{33} \cdot x - 2x$$

$$\frac{1}{(xy)^{\ln x}} = y \ln \frac{y}{x}$$

$$1 = y^{\ln y - \ln x} \cdot x^{2 \ln x - 4 \ln x} = \frac{y^{\ln y} \cdot x^{2 \ln x}}{y^{\ln x} \cdot x^{4 \ln x}}$$

$$1 = \frac{(e^b)^b \cdot (e^a)^{2a}}{(e^b)^{3a}} = \frac{e^{b^2 + 2a^2}}{e^{3ab}} = e^{b^2 + 2a^2 - 3ab}$$

$$b^2 + 3ab + 2a^2 = \ln 1$$

$$\ln y^2 + 3 \ln x \ln y + 2 \ln x^2 = \ln 1$$