МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32}-1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7

Т.к $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, то его можно представить:
$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$ и
$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
Во всех других случаях будут содержаться числа, которые $\notin [1; 9] \cap \mathbb{N}$ => только ~~Если цифры числа~~ эти наборы цифр в произведении дают 9261

а) три „3", три „7", две „1":

Вариантов расставить „3" в 8 позиций: $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!}$
В оставшиеся 5 позиций вариантов расставить „7": $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!}$
В оставшиеся места только 1 вариант расставить „1"
В итоге по правилу произвед: $S_1 = \frac{8! \cdot 5!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = 560$ вар.

б) одна „9", одна „3", три „7", три „1"

Вариантов расставить „9": 8
В оставшиеся „3": 7
В оставшиеся 6 мест расставить „7": $C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!}$
только 1 вариант расставить „1"

По правилу произвед.: $S_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 2}} = 1120$ вар.

По правилу сумм: $S = S_1 + S_2 = 1680$ Вариантов

Ответ: 1680 Вариантов

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

а) $\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4})$ б) $-(\cos 5x - \sin 5x) = -\sqrt{2} \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4})$

Тогда $\sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x - \sqrt{2} \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | : \sqrt{2}$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - (\cos 4x + \cos(5x + \frac{\pi}{4})) = 0$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - 2 \cdot \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

Т.к $\cos(9x - \frac{\pi}{4}) = \cos(9x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (9x + \frac{\pi}{4})) = \sin(9x + \frac{\pi}{4}) = 2\sin\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$, то

$\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \left(\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

1) $\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$; $\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $9x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi n$

2) $\sin\left(\frac{9x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0$; $\sin\left(\frac{9x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{9x}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{9x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)$

$\cos\left(\frac{9x}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0$

$\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0\\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{8}=\pi k;\ k\in\mathbb{Z}\\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi m;\ m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}5x=2\pi k+\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{\pi m}{2}+\frac{\pi}{8}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ll}x=\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{20} & k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi m}{2}+\frac{\pi}{8} & m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{20}$; $\frac{\pi m}{2}+\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi n$; $n,m,k\in\mathbb{Z}$

№ 5

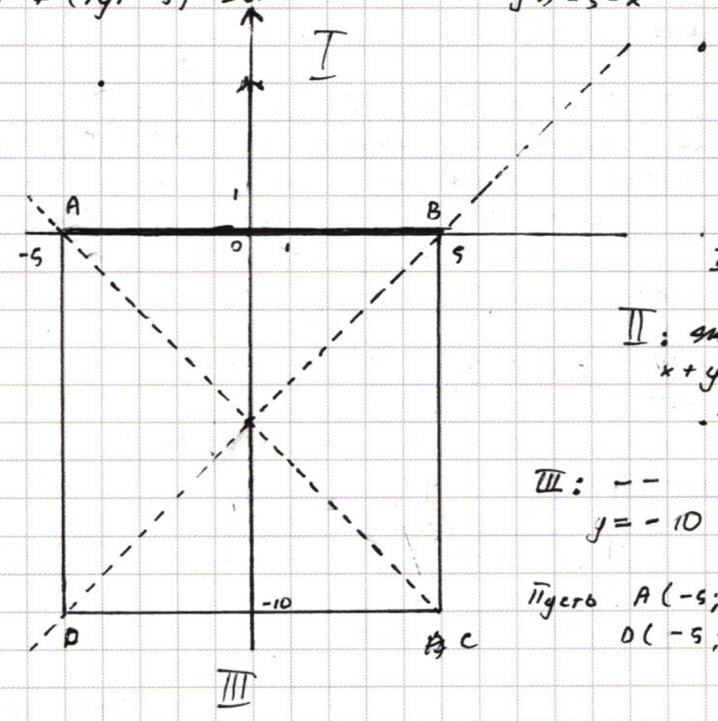
Метод областей

$\begin{cases}|x+y+5|+|y-x+5|=10\\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a\end{cases}$

$a>0$

1) $x+y+5\geq 0$
$y\geq -5-x$

2) $y-x+5\geq 0$
$y\geq x-5$



I: ++
$x+y+5+y-x+5=10$
$2y=0$
$y=0$

II: +−
$x+y+5-y+x+5=10$
$x=5$

III: −−
$y=-10$

IV:
$x=-5$

Пусть $A(-5;0)$; $B(5;0)$; $C(5;-10)$
$D(-5;10)$

Z) 2-ое уравнение системы это окр. в I четверти ($x>0$; $y>0$) симмет. отраженная относительно $y=0$ и $x=0$

Из симметрии: если график 2-го уравнения ~~касается~~ пересекает отрезок BC, то он пересекает AD, так же с AB и DC

Рассмотрим что происходит с окр. при увеличении a от 0

1) Пока $a\in[0;49)$ пересечений нет.
2) Если $a=49$, то ~~графики имеют общую точку~~ окр. с центром $O_{IV}(12;-5)$ касается BC => в силу симметрии 2 решения $a=49$
3) При $a\in(49;169)$ решений больше 2 ~~(…)~~ окр. с ~~центром (12;-5)~~ перес.
4) При $a=169$ 2 решения; это точки $(0;0)$ и $(0;-10)$
5) При $a\in(169;+\infty)$ решений нет

Ответ: $a=49$
$a=169$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$D = (3x-4)^2$

$y = \dfrac{x+4+3x-4}{2} = 2x$

$y = \dfrac{x+4-3x+4}{2} = 4-x$

1) $y = 2x$, тогда $(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$x^{-\ln 16x^6} = 2^{-\ln\frac{x^6}{2}} \cdot x^{-\ln\frac{x^6}{2}}$; $x^{-\ln 16x^6 + \ln\frac{x^6}{2}} = 2^{-\ln\frac{x^6}{2}}$

$x^{-\ln 32} = 2^{-\ln\frac{x^6}{2}}$; $32^{-\ln x} = 2^{-\ln\frac{x^6}{2}}$; $-5\ln x = -\ln\frac{x^6}{2}$; $\ln\frac{2x^5}{x^6} = 0$

$\frac{2}{x} = 1$; $x = 2$; $x = 2$ является решением т.к $(2^{10})^{-\ln 2} = (4)^{\ln 2^{-5}}$

$2^{-10\cdot\ln 2} = 2^{-10\cdot\ln 2}$

2) $y = 4-x$; ~~т.к $\ln x$~~ ОДЗ: $x>0$ т.к $x>0$, то $y>0$ (из $\frac{y}{x^7}>0$)

т.к $y>0$, то $x<4$

$(x^2\cdot(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

Если $x=2$, то $(2^6)^{-\ln 2} = (2)^{\ln\frac{1}{2^6}}$; $2^{-6\cdot\ln 2} = 2^{-6\cdot\ln 2}$

Ответ: $(2;4)$; $(2;2)$

№7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -2^x - 3\cdot 2^{34} & (I) \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x & (II) \end{cases}$$

~~I – II~~ II – I: $0 < 76 + (2^{33}-2)x + 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$76 + (2^{33}-2)x + 2^x + 3\cdot 2^{34}$ – возрастающая функция

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y > 2x(1-2^{32}) - 76 \end{cases}$$

$$0 > \cancel{2x}\cdot 2^x + 3\cdot 2^{34} + 76 + \cancel{2x}\ 2x(2^{32}-1)x$$

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y = 2x;\ y = \cancel{x-4}\ 4-x \end{cases} \quad \to \quad y>0 \text{ и } x>0$$

$$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln\frac{y}{x^7}}$$

$$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = \left(\frac{y}{x^7}\right)^{\ln y}, \quad x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y}\cdot x^{-7\ln y}$$

$$x^{-2\ln x}\cdot x^{-4\ln y} = y^{\ln y}\cdot x^{-7\ln y}$$

логарифмируем по x: $(-2\ln x - 4\ln y) = (\log_x y^{\ln y} - 7\ln y)$

$$\log_x(y^{\ln y})\ \cancel{\ln y} = \ln y\cdot \log_x y$$

$$-\ln(x^2\cdot y^4) = \ln y\cdot(\log_x y - 7)$$

$$0 = -7\ln y + \ln y\cdot\log_x y + \ln(x^2\cdot y^4)$$

$$0 = \ln\frac{x^2}{y^3} + \ln y\cdot \log_x y$$

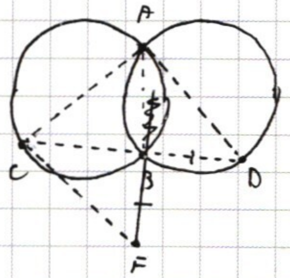
$6 < 8$

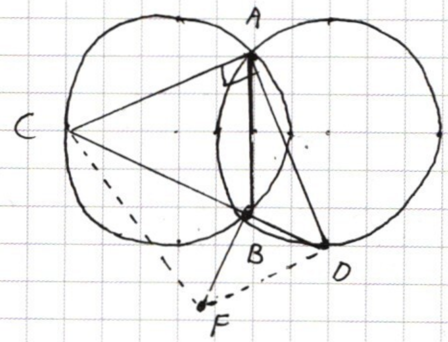
$3 \leq 4$

$3 < 4$

$\angle CAD = 90^\circ$

$$\angle CAD = \frac{\frown CB + \frown BD}{2}$$





$$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32}-1)x$$

$$2^x - 2x(2^{32}-1) - 76 + 3\cdot 2^{34} = 0$$

$$\cancel{2} - 2^{33} + \cancel{2} - 76 + 3\cdot 2^{34} = 0$$

$$-2^{33} - 76$$

$$4 - 2^{34} + 4 - 76 + 3\cdot 2^{34} = 0$$

$$8 - \cancel{3^{33}}\ 3\cdot 2^{33} + 6 - 76 + 8\cdot 2^{34} = 0$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

1) $\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2}\cdot\cos(9x - \frac{\pi}{4})$

2) $-(\cos 5x - \sin 5x) = -\sqrt{2}\cdot\cos(5x + \frac{\pi}{4})$

$\cos x + \cos y = 2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sqrt{2}\cdot\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cdot\cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - (\cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \cos(4x)) = 0$

$\frac{9-1}{4} = 2$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - 2\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\frac{-3-1}{16} = \frac{1}{4}$

$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - 2\cos(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8})\cdot\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

$\frac{9}{2}x = \alpha:\ \cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) - 2\cos(\alpha + \frac{\pi}{8})\cdot\cancel{\frac{x}{2} - \pi}\ \cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin(2\alpha + \frac{\pi}{4})$

$\sin(2\alpha + \frac{\pi}{4}) - 2\cos(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8})\cdot\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

$\sin(\alpha + \frac{\pi}{8})\cdot\cos(\alpha + \frac{\pi}{8}) - \cos(\alpha + \frac{\pi}{8})\cdot\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$

№5

$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$

(1): (2): $y^2 - y(x+4) + 8x - 2x^2 = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2$

$D = 9x^2 - 24x + 16$

$D = (3x-4)^2$

а) $y_1 = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$

б) $y = \frac{x+4-3x+4}{2} = 4 - x$

а) $y = 2x$, тогда $(x^2\cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\frac{2}{x^6}}$; $2x^{\ln\frac{2}{x^6}} = 2x^{-\ln\frac{x^6}{2}} = \left(\frac{x^6}{2}\right)^{-\ln 2x}$

$(16x^6)^{-\ln x} = (\frac{x^6}{2})^{-\ln 2x}$ $\cancel{(2\sqrt{2})^{-\ln}}$

$\cancel{(32x^6)^{-\ln x}} = \cancel{(x^6)^{-\ln x}}$

$\frac{x^6}{2} = t$

$\cancel{\left(\frac{x^6}{2}\right)^{-\ln 2x}} = \cancel{\left(\frac{x^6}{2}\right.}$ $(32t)^{-\ln x} = t^{-\ln 2x}$ $/ t^{-\ln x}$

$(32t)^{-\ln x} = t^{-\ln x - \ln 2}$

$t^{-\ln x}\cdot 32^{-\ln x} = t^{-\ln x}\cdot t^{-\ln 2}$

$t^{-\ln x}\cdot(32^{-\ln x} - t^{-\ln 2}) = 0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t^{-\ln x} = 0 \\ 32^{-\ln x} = t^{-\ln 2} \end{array}\right.$ $\Rightarrow \begin{cases} \ln x = 1 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e \\ \frac{x^6}{2} > 0 \end{cases}$

$32^{-\ln x} = 2^{-\ln t}$

$2^{-5\ln x} = 2^{-\ln t}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(\cancel{x^2}y^4 \quad y = x-4$

$\frac{1}{4} - \ln\frac{1}{2} = 1$

$x^2 \cdot (x^{\cancel{4}} - 4)^4 {}^{-\ln x} = {}^{(x-4)}\ln\left(\frac{\cancel{x}^4}{x^7}\right)^{(x-4)}$

~~пусть $a = x^4$ $b = (x-4)$~~

1) $x > 0$

$\left(2^6\right)^{-\ln 2} = (2)^{\ln 2}$

~~$(a^2 \cdot b^4)$~~

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{4}{x^7}\right)}$

$C(5; -10)$
$O(12; -5)$ $\Rightarrow R^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$

$12^2 + 5^2 = 14$

$y > 0 \; ; \; x > 0$

№ 1

$9261 \mid 3$
$3087 \mid 3$
$1029 \mid 3$
$343 \mid 7$
$49 \mid 7$
$7 \mid 7$
1

343

$9261 : 3 = 3087$

$3087 : 3 = 1029$

$\frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}^2}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 56\cdot10 = 560$

$\frac{3\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2} = 56\cdot10\cdot2$

~~исходное~~ $9261 = 3^3\cdot7^3$

1) не содержат 9: * * * * * * * *
3 тройки ~~7 дев~~ 3 семерки: $\frac{8!}{5!\cdot3!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}$

2) содержат 1-ну 9
1 девятка 1 тройка 3 семерки: $\frac{8!}{7!}\cdot\frac{7!}{6!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot3!}$

№ 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

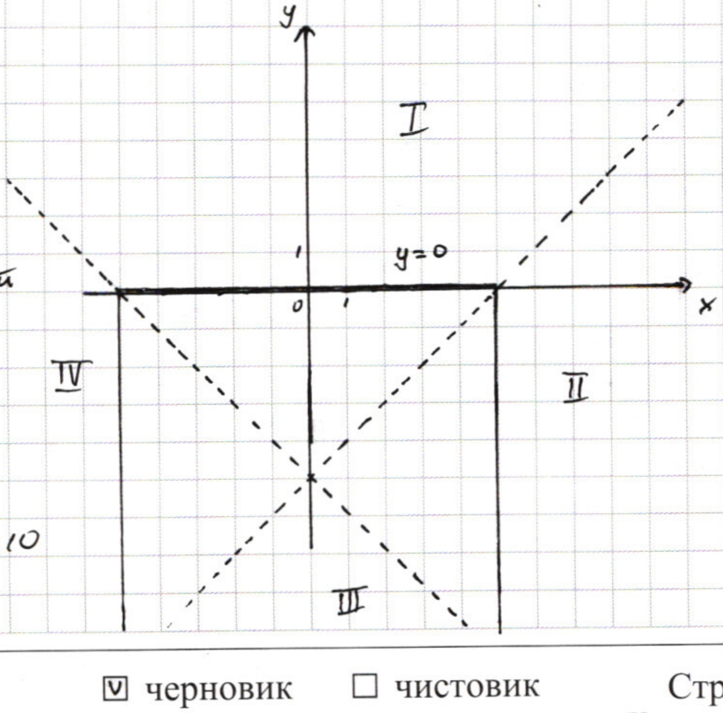
(б) $x+y+5 \geq 0 \quad y-x+5 \geq 0$
$y \geq -x-5 \quad y \geq x-5$

1) ++ (I)
$\cancel{x}+y+\cancel{5}+y-\cancel{x}+\cancel{5} = \cancel{10}$
$y=0$

2) −− (III)
$-x-y-5-y+x-5=10$
$-2y=20$
$y=-10$ ~~нет решений~~

3) +− (II)
$x+y+5-y+x-5=10$
$x=5$

4) −+ (IV)
$-x \cancel{+y} - \cancel{y} - 5 + y - x - 5 = 10$
$x=-5$



$2^{10}{}^{-\ln 2} \quad {}^{-\ln(2^5)} = 4$

$2^{-10\cdot\ln 2} = 2^{-10\ln}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)