МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) Разложим 9261 на множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

Поскольку число 9261 получает произведением трех 3 и трех 7, то оставшиеся две цифры являются 1-ами

Тогда количество восьмизначных чисел с тремя 3, тремя 7 и двумя 1 равно $\frac{8!}{3!3!2!} =$

$= \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} =$

$= 8\cdot7\cdot5\cdot2 = 560$

Ответ: 560

(2)

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x \sin 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cos 2x$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) + 2\sin 7x \cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x = 0 \quad (1) \\ 2\sin 7x - (\sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{2}\sin 2x) = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Решим (1) уравнение разделив обе части уравнения на $\cos 2x$ ($\cos 2x \neq 0$; если $\cos 2x = 0$, то из ур-я (1) получается, что $\sin 2x = 0$ а такого быть не может из основного тригонометрического тождества.)

$\operatorname{tg} 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Решим (2) уравнение ~~заменой~~ домножив оба слагаемых в скобках на $2 \cdot \frac{1}{2}$; тогда получим:

$$2\sin 7x - \left(2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 0$$

~~вспомним~~ учитывая, что $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

заменим $\frac{\sqrt{2}}{2}$ при ~~косинусе~~ $\cos 2x$, на $\sin\frac{\pi}{4}$; а $\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $\sin 2x$ на $\cos\frac{\pi}{4}$

$$2\sin 7x - 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) = 0 \ \Big/ : 2 \neq 0$$

$$\sin 7x - \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)\right) = 0$$

Воспользуемся формулой разности синусов и получим:

$$2\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n;\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m;\ m \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

~~Добав~~ Объединив все полученные результаты в совокупность, получим ответ.

<u>Ответ</u>: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$

5

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

$a - ? \rightarrow$ система имеет 2 решения

Первое уравнение системы задает квадрат ~~на промежутку~~ со стороной 10 на промежутках $-5 \leq x \leq 5$ и $-10 \leq y \leq 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

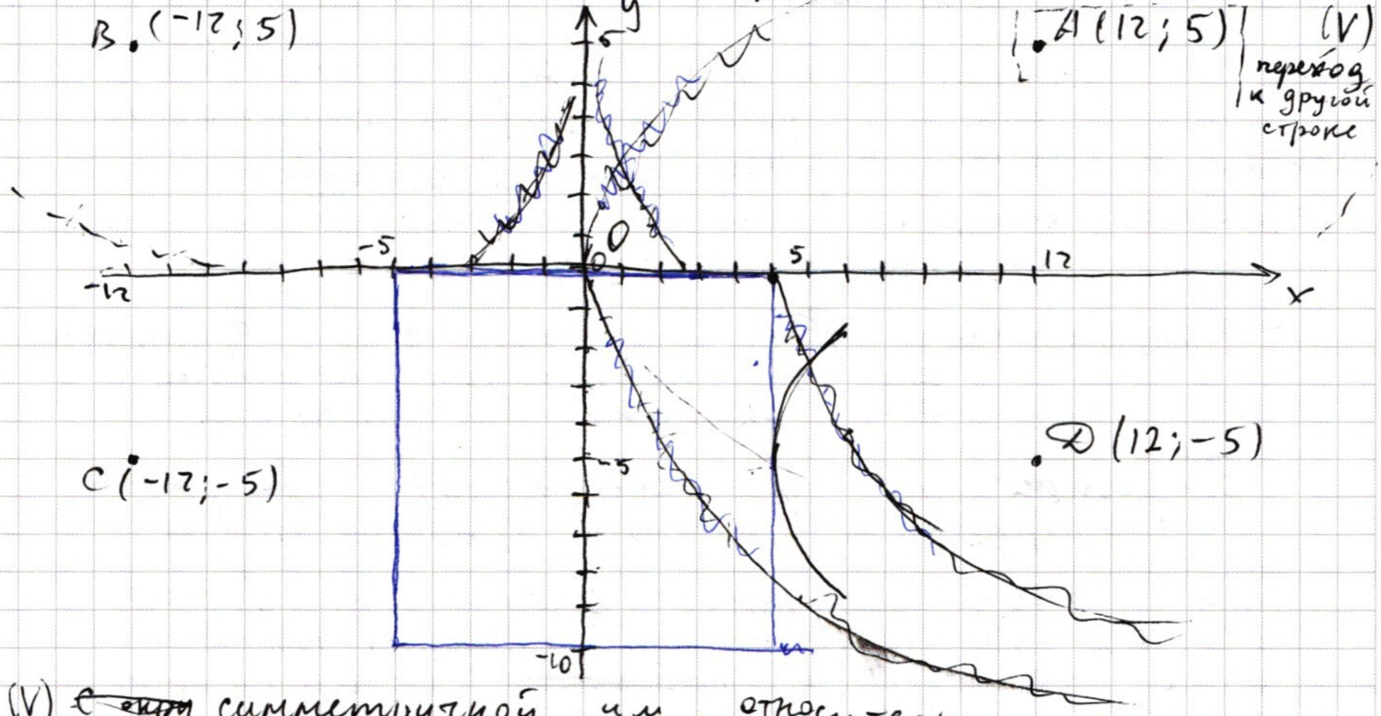
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второе уравнение задает 4 окружности с ~~координатами~~ центрами в точках

A (12 ; 5)
B (−12 ; 5)
C (−12 ; −5)
D (12 ; −5)

и лежащие соответственно в I, II, III и IV квадрантах

Окружности лежащие в ~~первой~~ первых двух четвертях могут иметь лишь одну общую точку с ~~окру~~ квадратом, пересекаясь в ней с окружностью (V)



(V) ~~с окру~~ симметричной им относительно оси OX
~~Рассмотрим окружность с~~
~~Окруж~~ ~~Поэтому не будем рассматривать эти окружности (с центрами в A и B)~~

Рассмотрим окружность с центром в точке D, со второй окружностью всё будет аналогично, т.к. они симметричны

Чтобы данная окружность имела 2 общие точки с квадратом ~~ее радиус равный за~~ она должна проходить через точки на промежутке $x \in [0; 5]$ и лежащие на оси абсцисс

~~Най~~ ~~Рассмотрим радиус~~ Найдем радиус этой окружности если она проходит через O (начало координат)

$R = \sqrt{a} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ $(x_1; y_1)$ – координаты центра

$(x_2; y_2)$ – координаты точки, через которую проходит окружность

$\sqrt{a} = \sqrt{(12^2 - 0)^2 + (0+5)^2}$

$\sqrt{a} = \sqrt{144 + 25}$

$a = 169$

Теперь найдем радиус окружности проходящей через точку $(-5; 0)$

$\sqrt{a} = \sqrt{(12-5)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

$a = 74$

Значит окружность с центром в точке Д имеет 2 общих точки с ~~окружно~~ квадратом при $a \in [74; 169]$, а окружность с центром в точке А при данных a будет пересекать квадрат в той же точки, что и окружность с центром в точке Д

~~С окружностями~~ ~~В~~ С остальными окружностями всё аналогично поскольку они симметричны данным

~~Знач~~ Следовательно при $a \in [74; 169]$ квадрат и 4 окружности имеют 4 общие точки

~~При $a > 169$ окружности, лежащие выше оси OX не пересекают квадрат ни в одной точке, а ~~прочие~~ остальные пересекают в одной точке (каждая); это происходит до того момента пока ~~раз~~ эти окружности не пройдут через точку $(0; -10)$, в которой система будет иметь одно решение~~

~~Найдем радиус окружности при котором она пересекает точку $(0; -10)$~~

~~$\sqrt{a} = \sqrt{(12-0)^2 + (-5+10)^2} = 144 +$~~

Окружности с центрами в точках С и Д имеют по одной ~~общ~~ общей точке с квадратом, если ~~будут~~ и касаются его, что происходит в точках $(-5; -5)$ и $(5; -5)$ соответственно

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Радиусы данных окружностей равны 7

тогда $\sqrt{a} = 7$

$a = 49$

Значит при $a = 49$ система имеет 2 решения

Ответ: $a = 49$

③ $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

Рассмотрим первое уравнение системы

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$

воспользуемся свойством: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$x^{-\ln x^2y^4} = y^{\ln(y/x^7)}$ логарифмируем обе части уравнения по основанию e

$(\ln x)(-\ln x^2y^4) = (\ln y)(\ln \frac{y}{x^7})$

$(-\ln x)(2\ln x + 4\ln y) = \ln y(\ln y - 7\ln x)$

$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln y = \ln^2 y - 7\ln x \ln y$

$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$

воспользуемся формулами логарифма произведения, частного а также вынесением показателя степени аргумента за логарифм.

~~Вынесение четной степени~~ $\ln x^2 \Leftrightarrow 2\ln x$ и $\ln y^4 \Leftrightarrow 4\ln y$ поскольку $x, y > 0$ по ОДЗ

Разделим обе части уравнения на $\ln^2 x$

если $\ln x = 0$, то $\ln y = 0$, $\to$ $x = y = 1$ — неверно ~~по ОДЗ~~ поскольку при данных x и y второе ур-е неверно

$\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 3\cdot\frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0$

воспользуемся формулой перехода для логарифма к другому основанию, тогда

$\log_x^2 y - 3\log_x y + 2 = 0$

сделаем замену

$\log_x y = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 \cdot t_2 = 2 \end{cases}$

$t_1 = 2 \quad t_2 = 1$

обратная замена

$\log_x y = 2$, $\log_x y = 1$

$y = x^2$ $\qquad y = x$

~~Подставим сначала~~ Подставим ~~Сделаем~~ ~~подстрод~~ замену y во второе уравнение и решим относительно x

При

$y = x^2$

$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$

$x = 0$, (не уд ОДЗ $x > 0$) или $x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$

~~рассмотрим~~ ~~Подставим делители свободного члена в уравнение~~

t_1
t_2
t_4

Подставив $x=2$ в уравнение получим $0=0$, тогда разделим данное уравнение на $x-2$

$\Downarrow$

$(x-2)(x^2+x-4) = 0$

$\Downarrow$

$x = 2$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

$x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ не уд ОДЗ $(x<0)$

$x_1 = 2$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ – корни

тогда

$y_1 = 4$; $y_2 = \frac{(-1+\sqrt{17})^2}{4} = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

При $y = x$, получаем

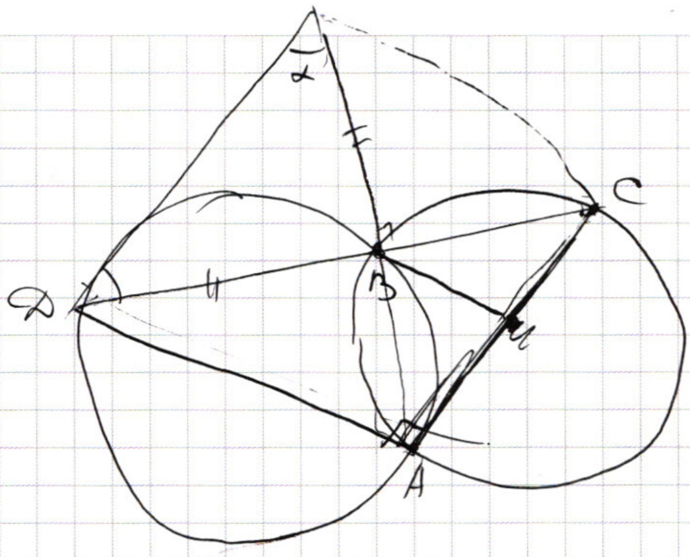
$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \mid \cdot(-\frac{1}{2}) \neq 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ – не уд ОДЗ } (x>0) \\ x = 2 \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x=2$; $y=2$

<u>Ответ:</u> $(2;2)$; $(2;4)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\ \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)

abcdefgh $\quad a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot h = 9261$

9261 | 3^2
1029 | 3
343 | 7
49 | 7^2
1

$\underline{3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot1\cdot1\cdot1}$

$\frac{8!}{3!\,3!\,2!}$

$= \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}$

$= 56\cdot2 = 112\cdot5 = 560$

$\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2}-2x)$
$\cos 2x = \sin(\frac{\pi}{2}-2x)$

$2\sin\frac{\pi}{4}\cos$

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9 + \sin 5x = 0$

$-2\sin 2x\sin 7x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\cdot\sin 7x\cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad |:\cos 2x \qquad 2\sin 7x - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 0$

$\operatorname{tg} 2x = 1 \qquad \sin\frac{\pi}{4} \qquad \cos\frac{\pi}{4}$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in Z$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

$2(\sin 7x - \sin(2x+\frac{\pi}{4})) = 0$

$2\sin\frac{7x-2x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{7x+2x+\frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\sin(2{,}5x - \frac{\pi}{8}) = 0 \qquad \cos 4{,}5x + \frac{\pi}{8} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2{,}5x - \frac{\pi}{8} = \pi k,\ k \in Z$ $\qquad$ $4{,}5x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in Z$ $\qquad$ $\frac{9}{2}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi k,\ k \in$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5},\ k \in Z$ $\qquad$ $\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{4 \cdot 3} + \frac{2}{9}\pi k,\ k \in Z$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi k,$

3) $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

$(y^2 - 4y + 4) - (2x^2 - 8x + 8) - xy = \cancel{+4}\ -8$

$(y-2)^2 - 2(x - 2)^2 = xy - 4$

$-(xy + 2x^2)$

$-x(y + 2x)$

$4(2x - y) - x(2x + y) + y^2$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = \left(\frac{y}{x^7}\right)^{\ln y}$

$(xy^2)^{-2\ln x} =$

$\frac{1}{x^{2\ln x} y^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{x^{7\ln y}}$

$x^{7\ln y - 2\ln x} = y^{\ln y - 2\ln x}$

$(\ln x)(7\ln y - 2\ln x) = (\ln y)(\ln y - 2\ln x)$

$\ln x = u \quad \ln y = t$

$u(7t - 2u) = t(t - 2u)$

$7ut - 2u^2 = t^2 - 2ut$

$t^2 + 2u^2 - 7ut = 0 \quad : u^2$

$\frac{t^2}{u^2} - 7\frac{t}{u} + 2 = 0$

$7 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a$

$a = \frac{7}{2\sqrt{2}}$

$\frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} - 7\frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0$

$\ln_x^2 y - 7\ln_x y + 2 = 0$

$\ln_x y = z$

$z^2 - 7z + 2 = 0$

$D = 49 - 8 = 41$

$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

$\ln_x y = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$

$y = x^{\frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y+(x+5) \qquad y-($

5) $\begin{cases} |x+y+5| + |y-(x+5)| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

a - ? 2 реш.

$+ \; +$

$x+y+5+y-x+5=10$

$2y = 0$

$\boxed{y = 0}$

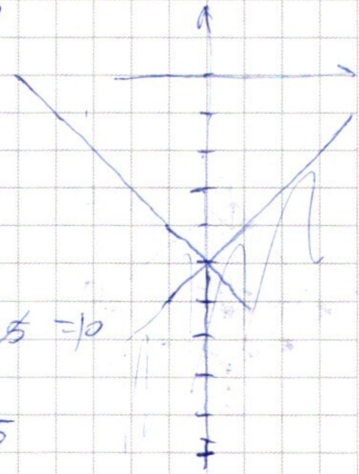
$- \; -$

$-x-y-5-y+x-5=10$

$-2y=20$

$\boxed{y=-10}$

$\begin{cases} x+y+5<0 & y<-x-5 \\ y-x+5<0 & y<x-5 \end{cases}$



$x+y+5>0 \qquad y-x+5>0$

$y>-x-5 \quad + \quad - \quad y>x-5$

$y=0 \quad x+\cancel{y}+\cancel{5}-\cancel{y}+x-\cancel{5}=10$

$2x=10$

$x=5$

$- \; +$

$-x-\cancel{y}-5+\cancel{y}-x+5=10$

$-2x=10$

$x=-5$

$y<-x-5$

$y>x-5$

$-10<y\le 0$

$-5\le x\le 5$

1) $y=0$ 2) $y=-10$

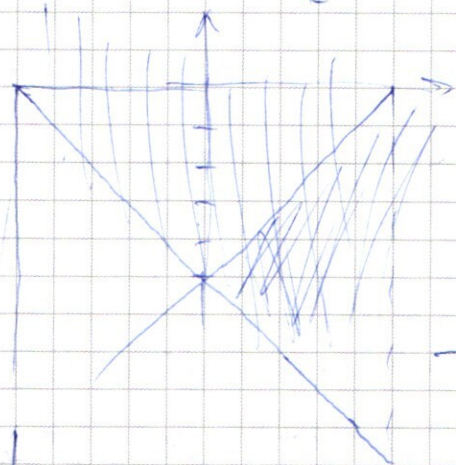
3) $x=5$ 4) $x=-5$

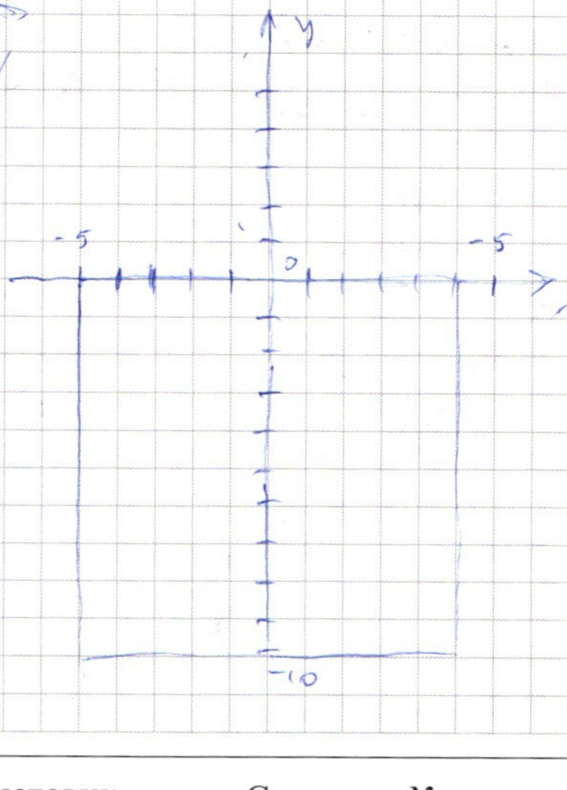
$-10\le y\le 0$

$\begin{cases} x+y+5>0 \\ y-x+5<0 \end{cases}$

$y>-x-5$

$y<x-5$





$|x|=12 \qquad |y|=5$

$x=\pm 12 \qquad y=\pm 5$

$(12;5)$ $x>0,\ y>0$

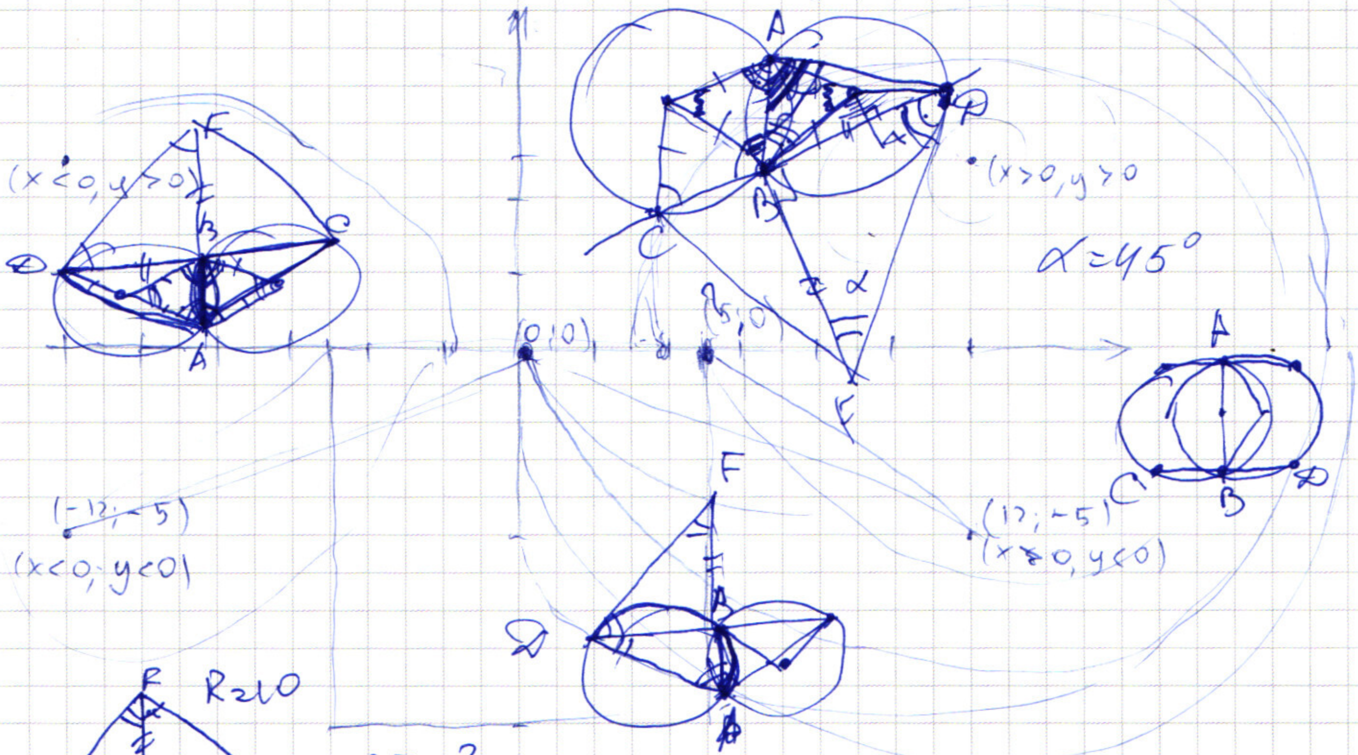
$(-12;5)$ $x<0,\ y<0$

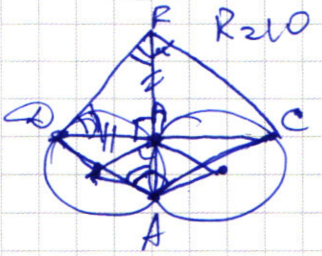
$(12;-5)$ $x>0,\ y<0$

$(-12;-5)$ $x\le 0,\ y<0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)





CF – ?

$R = \sqrt{a}$ $\qquad a \geq 0$

а) $\sqrt{a} = \sqrt{(0-12)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169}$

$\boxed{a = 169}$

б) $\sqrt{a} = \sqrt{(5-12)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

$a = 74$

$169 \leq a < 74$

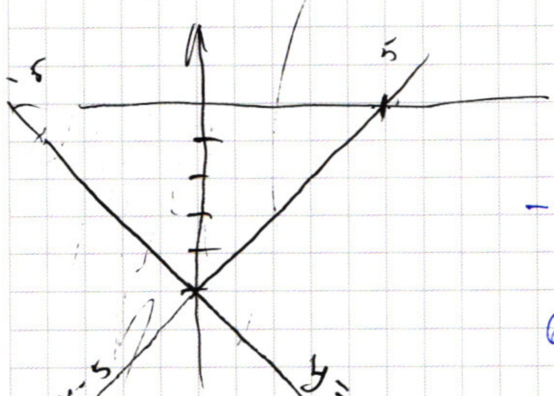
$((y+5)-x)^2$

$(y+5+x)^2$

$2y+10=10$

$y=0$

$\begin{cases} y \geq -x+5 \\ y \geq x-5 \end{cases} \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$



$x(x^2-6)$

$-(x^2-6)-2 \leq 0$

$(x^2-6)(x-1) = 2$

$x^2-6=1$

$x-1=2$

± 1

$1-1-6+8$

$-1-1+6+8$

$8-4-12+8$

$-8-4+12+8$

4

$64-$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$x(x^2-8)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$(x,y) \in \mathbb{Z}$

кол-во?

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32}-1)x$

$2^x + 3\cdot 2^{34} - 76 - 2^{33}x + 2x = 0$

$2^x + 3\cdot 2^{3\times 3} = 38 + (2^{32}-1)x$

$2^x - (2^{32}-1)x + 3\cdot 2^{33} - 38 = 0$

$y, x \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$2^{x-1} + 3\cdot 2^{33} \leq 76 + 2(2^{32}-1)x$

$2\cdot 2\cdot 19$

$2^{x-1} + 3\cdot 2^{33} \leq 38 + (2^{32}-1)x$

$2^{x-1} - (2^{32}-1)x \leq 38 - 3\cdot 2^{33}$

0

$y \geq 1 + 3\cdot 2^{34}$

$y < \boxed{76}$

$x = 1$

$y \geq 2 + 3\cdot 2^{34}$

$y \geq 2(1 + 3\cdot 2^{33})$

$y < 76 + 2^{33} - 2$

$x = 105$

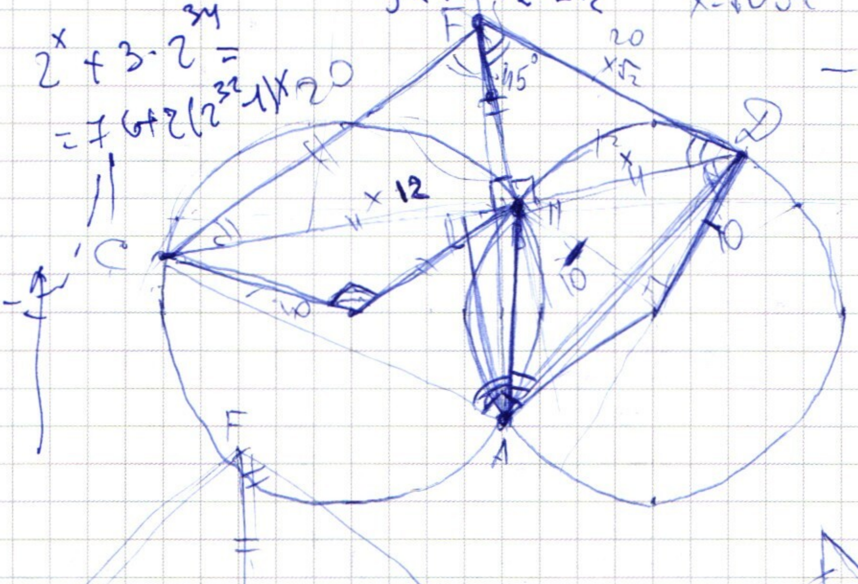
$S_{ACE} - ?$ $BC = 12$

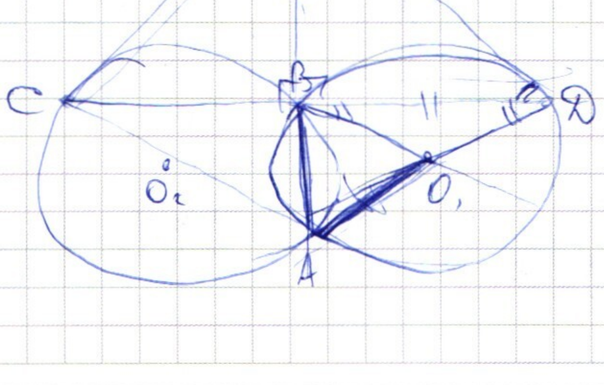
6

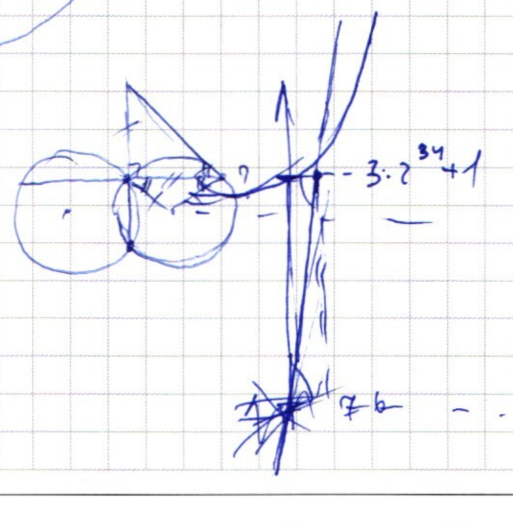
$2^x + 3\cdot 2^{34} =$

$= 76 + 2(2^{32}-1)x = 0$

$R_1 = R_2 = 10$







☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$9261 \mid 9 \quad 1029 \mid 3 \quad 343 \mid 7 \quad 49 \mid 49$$

$$x^{-\ln x^2 - \ln y^4} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$-(\ln x)(\ln x^2 - \ln y^4) = \ln y(\ln y - \ln x^7)$$

$$-2\ln^2 x + 4\ln x \ln y = \ln^2 y - 7\ln y \ln x$$

$\ln x = t$

$\ln y = z$

$$-2t^2 + 4tz = z^2 - 7tz$$

$$z^2 + 2t^2 - 11tz = 0 \,/ : z^2$$

$$2\left(\frac{t}{z}\right)^2 - 11\left(\frac{t}{z}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 - 11\frac{\ln x}{\ln y} + 1 = 0$$

$$2\log_y^2 x - 11\log_y x + 1 = 0$$

$D = 11 - 8 = 3$

$t_{1,2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{3}}{4}$

$\log_y x = \dfrac{11 \pm \sqrt{3}}{4}$

$x > 0$

$y > 0$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x^7 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y < 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{y}{x^7} > 0 \Rightarrow \left[\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y < 0 \\ x < 0 \end{cases}\right. \\ x^2 y^4 > 0 \to y \neq 0,\ x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$x(x^2 - x - 6)$

$D = 1 + 24 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x_1 =$

$\cancel{x(x-3)(x+2) + 8 = 0}$

$\cancel{1 = 1 - 6 + 8}$

$\cancel{-1 = 1 + 6 + 8}$

2

$8 - 4 - 12 + 8$

$1 - 1 - 2 + 8 - 4 = 0$

$9, -7$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 4 \\ \quad x^2 - 6x & \\ \quad x^2 - 2x & \\ \quad\quad -4x + 8 & \\ \quad\quad -4x + 8 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)