

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(x, y) = (2; 4); (2; 2); \sqrt{3}.$
 $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right).$

Решение: Расм. второе ур-е как квадратное отн. y :

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0.$$

$$D_y = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = 2x; -x+4.$$

Итак, 2-е ур-е равносильно

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

пучь $y=2x$. подставим в первое ур-е:

$$(x^2 \cdot (2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2x}{x^2})}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 16^{-\ln x} \cdot x^{\ln(x^{-6})} = 2^{\ln(\frac{2}{x^6})} \cdot x^{\ln 2 + \ln(x^{-6})} =$$

$$= 2^{\ln(\frac{2}{x^6})} \cdot x^{\ln 2} \cdot x^{\ln(x^{-6})}$$

Сократим на $x^{\ln(x^{-6})} > 0, \forall x > 0$

$$16^{-\ln x} = 2^{\ln(\frac{2}{x^6})} \cdot x^{\ln 2}$$

Известно, что $a^{\ln b} = a^{\frac{\lg a^b}{\lg a}} = b^{\frac{1}{\lg a}} = b^{\ln a}$.

Подставим преписан ур-е:

$$(2^4)^{-\ln x} = 2^{\ln(\frac{2}{x^6})} \cdot 2^{\ln x} = 2^{\ln \frac{2x}{x^6}} = 2^{\ln(\frac{2}{x^5})}$$

$$2^{-4\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^5}} \Leftrightarrow -4\ln x = \ln \frac{2}{x^5}$$

$$\ln(x^{-4}) = \ln(\frac{2}{x^5}) \quad x^{-4} = 2 \cdot x^{-5} \quad / \cdot x^5 > 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4.$$

$y, x > 0$ - удовлетворяет

Пусть теперь $y = 4 - x$

т.е. $\ln x$, $\boxed{x > 0}$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^2})}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^2})} \quad | : (4-x)^{-4\ln x} > 0$$

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^2}) + 4\ln x} = (4-x)^{\ln(\frac{4-x}{x^3})}$$

если $x = 3$, то $(4-x) = 1 \Rightarrow$ правая часть $= 1$,
а левая: $3^{-2\ln 3} \neq 1 \Rightarrow x=3$ не решение.
(основание $\neq 1$, показатель $\neq 0$)

для $x > 0$, предположим по основанию $4-x > 0, \neq 1$.

$$-2 \ln x \log_{4-x} x = \ln(\frac{4-x}{x^3}) = \ln(4-x) - 3 \ln x$$

$$\frac{-2 \ln^2 x}{\ln(4-x)} = \ln(4-x) - 3 \ln x \quad | : \ln(4-x) \neq 0$$

$$-2 \left(\frac{\ln x}{\ln(4-x)} \right)^2 = -3 \frac{\ln x}{\ln(4-x)} + 1$$

$$2 \left(\frac{\ln x}{\ln(4-x)} \right)^2 - 3 \left(\frac{\ln x}{\ln(4-x)} \right) + 1 = 0. \quad \text{кв. е.}$$

$$\left[\frac{\ln x}{\ln(4-x)} = 1 \quad \ln x = \ln(4-x) \quad x = 4-x \quad \boxed{x=2 \rightarrow y=2} > 0 \right.$$

$$\left[\frac{\ln x}{\ln(4-x)} = \frac{1}{2} \quad 2 \ln x = \ln(4-x) \quad x^2 = 4-x \right.$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{\pm \sqrt{17} - 1}{2}$$

т.е. $x > 0$, берем $x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \Rightarrow y = 4-x = 4 + \frac{1-\sqrt{17}}{2} =$

$$= \frac{9-\sqrt{17}}{2} > 0 \rightarrow \text{пересек.}$$

Итого, 3 решения:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 1960.

✓1

Решение: $9261 = 3^3 \cdot 7^4$.

Первую цифру имеем 2 возможности:

- 1) Наше число состоит из трех троек, четырех единиц и одной единицы (т.е. число 8-значное)

Выберем сначала место для единицы, это можно сделать 8 способами. А затем на оставшихся местах выберем 4 позиции для единиц.

~~Для этого~~ $C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$.

Итого, $8 \cdot 35 = 280$ способов.

- 2) Можно 2 тройки «перемешать» в разряды.

Тогда мы ~~имеем~~ занимаем число с помощью одной разрядки, одной тройки, четырех единиц и двух единиц.

Выберем 1 место для разрядки (8 ст.) и одно место для тройки (7 способов). И теперь выберем 4 места для единиц. $C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 30$

Итого, всего $8 \cdot 7 \cdot 30 = 30 \cdot 56 = 1680$.

Итого, всего $1680 + 280 = 1960$ способов.

Других нет, т.к. в простых множителях только 3 и 7 (кроме 3 и 7), четных нет, а также тройки (которые могли бы занять 3 разряда).

$3^3 = 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Ответ: $a \in \{49; 169\}$. № 5.

Решение: Решим графически. первое ур-е задает

в плоскости $(x; y)$ ^{квадрат} квадрата с центром $(0; -5)$
и стороной 10. (по условию параллельны осям)

Второе задает 4 окружности
(или 4 фрагмента окружностей,
лежащие в целых равных
координат. четвертях с
центрами $(\pm 12; \pm 5)$

и радиусами $\sqrt{a}$

(исх.в., при $a < 0$, нет реш.)

т.е. $a^2 + b^2 \geq 0$

если $a = 0$, то это 4 точки $(\pm 12; \pm 5)$,

и решения (пересечения графиков) не будет;

Если $a \in (0; 49)$

то окр-ты будут маленькими, но
слишком маленькими, и расстояния до квадрата не будут;

т.е. их радиус $\sqrt{a} < 7$. (т.е. расстояние до центров ± 5)

(см. рис. 1)

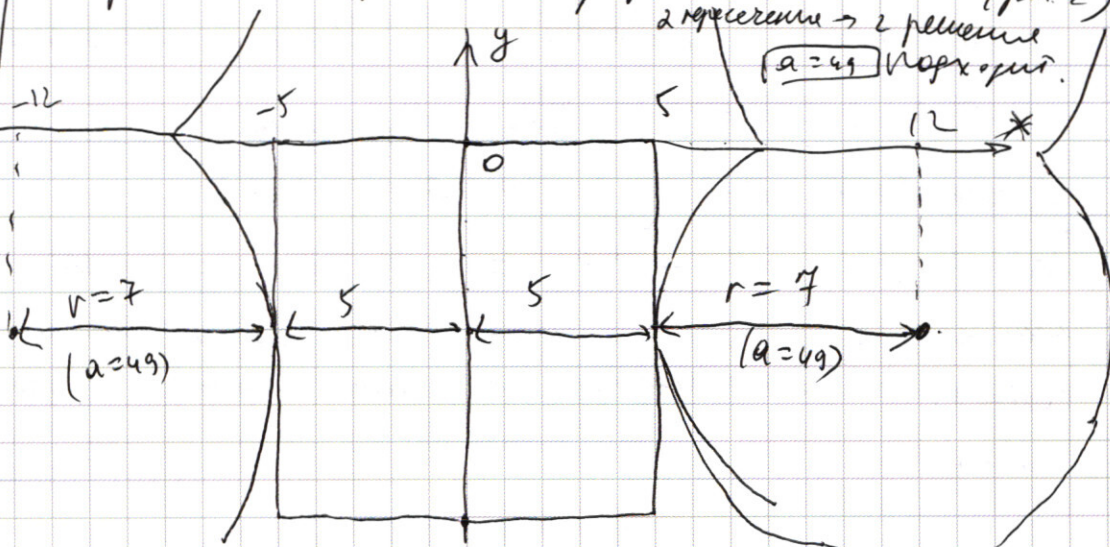
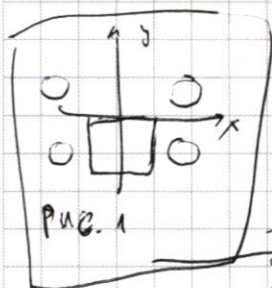
$< \sqrt{49} = 7$

А ординаты их центров $= \pm 5$

$(12 - 5 = 7)$

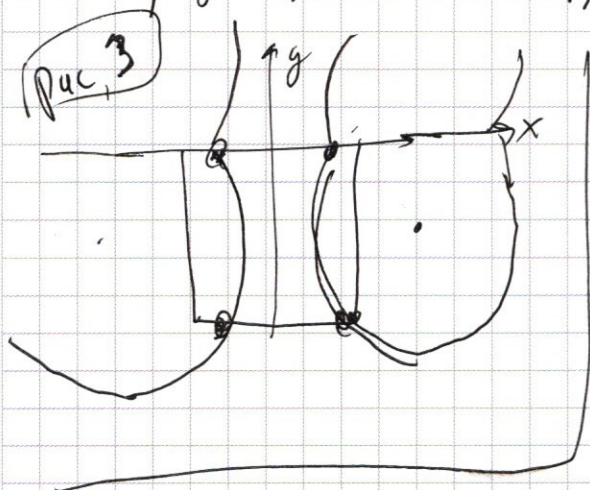
При $a = 49$ будет касание двух сторон квадрата

2 пересечения $\rightarrow$ 2 решения
 $[a = 49]$ подходит.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Далее, с увеличением a квадрат из двух ниспадающих
2 раза пересечет квадрат $\rightarrow$ будет ≥ 4 раз. не перес.
(рис. 3)



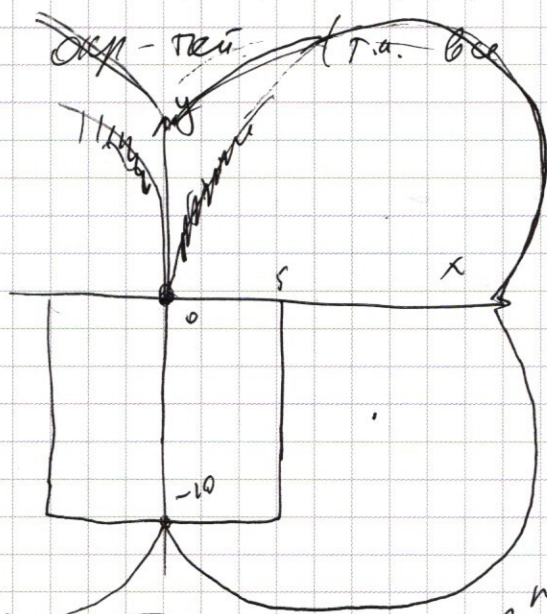
Так будет вплоть до

$$a = 12^2 + 5^2 = 13^2 = 169$$

В этом случае две ниспадающие
кр-ты пересекутся в т. $(0;0)$ и
 $(0; -10)$ и в этих

же точках пересекутся с квадратом.

Более того, в $(0;0)$ пересекутся все 4 фрагмента



кр-ты (т.е. все ветви
уравнения от $(0;0)$ на 13)
(рис. 4)
потому $a = 169$ пересекат.

если мы еще увеличиваем a ,
то пересечения уже не будет
вообще. т.е. $a > 13$

и кр-ты будут разрываться
еще сильнее, чем на рис. 4.

потому сейчас выделенный один

не будет, а точнее, что не пересекаться

квадратом (в I и IV четв.) или пересекаться (в т.

$(0; -10)$ в II и III четв.) будет разрываться от $(0;0)$ и пересекаться
квадратом не будет. Итого, 2 значения a .

(рис. 4)

Ответ:

Решение: $\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\sin 9x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 9x \sin \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \left(\sin 5x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos 5x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{20} \\ x = \frac{2\pi m}{9} + \frac{\pi}{12} \end{cases}, n, m, k \in \mathbb{Z}$$

Решение: $\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ 2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi m + \frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{20}, n, k, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi m}{9} + \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $CF = 20$.
б) $S_{ACF} = 14\sqrt{119}$

Решение:

а) пусть O_1, O_2 — центры
этих окружностей. Вторую окружность
касается в точке E .

Заметим, что

$AEFD$ — вписанная, $\Rightarrow$

$\Rightarrow (BF) \cap (AE) = E$,

т.е. $\angle EBD + \angle EAD = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$,
т.е. E, B, D, A — вписаны.

а (BF) — касательная к BD .

Аналогично прямые BE и DA пересекаются

на той же окружности в точке G . т.к. $\angle CBG = \angle CAG$ — прямые, т.е.
они опираются на диаметр.

По той же причине $EO_2 D$ — диаметр. Заметим, что в силу равенства
вписанных углов, опирающихся на одну дугу,

$\angle GCA = \angle GBA = \angle EBA = \angle EDA$. т.е. $\triangle CGA \sim \triangle EPA$.

Величина углов $\angle GCA$ и $\angle EPA$ равна $\uparrow$. Но $CG = ED = 10 \cdot 2 = 20$.

Как радиусы равных окружностей, поэтому $\triangle CAG = \triangle PAE$.

поэтому $EA = GA$. т.е. $\triangle EGA$ — равнобедренный. т.е.

$\angle AGE = \angle GEA = \angle CEB = \frac{\pi}{4}$ тогда $\angle ECB$ тоже $\frac{\pi}{4}$, и $\triangle CBE$

равнобедренный. т.е. $CB = BE$ тогда $\triangle EBD = \triangle CBE$ (по двум катетам)
но тогда равны и гипотенузы. т.е. $ED = CF = 20$.

б) Пусть $GA = GE = x$. Тогда y — EAD и EAG по т. Пифагора
 $GE = x\sqrt{2}$, $AD = \sqrt{400 - x^2}$

Тогда по в. в. секущих $GE \cdot GB = GE(GE + EB) = GA \cdot GD =$

$$x \cdot (x + \sqrt{400 - x^2}) = x\sqrt{2} \cdot (x\sqrt{2} + 12) \quad | : x > 0$$

$$x + \sqrt{400 - x^2} = 2x + 12\sqrt{2}$$

$$\sqrt{400 - x^2} = x + 12\sqrt{2} \quad 400 - x^2 = x^2 + 288 + 24x\sqrt{2}$$

$$x^2 + 12x\sqrt{2} - 56 = 0. \quad \text{По т. Виета, корни}$$

разных знаков ($-56 < 0$) $\Rightarrow$ переберём, что больше
 нуль.

$$x = \frac{-12\sqrt{2} + \sqrt{144 \cdot 2 + 4 \cdot 56}}{2} = -6\sqrt{2} + \sqrt{72 + 56} =$$

$$= -6\sqrt{2} + \sqrt{2^2} = -6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Угол, $EA = 2\sqrt{2}$, то $CE = 12\sqrt{2}$ (по т. Пифагора y — CEB)

$$\text{Тогда } AD = \sqrt{400 - x^2} = \sqrt{400 - 8} = \sqrt{392} = \sqrt{49 \cdot 8} = 14\sqrt{2}.$$

По т. Пиф. y — EAD . $BD = 16 \Rightarrow DF = 16\sqrt{2}$ y — BDF по т. Пиф.

т.е. $\angle CEB = \frac{\pi}{4} = \angle ADB$ ($ADBE$ — вписана), то $\angle ADF = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Тогда по т. Пифагора y — ADF . $AF = \sqrt{14^2 \cdot 2 + 16^2 \cdot 2} =$

$$= 2 \sqrt{7^2 \cdot 2 + 16 \cdot 8} = 2 \sqrt{98 + 128} = 2 \sqrt{226} = 2 \sqrt{324} = 36$$

Тогда хорды CAF : $CA = 14\sqrt{2}$, $CF = 20$, $AF = 36$, $p = 7\sqrt{2} + 28$.

$$\text{По ф-ле Герона: } S = \sqrt{(7\sqrt{2} + 28)(28 - 7\sqrt{2})(7\sqrt{2} + 8)(7\sqrt{2} - 8)} =$$

$$= \sqrt{(28^2 - 98)(98 - 64)} = \sqrt{(84 - 98) \cdot 34} = \sqrt{686 \cdot 34} =$$

$$= 2 \sqrt{343 \cdot 17} = 2 \sqrt{49 \cdot 7 \cdot 17} = 14 \sqrt{119}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\angle KSO = \arccos \frac{3}{5}$;
 $S = \frac{64}{25}$

✓4.

Решение: По условию, что указанные сечения с вершиной S образуют гомететические тетраэдры (с ч. в. S) т.е. площади сечений как квадраты коэффициентов подобия (гомететии), то коэф. гомететии = 4. Равн. сечения плоскостью SK :

Пусть A, B — точки пересечения SO с указанными плоскостями (точки касания), C, D — т. пересечения SK с указанными плоскостями. A, D лежат в вершине, B, C — в нижней (площадь сечения нижней = 16)

Из гомететии с коэф. 4, получаем, что

$$\frac{SB}{SA} = \frac{SC}{SD} = \frac{CB}{DA} = 4$$

$$SAD \sim SKO \quad (\text{общий и третий})$$

$$\frac{SA}{SK} = \frac{AO}{KO} = \frac{SD}{SO}$$

Пусть $AO = OB = OK = r$ (радиусы)

тогда $SA = \frac{2r}{3}$

тогда SK по теореме Пифагора = $\sqrt{\frac{25r^2}{9} - r^2} = \frac{4r}{3}$

тогда из $\triangle SKO$ $\cos \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{r}{\frac{2r}{3} + r} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{3}{5}$

получим $\angle KSO = \arccos \frac{3}{5}$

Из гомететии получим, что $(KLM) \parallel$ тем же плоскостям.

т.е. $\cos \angle KSO = \frac{3}{5}$, то как $DA = x$, $BD = \frac{5x}{3}$, $x^2 + \frac{4r^2}{9} = \frac{25x^2}{9}$, $\frac{2r}{3} = \frac{4x}{3}$, $r = 2x$

Получим $AD = \frac{r}{2}$, $SD = \frac{5r}{6}$

По т. Пифагора в $\triangle SOK$. $SK = \sqrt{\frac{25r^2}{9} - r^2} = \sqrt{\frac{16r^2}{9}} = \frac{4r}{3}$

Тогда $\frac{SK}{SD} = \frac{\frac{4r}{3}}{\frac{5r}{6}} = \frac{4r}{3} \cdot \frac{6}{5r} = \frac{8r}{5r} = \frac{8}{5}$

Т.е. чтобы провести "верхний" тетраэдр в $SKLM$, нужно увеличить с.ч. в $\frac{8}{5}$, и $k = \frac{8}{5} \Rightarrow$ стороны увеличатся

$OK^2 = \frac{64}{25}$ ради $\triangle OBL_1 \Rightarrow$ сторона $\sqrt{\frac{64}{25}}$

Ответ: $1120 + 464 \cdot 2^{\frac{33}{2}}$ $\sqrt{7}$

Решение: считаем: $2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x$

замечим, что $y = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$ выпуклая вниз $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ с прямой не больше двух общих точек.

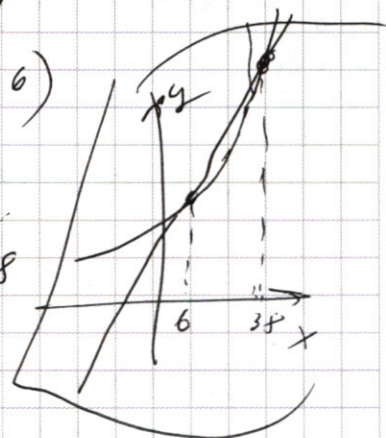
замечим, что при $x=6$ и при $x=38$ достигается равенство:

$$2^6 + 3 \cdot 2 \cdot 2^{33} = 76 + 2^{33} - 2 \cdot 1 \quad (x=6)$$

$$6 \cdot 2^{33} + 64 = 6 \cdot 2^{33} - 64$$

$$2^{38} + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot 38 \cdot 2^{32} - 2 \cdot 38$$

$$2^{34} (2^4 + 3) = 2^{34} \cdot 19 = 19 \cdot 2^{34}$$



Поэтому нам подойдут $x \in (6; 38)$, $x \in \mathbb{Z}$.

Итак, $76 + 2(2^{32} - 1)x > y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

Нам нужны все целые точки $y \in [2^x + 3 \cdot 2^{34}; 76 + 2(2^{32} - 1)x)$ для всех $x \in (6; 38)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

известно, что при целых x выражение целое, поэтому
на n на инт. $[a; b)$ будет $b - a$ целых чисел.

Т.е. у нас всего $\sum_{x=7}^{37} (76 + 2(2^{32} - 1)x - (2^x + 3 \cdot 2^{34}))$ целых тогда

$$76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 7 + 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 8 + \dots + 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 37 =$$

$$= 31 \cdot 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot (7 + \dots + 37) \quad (31 \text{ слагаемое})$$

$$= 76 \cdot 31 - 2 \cdot 682 + 2^{33} \cdot 682 - 2^6 \cdot 2^{33} - 2^4 - 2^8 - \dots - 2^{37} =$$

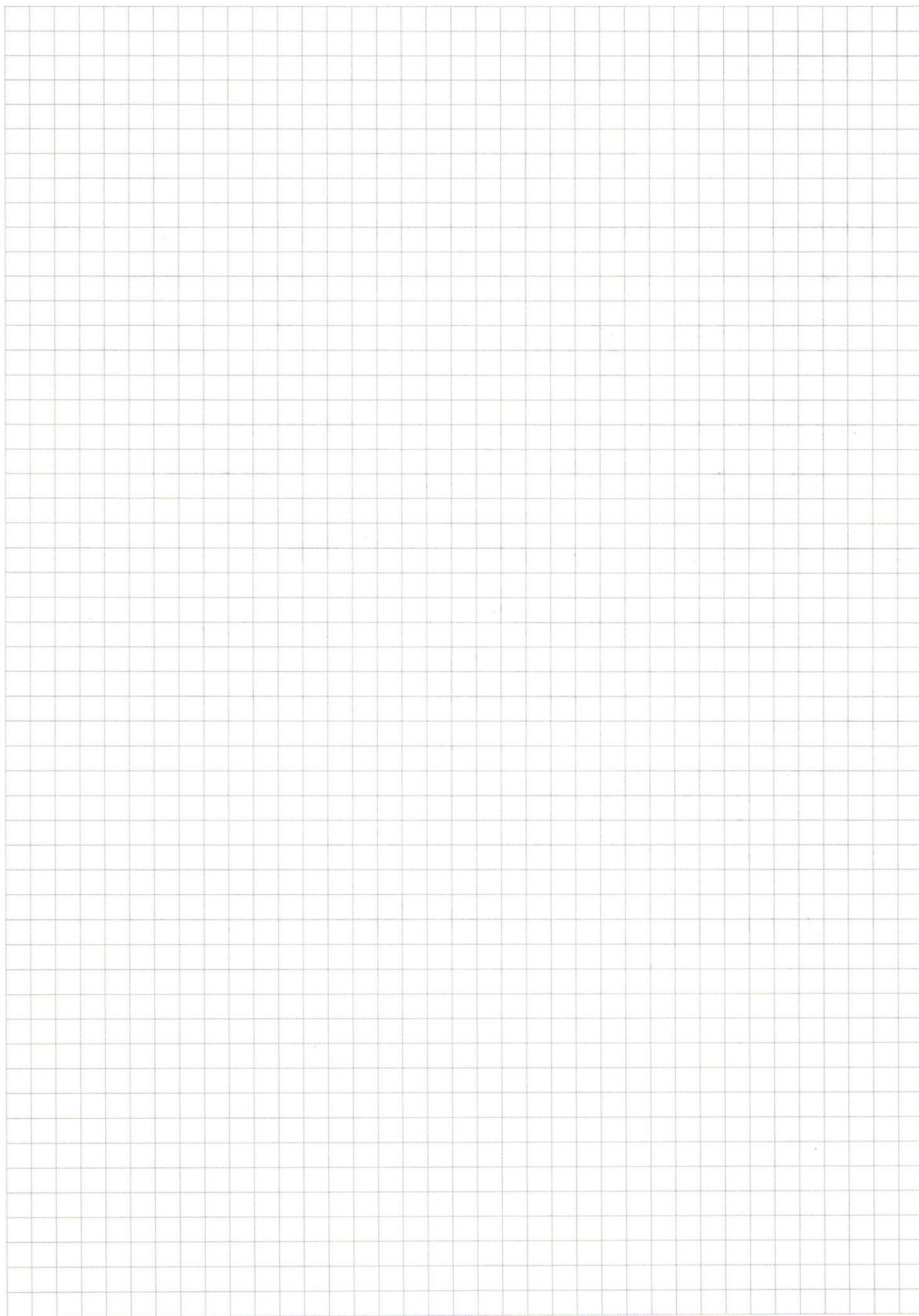
$$= 2356 - 1364 + 2^{33} \cdot 682 - 2^6 \cdot 2^{33} - 2^4 - 2^8 - \dots - 2^{37} =$$

$$= 992 - 5 \cdot 682 + 2^{33} \cdot 496 + 2^7 - 1 - 2^{38} + 1 =$$

Используем $1 + 2 + 4 + \dots + 2^a = 2^{a+1} - 1$.

$$= 992 - 5 \cdot 682 + 128 - 2^5 \cdot 2^{33} =$$

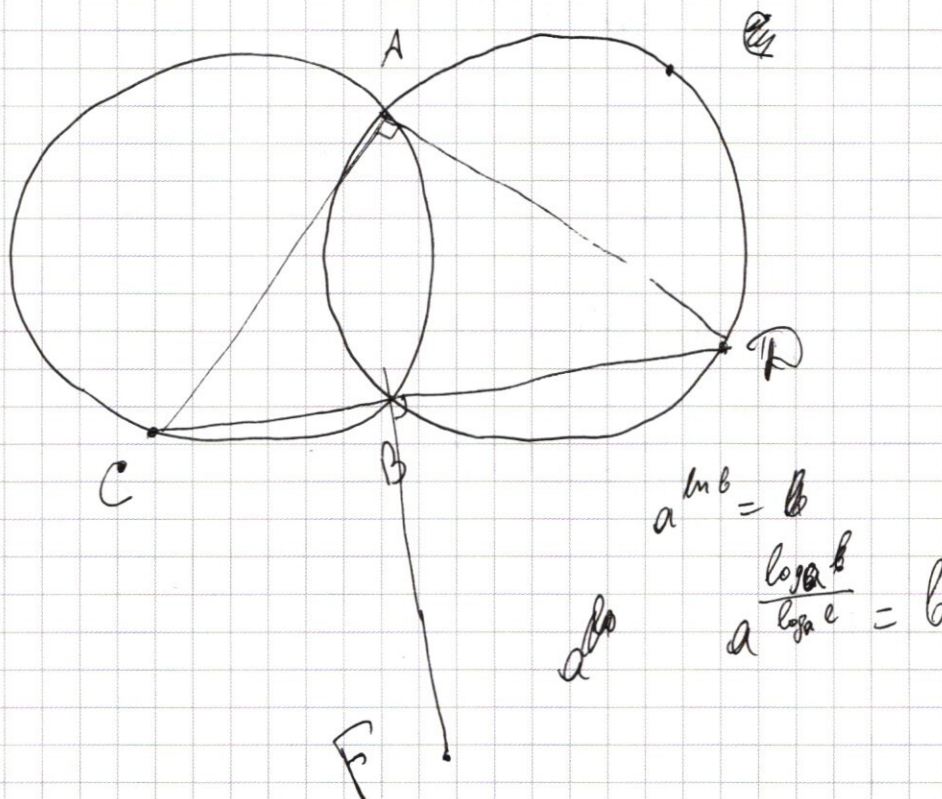
$$= 1120 + 2^{33} (496 - 32) = 1120 + 2^{33} \cdot 464$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$y^2 - y(4+x) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D_y = 16 + x^2 + 8x + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 =$$

$$y_{1,2} = \frac{4+x \pm (3x-4)}{2} = 2x; 4-x$$

$$\frac{x - 3x + 8}{3} = 4 - x$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = \frac{4-x}{x} \ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)}$$

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right) + 4\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^3}\right)}$$

$$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^3}\right)}$$

$$-2\ln x \log_{4-x} x = \ln\left(\frac{4-x}{x^3}\right) - 3\ln x$$

$$\frac{-2\ln^2 x}{\ln(4-x)} = \ln(4-x) - 3\ln x$$

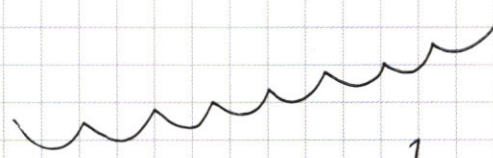
~~$$-2\ln^2 x = \ln^2(4-x) - 3\ln x$$~~

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > y$$

9	2	6	1		9
1	0	2	9		3
3	4	3			7
4	9				7
7					7
7					7
1					

$$76 + 2 \cdot 2^{33}$$



$$\{3, 3, 3, 7, 7, 7, 7\}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!}$$

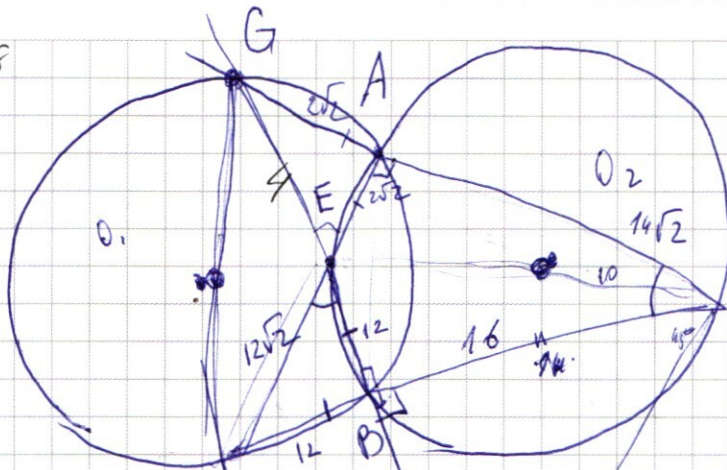
$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

328



$$\sqrt{14^2 \cdot 2 + 16^2 \cdot 2} =$$

$$= 7^2$$

$$16 \cdot 16 \cdot 2 =$$

$$= 16 \cdot 8$$

$$\frac{324}{81} = 4$$

$$\frac{81}{9} = 9$$

$$BDG \sim BEC$$

$$\frac{BD}{BE} = \frac{DG}{EC} = \frac{BG}{BC}$$

$$\frac{BF}{BE} = \frac{BG}{BC}$$

$$CB \cdot CD = CE \cdot CA$$

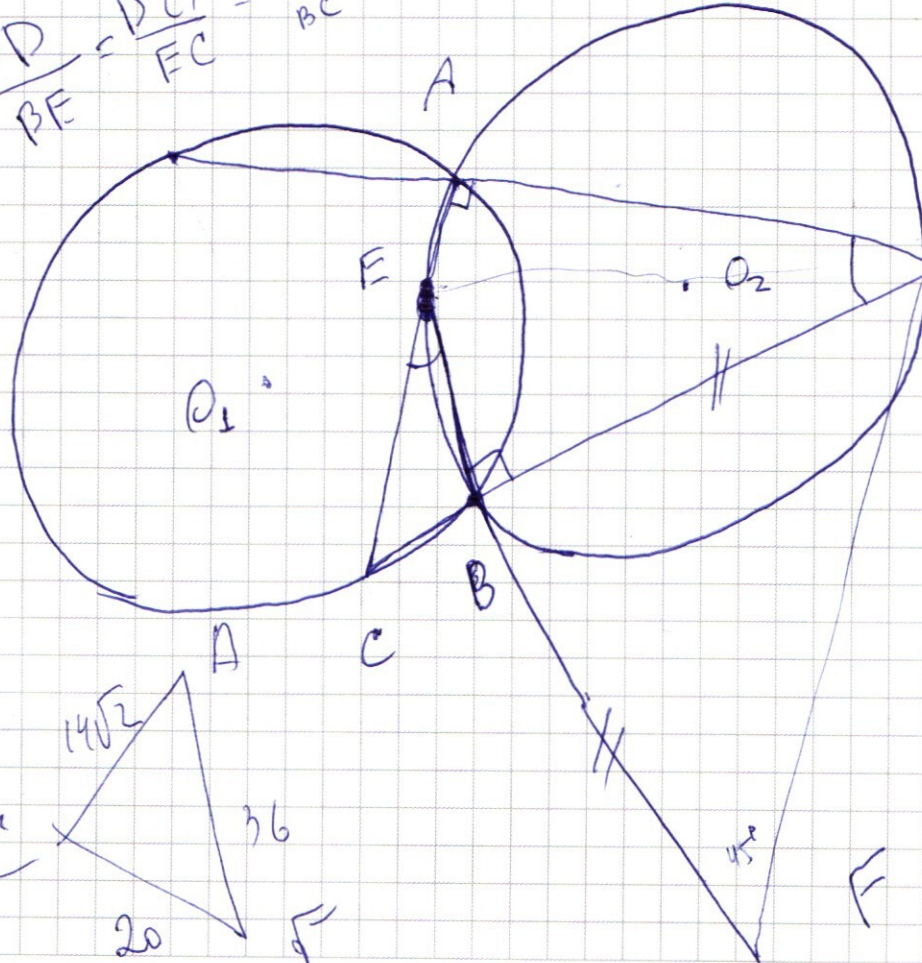
$$2\sqrt{2}$$

$$7 \cdot 4$$

$$49 + 16 = 65$$

$$7$$

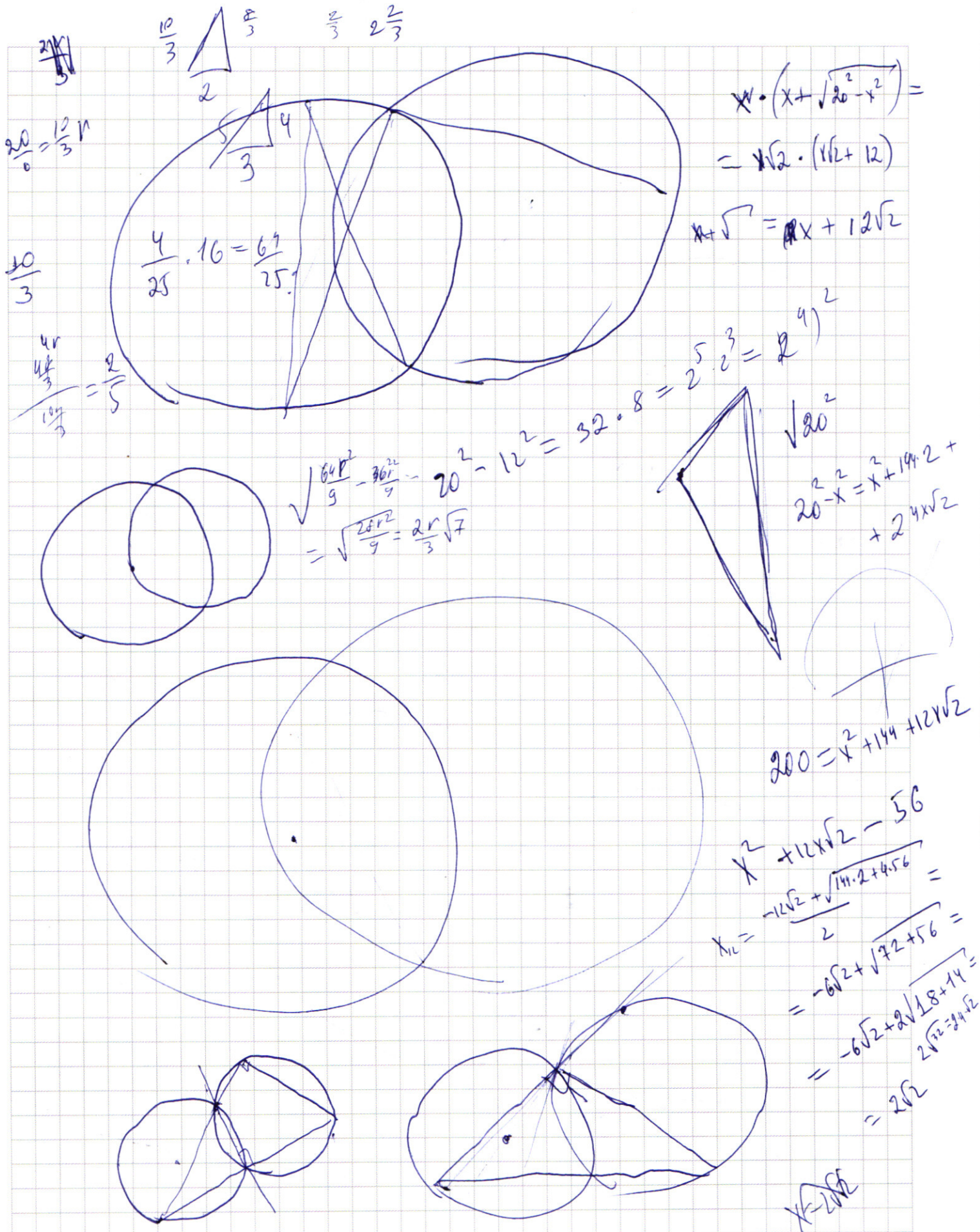
$$\begin{array}{r} 28 \\ 128 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 347 \overline{) 784} \\ \underline{28} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 392 \overline{) 784} \\ \underline{49} \\ 392 \\ \underline{49} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 784} \\ \underline{119} \\ 686 \\ \underline{686} \\ 0 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33} \cdot x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x = 6$$

76

33

2 · 38

38

2 + 3 · 2

34

2^x

$$(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$$

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e$$

[1 3)

34

2 · 19

1 2 3

[7; 38)

$$\frac{37 \cdot 38}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2711 \\ 992 \\ 7128 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 082 \\ 186 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37496 \\ 419 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 419 \\ -333 \\ \hline 703 \end{array}$$

$$31 \cdot 76 - 2(7 + \dots + 37)$$

$$7 + \dots + 37 = 1 + 2 + 3 + \dots + 37 = \frac{37 \cdot 38}{2} - 21$$

$$= \frac{37 \cdot 38}{2} - 21 = 682$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ 751 \\ \hline 228 \\ 2356 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2356 \\ 1369 \\ \hline 992 \end{array}$$

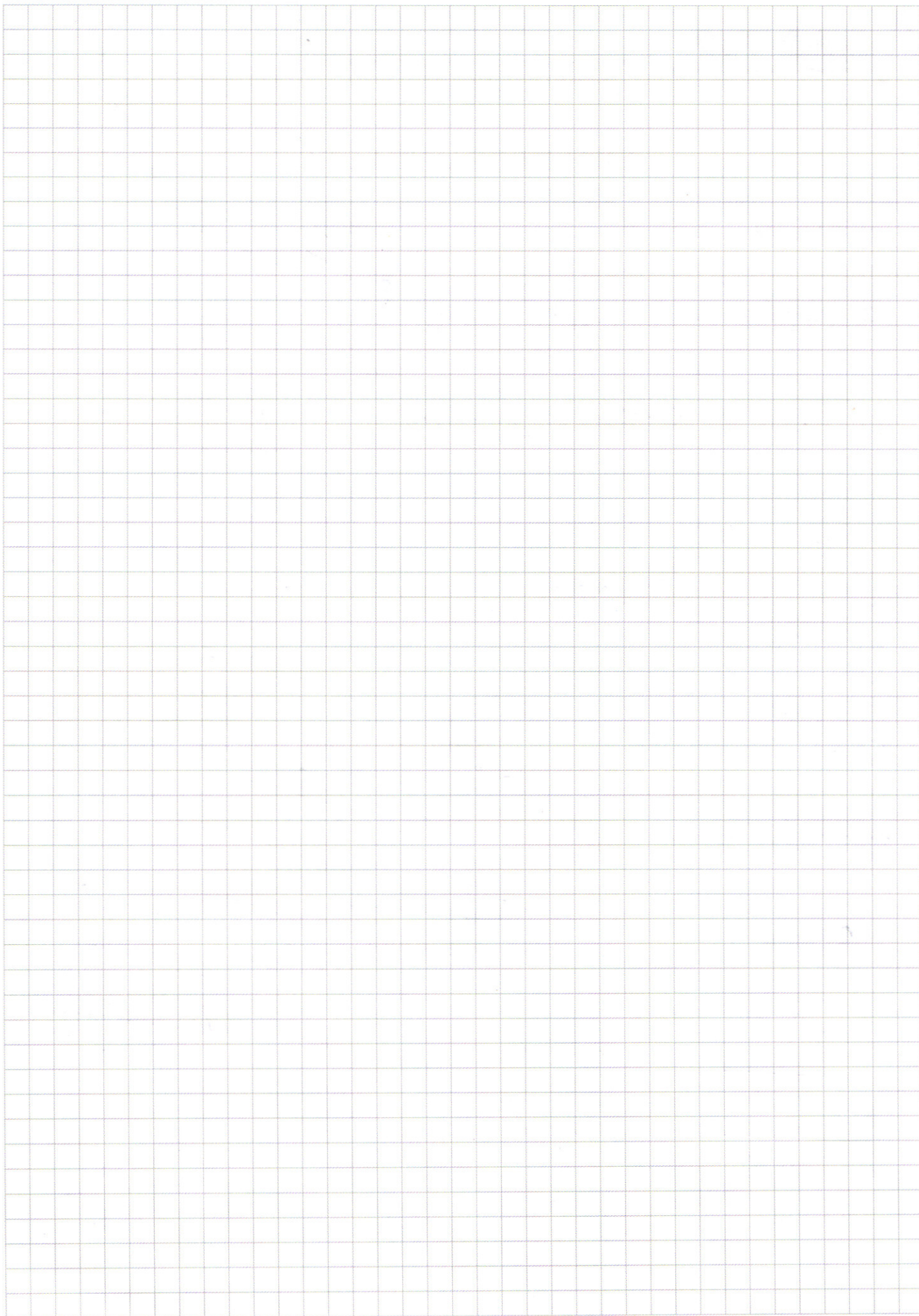
$$1 \cdot 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 31 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 682 \\ 756 \\ \hline 496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37-20 \\ 719 \\ -333 \\ \hline 403 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 203 \\ -21 \\ \hline \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+y+5=0$$

$$y = -x-5$$

$$y = x-5$$

$$2|y+5|=10$$

$$|y+5|=5$$

$$|10+y|+|y|=10$$

$$10+y$$

$$(4y^4)^{-\ln 2} = y^{\ln(\frac{4}{2^7})}$$

$$2^{-2\ln 2} \cdot y^{-4\ln 2} = y^{\ln 2}$$

$$\ln(2^{-2\ln 2} \cdot y^{-4\ln 2}) = \ln(y^{\ln 2} \cdot 2^{-7\ln 2})$$

$$-2\ln^2 2 - 4\ln 2 \ln y = \ln^2 y - 7\ln y \ln 2$$

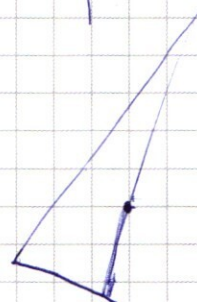
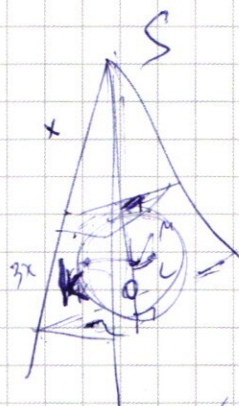
$$\ln^2 y - 3\ln y \ln 2 + 2\ln^2 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

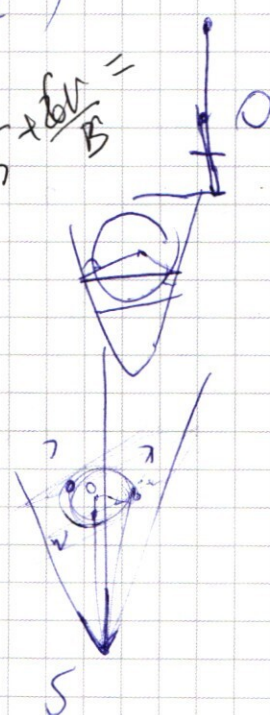
$$t=1$$

$$\ln y = \ln 2$$

$$\underline{\ln y} = 2\ln 2^2$$



$$\left(2^{-7}\right)^{\ln y} = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{1}{5}}}{5}$$



$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi k + \frac{5\pi}{8}$$

x

$$|x + y + 5| +$$

$$a - b - ab = a - c - d$$

M

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + 9x) + \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 4x \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 9x \cos 5x - \sqrt{2} \sin 9x \sin 5x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$