МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Произведение цифр равно $9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1$

т.е у нас может быть 2 случая:

1) цифры 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1

2) цифры 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1

Других вариантов нет, т.к. произведение любых двух множителей уже не однозначно (9 мы рассмотрим)

Тогда в первом случае выбираем 3 места из 8 для цифр „3", 3 места из оставшихся 5 для „7" и остальные места остаются единицам

Это $C_8^3 \cdot C_5^3$

Во втором случае выбираем аналогично 3 места для „7" и 3 из 5 для „1" а на 7 ~~место~~ месте ставим либо 9, либо 3. Это $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$

Ответ: $C_8^3 \cdot C_5^3 + 2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = 3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 =$

$= \frac{3 \cdot 8! \cdot 5!}{5! \, 3! \, 2! \, 3!} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 1680$

№2.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$

$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2 \sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

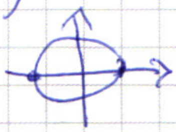
$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = \sin 2x \qquad (1)\\ \sin 7x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) = 0 \qquad (2)\end{array}\right.$$

(1) $\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\cos 2x - \cos(90 - 2x) = 0$

$-2\sin\frac{2x - 90 + 2x}{2}\sin\frac{2x + 90 - 2x}{2} = 0$

$\underset{\neq 0}{\sin 45^\circ}\,\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$



$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2x - \frac{\pi}{4} = \pi + \pi n$

$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$

$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

(2) $\sin 7x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$

$2\sin\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2}\cos\frac{7x + \frac{\pi}{4} + 2x}{2} = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0\\ \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi + \pi k\\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}\\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$; $\frac{3\pi}{36} + \frac{2\pi m}{9}$

№3.

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \qquad (1)\\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \qquad (2)\end{cases}$$

т.к. $x > 0$, то $y > 0$

(1) $(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$-\ln x \ln(x^2y^4) = \ln\left(\frac{y}{x^7}\right)\ln y$

$-\ln x\,(2\ln x + 4\ln y) = \ln y\,(\ln y - 7\ln x)$

Пусть $\ln x = a$ $\ln y = b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-a(2a+4b)=b(b-7a)$

$-2a^2-4ab=b^2-7ab$

$b^2+2a^2-3ab=0$

Решим относительно b

$D=9a^2-4\cdot 2a^2=a^2$

$b_{12}=\dfrac{3a\pm a}{2}=\left[\begin{array}{l}a\\2a\end{array}\right.$

т.е $\left[\begin{array}{l}\ln y=\ln x\\ \ln y=2\ln x\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ y=x^2\end{array}\right.$

(2) $y^2-y(x+4)-2x^2+8x=0$

$D=x^2+16+8x+8x^2-32x=$

$=9x^2+16-24x=(3x-4)^2$

$y_{12}=\dfrac{x+4\pm(3x-4)}{2}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}(x+\cancel{4}+3x-\cancel{4})=2x\\ \frac{1}{2}(x+4-3x+4)=-x+4\end{array}\right.$

т.е вся система равносильна

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=y\\y=x^2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y=2x\\y=-x+4\end{array}\right.\\ x,y>0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x,y>0\\ \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x=y\\y=2x\end{cases} & 1)\\ \begin{cases}x=y\\y=-x+4\end{cases} & 2)\\ \begin{cases}y=x^2\\y=2x\end{cases} & 3)\\ \begin{cases}y=x^2\\y=-x+4\end{cases} & 4)\end{array}\right.\end{cases}$

1) $\begin{cases}x=y\\y=2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2x\\y=2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, но $x,y>0$ не подходят

2) $\begin{cases}x=y\\y=-x+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-x+4\\x=y\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

3) $\begin{cases}y=x^2\\y=2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=2x\\y=2x\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0 \leftarrow \text{не подходит}\\x=2\end{array}\right.\\ y=2x\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

4) $\begin{cases}y=x^2\\y=-x+4\end{cases}$ $x^2=-x+4$ $x^2+x-4=0$ $D=17$ $x_{12}=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) подходит только $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$y=-x+4=\frac{1-\sqrt{17}}{2}+4=$

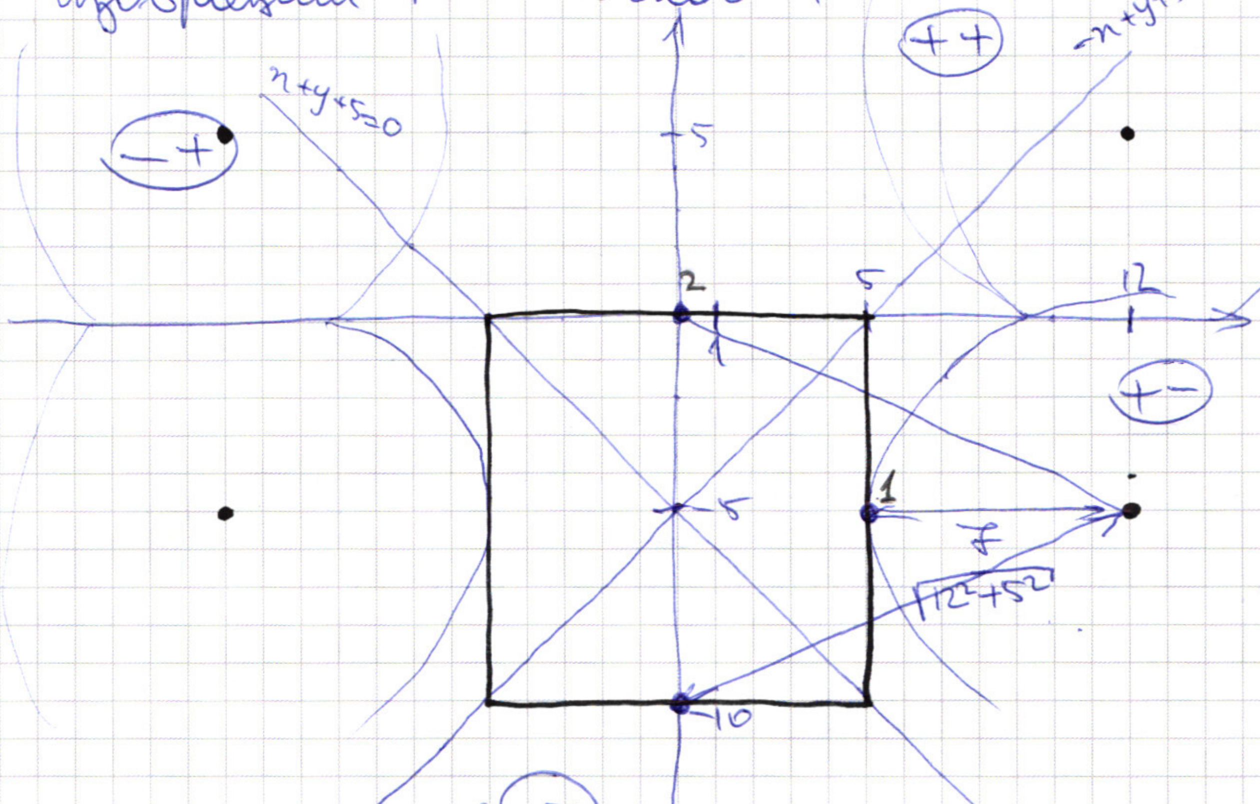
$=\frac{9-\sqrt{17}}{2}$

Ответ: $(2;4)\,(2;2)\,\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 & (1) \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a \end{cases}$$

(1) раскроем в зависимости от знака и изобразим на плоскости



$++ :\ \cancel{x}+y+\cancel{5}+y-\cancel{x}+\cancel{5}=\cancel{10}\quad y=0$

$+- :\ x+\cancel{y}+\cancel{5}-\cancel{y}+x-\cancel{5}=10\quad x=5$

$-- :\ -\cancel{x}-y-5-y+\cancel{x}-5=10\quad -2y=20\quad y=-10$

$-+ :\ -x-\cancel{y}-\cancel{5}+\cancel{y}-x+\cancel{5}=10\quad x=-5$

изобразим на плоскости

$(x-12)^2+(y-5)^2=a$ окружность с ц. в т. $O(12;5)$

и радиусом $\sqrt{a}$ т.к. стоят модули, то

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

все, что находится в 1 ой четверти отражается в остальные, т.е будут части окружностей с центрами в $(-12,-5)$ $(-12,5)$ $(+12,-5)$. Пусть $a'=\sqrt{a}$

Будем постепенно увеличивать $\sqrt{a}$ — радиус окружностей. При $a' \in (0;7)$ пересечения с квадратом нет. При $\boxed{a'=7}$ касание ровно 2 (справа и слева симметричная картинка)

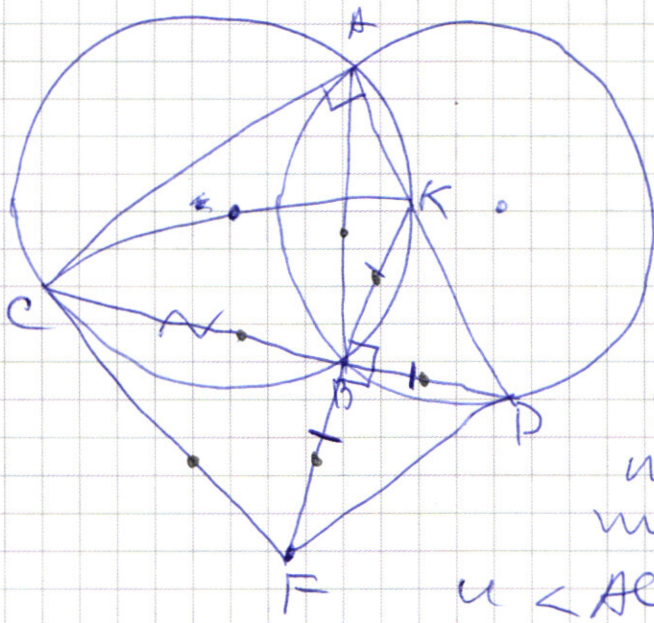
при $a' \in (7, \sqrt{5^2+7^2})$ в нижней половине с каждой стороны будет по 2 точки касания, при $a'=\sqrt{5^2+7^2}$ решения будут $(5;0)(-5;0)(5;-10)$ $(-5;-10)$ при $a' \in (\sqrt{5^2+7^2}; \sqrt{12^2+5^2})$ будет по два решения с каждой из сторон отн. оси y: верхнее пересечение и нижнее

При $a'=\sqrt{12^2+5^2}$ будет ровно 2 пересечения: в точках $(0;0)$ и $(0;-10)$; далее при увеличении a' уже не будет ни одного корня

Ответ: $a=7^2=49$

$a=(\sqrt{12^2+5^2})^2=12^2+5^2=169$

№6.



а) из $\triangle ABC$ по т. синусов
$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2R_1$$
из $\triangle ABD$ по т. синусов
$$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=2R_2$$
т.к. $R_1=R_2$, то
$\sin\angle ACB=\sin\angle ADB$
т.к. оба угла острые,
то $\angle ACB=\angle ADB$
и $\angle ACB+\angle ADB=90^\circ$, т.е
$\angle ACB=\angle ADB=45^\circ$

Отметим т. K пересечение перпендикуляров BK и AD. Заметим, что в четырехуг. AKBC $\angle A+\angle B=180^\circ$ т.е он вписан в первую окружность, т.е K лежит на окр. т.е CK — диаметр $CK=20$

Заметим, что $\angle KDB=45^\circ$ и $\angle BDF=45^\circ$, т.к. BDF — р/б, тогда $\triangle KDB=\triangle FDB$ (по двум углам и стороне), т.е $BK=BF=BD$

Заметим, что $\triangle CKB=\triangle CFB$ (по двум сторонам и углу м/у ними) т.е
$CF=CK=\boxed{20}$

б) $AB=2R\sin\angle ACB=2R\sin 45^\circ=2R\frac{\sqrt2}{2}=10\sqrt2$

В $\triangle CKB$ $KB^2=CK^2-BC^2=400-144=256=16^2$
т.е $KB=16$. Заметим, что $\angle BCK=\angle BAK$ т.к. опираются на одну BK. $\cos\angle BCK=\frac{CB}{KC}=$
$=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. Тогда в $\triangle BAK$ мы знаем
$AB=10\sqrt2$, $BK=16$ и угол $\cos\angle BAK=\frac{3}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По т. косинусов в $\triangle AKB$:

$KB^2 = AB^2 + AK^2 - 2AB\cdot AK\cdot \cos\angle BAK$

$256 = 200 + AK^2 - 2\cdot \cancel{10}^{2}\cdot\sqrt{2}\cdot AK\cdot \frac{3}{\cancel{5}}$

пусть $AK^2 = x$

$x^2 - 12\sqrt{2}x - 56 = 0$

$D = 144\cdot 2 + 4\cdot 56 = 16^2\cdot 2$

$x_{1,2} = \frac{-12\sqrt{2} + 16\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = AK$

тогда в $\triangle AKC$: $AC^2 = CK^2 - AK^2 =$

$= 400 - 4\cdot 2 = 392 = 7^2\cdot 8 = 7^2\cdot 2^2\cdot 2 \Rightarrow$

$AC = 14\sqrt{2}$, ~~$\sin\angle ACK = \frac{AK}{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{14\sqrt{2}} = \frac{1}{7}$~~

~~$\cos\angle ACK =$~~ $\sin\angle ACK = \frac{AK}{CK} = \frac{2\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

$\cos\angle ACK = \frac{AC}{CK} = \frac{14\sqrt{2}}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$\sin\angle KCF = \sin(2\angle KCB) = 2\sin\angle KCB\cos\angle KCB =$

$= 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$ $\quad\cos\angle KCF = \frac{7}{25}$

$\sin\angle ACF = \sin(\angle ACK + \angle KCF) =$

$= \frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{7}{25} + \frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{24}{25} = \frac{7\sqrt{2} + 24\cdot 7\sqrt{2}}{10\cdot 25} = \frac{\cancel{25}\cdot 7\cdot\sqrt{2}}{10\cdot\cancel{25}}$

$= \frac{7\sqrt{2}}{10}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2}AC\cdot CF\cdot\sin\angle ACF = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 14\sqrt{2}\cdot$

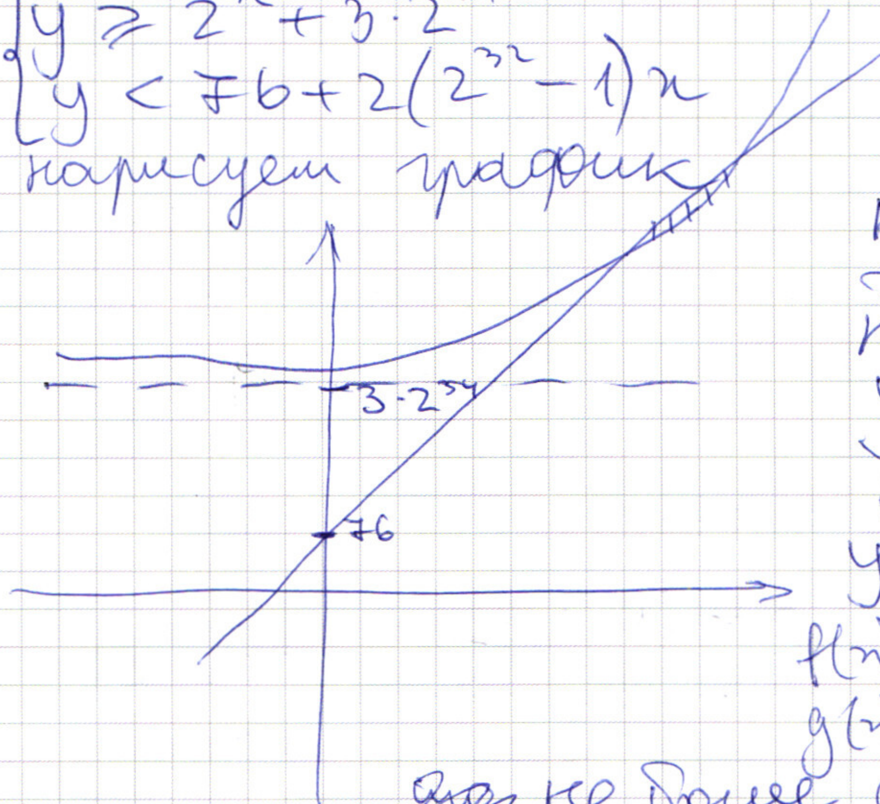
$\cdot\cancel{20}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{\cancel{10}} = 14\cdot 7\cdot 2 = 14^2 = 196$

Ответ: а) 20 б) 196

№7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

нарисуем график



нам нужна заштрихованная область, именно она удовлетворяет условию

У функций
$f(x)=2^x+3\cdot2^{34}$
$g(x)=76+2(2^{32}-1)x$
не более двух точек пересечения, т.к. они обе монотонно возрастающие функции. Найдем, с какого целого x $f(x)<g(x)$ (это наша область)

при $x=6$ $\quad 2^6+\cancel{3\cdot2^{34}} \triangledown 76+\cancel{3\cdot2^{34}}-12$

$64+3 \triangledown 64$

т.е это точка пересечения, но $g(x)$ второе нер-во строгое, так что оно не подходит

далее найдем вторую точку пересечения

при $x=38$ $\quad 2^{38}+3\cdot2^{34} \triangledown \cancel{76}+2\cdot38\cdot2^{32}-\cancel{76}$

$2^{32}(\underbrace{2^4}_{16}+\underbrace{3\cdot4}_{12}) \triangledown 38\cdot2^{33}$

т.е при $x\in[7;37]$ $x\in\mathbb{Z}$ существует лишь в пару некоторое мн-во y

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \quad \Big| \ln$ второе решаем отн. x, например

$-\ln x \ln(x^2y^4) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$

$-\ln x(2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$

Пусть $\ln x = a \quad \ln y = b$

$-a(2a+4b) = (b-7a)b$

$-2a^2 - 4ab = b^2 - 7ab$

$b^2 + 2a^2 - 3ab = 0$

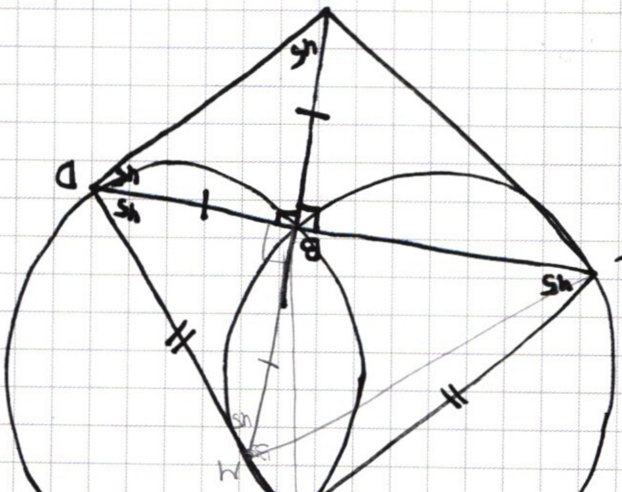
$D = 9a^2 - 8a^2 = a^2$

$b_{12} = \frac{3a \pm a}{2} = \left[\begin{matrix}2a\\ a\end{matrix}\right.$

$\{ \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\left[\begin{matrix}\ln x = \ln y\\ \ln y = 2\ln x\end{matrix}\right.\\ \left[\begin{matrix}y = 2x\\ y = -x+4\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$

$y=1$
$x=3$
$y=x$

$D = 1+16 = \sqrt{17}$



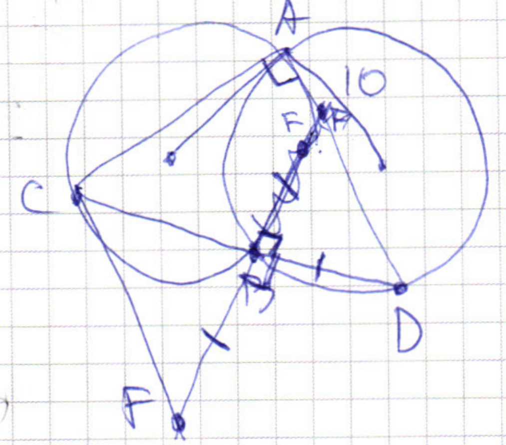
$DB \cdot DC = DM \cdot DA$

$\angle A$

$a \geq 0$

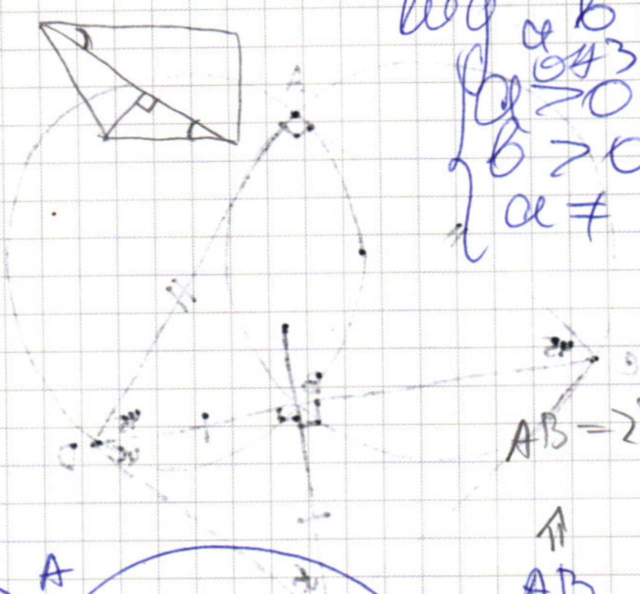
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



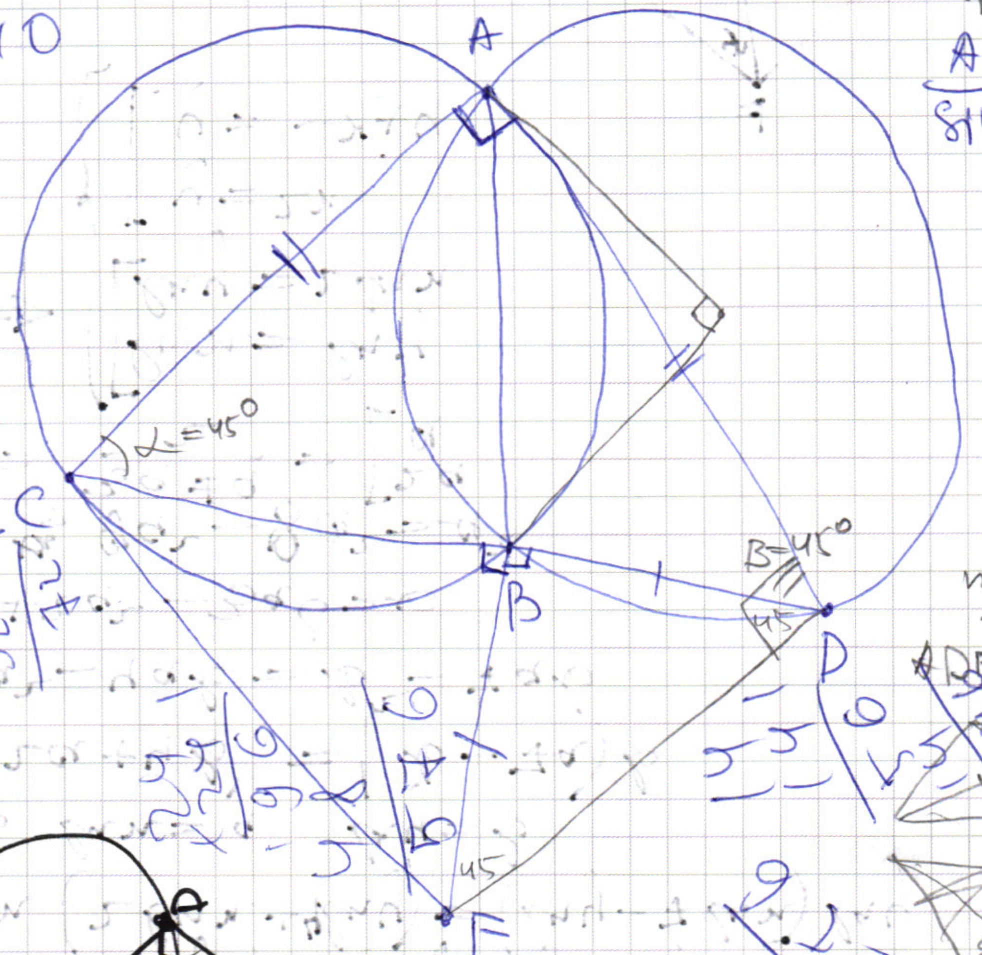
$\log_a b$

$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$



$AB = 2R\sin\alpha = 2\cdot 10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot 10$

$R=10$



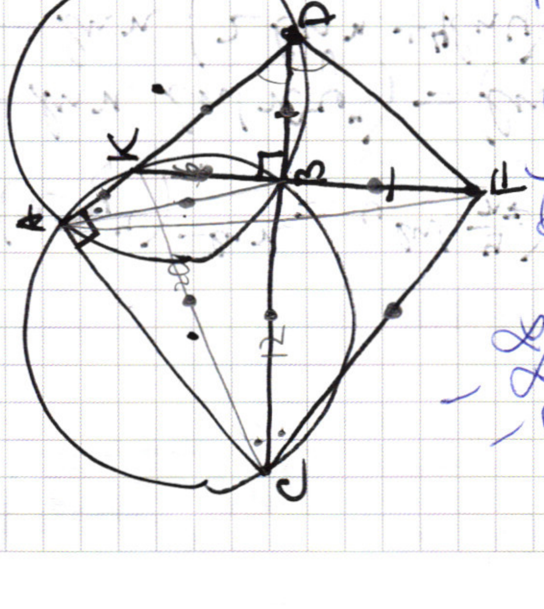
$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R = \frac{AB}{\sin\beta}$

$\alpha+\beta=90^\circ$

$\sin\alpha=\sin\beta \Rightarrow \alpha=\beta=45^\circ$

~~по тому~~

ABFC – трапеция



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$?

$\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$

$-2\sin 2x\sin 7x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$-\sqrt{2}(2\cos^2 2x - 1) = 0$

$-\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos 2x - 1)(\sqrt{2}\cos 2x + 1) = 0$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$(\cos 9x + \sin 9x) + (\sin 5x - \cos 5x) = \sqrt{2}\cos 4x$

$\sqrt{2}(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin}\cos 9x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 9x)$

ХЗ

$\sqrt{2}\sin(45+9x) + \sqrt{2}\sin(5x-45) = \sqrt{2}\cos 4x$

$\sin(45+9x) + \sin(5x-45) = \sqrt{2}\cos 4x$

$2\sin 2x\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4x}{2}\right) = \sqrt{2}\cos 4x$

$2\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$

$\underbrace{\cos 9x - \cos 5x}_{-2\sin 2x\sin 7x} - \underbrace{\sqrt{2}\cos 4x}_{\sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)} + \underbrace{\sin 9x + \sin 5x}_{2\sin 7x\cos 2x} = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$ №3.

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$\cancel{D = x^2 - 4(}$

$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2 + 16 + 8x - 4(8x - 2x^2) =$

$= x^2 + 16 + 8x - 32x + 8x^2 =$

$= 9x^2 + 16 - \underset{2\cdot3\cdot4}{24x} = (3x-4)^2$

$\boxed{y} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{x+\cancel{4}+3x-\cancel{4}}{2} = \boxed{2x} \\ \frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{-2x+8}{2} = \boxed{-x+4} \end{array}\right.$

$(y-2x)(y+x-4) = 0$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$

$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} \quad | \times y^{5\ln x}$

$x^{-2\ln x} y^{\ln x} = y^{\ln y + \cancel{2}2\ln x}$

$\ln 2 + \ln x + 2\ln x$

$x^{-2\ln x} \cancel{y}(2x)^{\ln x} = (2x)^{\ln 2x + 2\ln x}$

$2^{\ln x} x^{-2\ln x + \ln x} =$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$\cancel{x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} =}$

$\ln\left((x^2y^4)^{-\ln x}\right) = \ln\left(y^{\ln y - 7\ln x}\right)$

$-\ln x \ln(x^2y^4) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$ $\quad \ln x = a, \ \ln y = b$

$-\ln x(2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$

$-a(2a+4b) = b(b-7a)$

$-2a^2 + 4ab = b^2 - 7ab$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261 | 3 ; 3087 | 3 ; 1029 | 3 ; 343

343 | 7 ; 49

$21 \cdot 21 = 441$, $441 \cdot 441$, $441 \cdot 21 = 9261$

$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

т.е возможны 1) 3 3 3 7 7 7 1 1

2) 9 3 7 7 7 1 1 1

1) 3 3 3 7 7 7 1 1

$C_8^3 \cdot C_5^3$

выбрали место для 3

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

2) 9 3 7 7 7 1 1 1 ← оставшиеся

$C_8^3 \cdot 5 \cdot 4$

Ответ: 1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$ $C_8^3 \cdot C_5^3$ +

2) $9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ $C_8^3 \cdot 5 \cdot 4$

8 знаков

$\frac{8!}{5!\,3!}$

$24 \cdot 7 = 168$

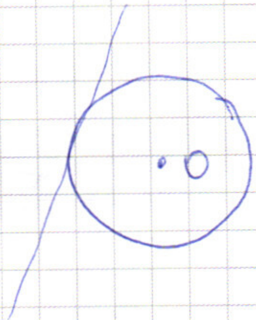
$56 \cdot 3 = 1680$

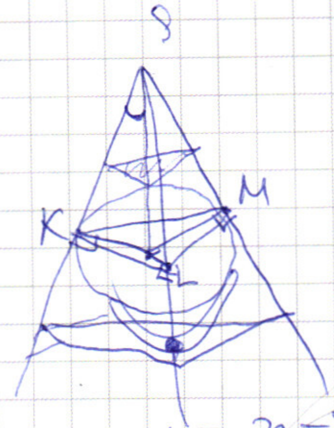
согласна

не учтены $\boxed{9} = 3 \cdot 3$

$C_8^3 \; C_5^3$

~~№1~~ помогите...
я не смогу





№5 $y=-x+5$ $y=x-5$

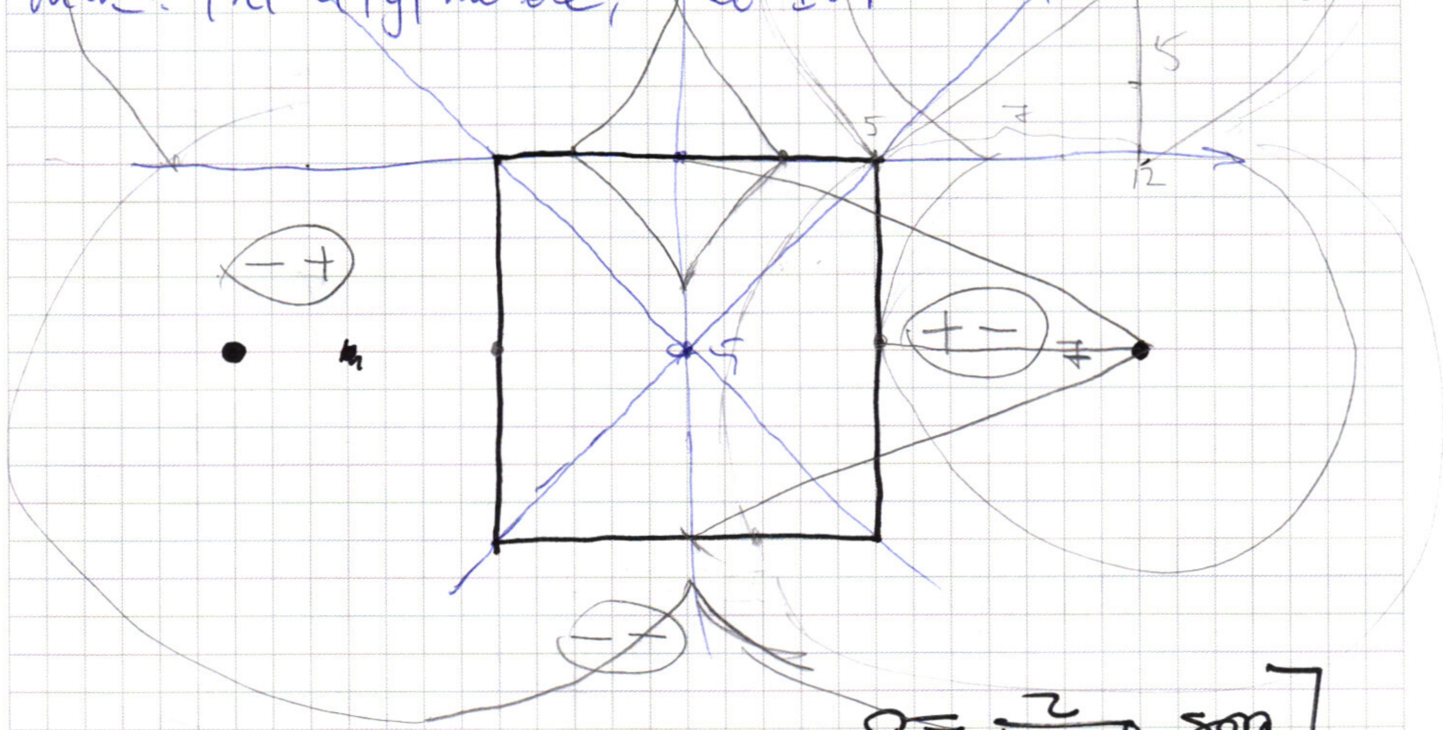
$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$

окр. с центром $(12,5)$ $R=\sqrt{a}$

т.к. $|x|$ и $|y|$ то все, что в I отражается

$++$: $x+y+5+y-x+5=10$
$2y=0$ $y=0$
$+-$: $x+y+5-y+x-5=10$
$2x=10$ $x=5$
$--$: $-x-y-5-y+x-5=10$
$-2y-10=10$
$-2y=20$
$y=-10$
$-+$: $-x-y-5+y-x+5=10$
$-2x=10$
$x=-5$



$144+25=169$

$2\sin 7x-\sqrt{2}(\cos 2x+\sin 2x)=0 \quad |:2$

$\sin 7x-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)=0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$

$\sin 7x-\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=0$

$2\sin\frac{7x-\frac{\pi}{4}-2x}{2}\cos\frac{7x+\frac{\pi}{4}+2x}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}=0\\ \cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}=0\end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

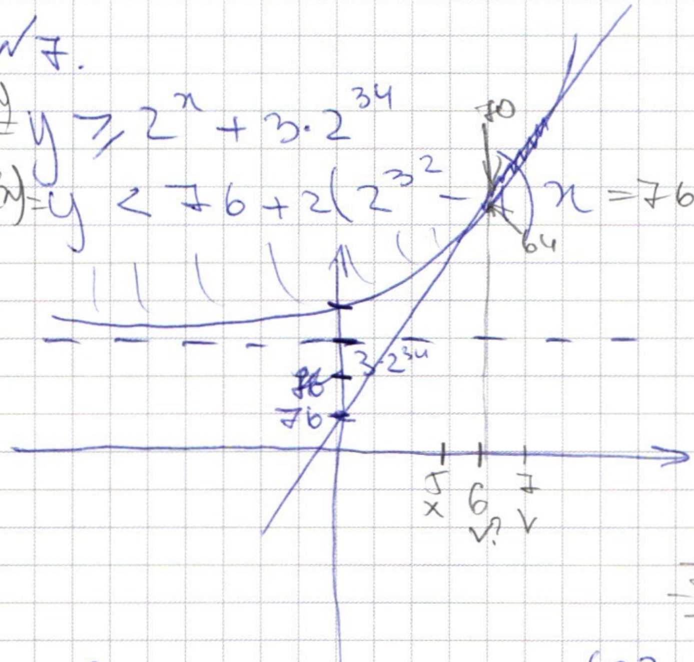
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(x) = y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$g(x) = y < 76 + 2(2^{32} - 1)x = 76 + 2^{33}\cdot x - 2x$



$f(5) = 32 + 3\cdot 2^{34} > g(5)$

$g(5) = 76 + 10\cdot 2^{32} - 10$
$= 66 + 10\cdot 2^{32}$

$32 + 3\cdot 2^{34} \overset{>}{\vee} 66 + 5\cdot 2^{33}$

$32 + 6\cdot 2^{33} \vee 66 + 5\cdot 2^{33}$

$2^{33} \overset{>}{\vee} 34$

$f(6) = \cancel{32} + 64 + 3\cdot 2^{34}$

$g(6) = 76 + 2^{34}\cdot 3 - 12$

$64 + \cancel{3\cdot 2^{34}} \overset{<}{\vee} 68 + \cancel{3\cdot 2^{34}}$

$76 - 14 = 62$; $76 - 12 = 66$

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2\cdot(2^{32} - 1)x$

$2^6 + \cancel{3\cdot 2^{34}} = 76 + \cancel{2^{33}\cdot 6} - 6$

$2^6 = 76 - 6 = 70$

$8\cdot 8$

$64 = 70$

$16 \times 16 = 256$

$f(7) = 128 + 3\cdot 2^{34}$

$g(7) = 76 + 2^{33}\cdot 7 - 14$

$128 + 3\cdot 2^{34} \overset{<}{\vee} 62 + 2^{33}\cdot 7$

$128 - 62 = 66$

$128 + 6\cdot 2^{33} \overset{<}{\vee} 62 + 2^{33}\cdot 7$

$66 \vee 2^{33}$

$f(8) = 256 + 3\cdot 2^{34}$

$g(8) = 76 + 2\cdot 8\cdot 2^{32} - 16$

$256 + 3\cdot 2^{34} \overset{<}{\vee} 60 + 4\cdot 2^{34}$

$196 \overset{<}{\vee} 2^{34}$

$f(10)$ $1024 + 3\cdot 2^{34} \overset{<}{\vee} 76 + 2^{34}\cdot 5 - 20$

$g(34)$ $2^{34} + 3\cdot 2^{34} \overset{>}{\vee} 76 + 2^{33}\cdot 2\cdot 34 - 2\cdot 34$

(20) $2^{20} + 3\cdot 2^{34} \vee 76 + 2^{33}\cdot$

№9

этов

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$ $\qquad 2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} \cdot x - 2x$

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x = 76 + 2^{33}x - 2x$

$f(100) = 2^{100} + 3 \cdot 2^{34} \overset{>}{\vee} 76 +$

$f(20) = \cancel{76 + 2^{33} \cdot 20 - 40} \vee \quad 2^{20} + 3 \cdot 2^{34} \overset{<}{\vee} 76 + 2^{34} \cdot 10 - 40$

$f(34) = 2^{34} + 3 \cdot 2^{34} \overset{<}{\vee} 76 + 2^{33} \cdot 34 - 68$

$2^{33}(2+6)$

$f(35) = 2^{35} + 3 \cdot 2^{34} \overset{<}{\vee} 76 + 2^{33} \cdot 35 - 70$

$2^{33}(\underset{10}{4+6})$

$f(36) = 2^{36} + 3 \cdot 2^{34} \vee 76 + 2^{33} \cdot 36 - 2 \cdot 36$

$2^{33}(8+6)$ $\quad \boxed{f(38)}\ 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} \cancel{\vee} \cancel{7}6 + 2^{33} \cdot 38 - \cancel{7}6$

$16 = f(37)$

$32 = f(38$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)