

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ 2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1 \\ \sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ ((|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

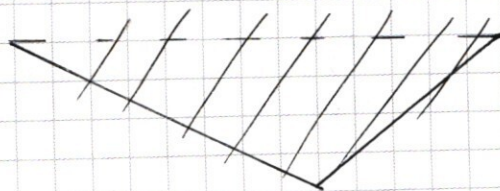
a) $|x+5+y| + |y-x+5| = 10$

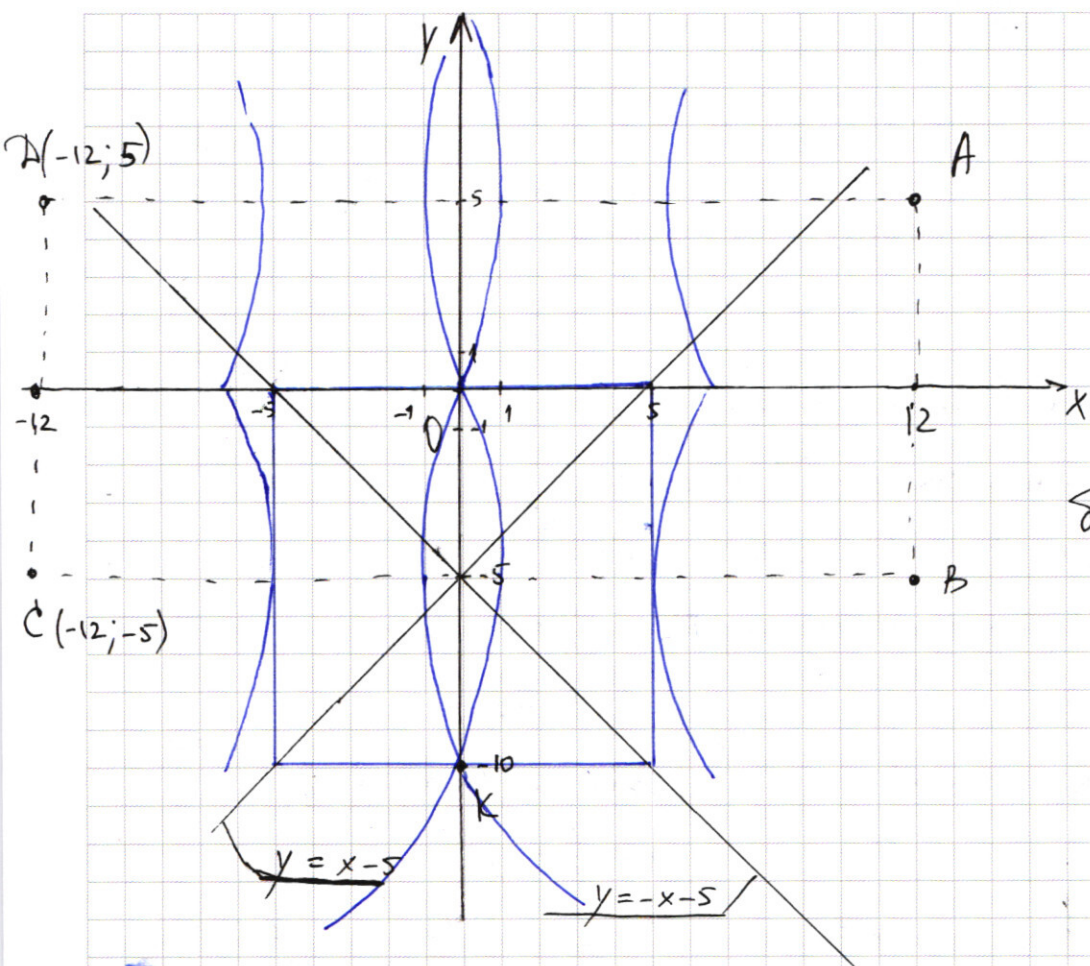
Построим $y = -x-5$ и $y = x-5$

$$1) \begin{cases} y \geq x-5 \\ y \geq -x-5 \\ x+5+y + y-x+5 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x-5 \\ y \geq -x-5 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ x+y+5 - y+x-5 = 10 \end{cases} \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ x = 5 \end{cases}$$





$$3) \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y \geq x-5 \\ y \leq -x-5 \\ x = -5 \end{cases}$$

$$\delta) (x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$1) (x-12)^2 + (y-5)^2 = a \quad (1)$$

Окружность с центром в $A(12; 5)$
и $R = \sqrt{a}$
($a \geq 0$)

$$2) (x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Объединение 4х окружностей, полученных путем отражения (1) относительно Ox и Oy .

При касании окружностей с центром B $x=5$ и окружностей с $x=-5$ система имеет 1 решение и $R = 12-5 = 7$. Тогда $a = 49$.

Далее при увеличении R система будет иметь 4 решения, пока R не станет больше $12+|-5|=17$. Кроме случая, когда окружность B и окружность C пересекутся в $O(0; 0)$ и $K(0; -10)$. В этом случае $R = BO = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Отсюда $a = 169$.

Ответ: $a = 49$, $a = 169$.

№ 3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

$$a) y - (x+4)y + (8x - 2x^2) = 0$$

$$\cancel{y^2 - (x+4)y + 2x^2} \\ y - (x+4)y + 2x(4-x) = 0$$

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ y &= 4-x \end{aligned} \quad (0 < x < 4, \text{ т.к. } y > 0)$$

$$\delta) (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{1}{x^2 y^{8 \ln x}} = \frac{y}{y^{7 \ln x}}$$

$$\cancel{1} \quad y^{7 \ln x} = x^2 y \cdot y^{8 \ln x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Если $y = 2x$, то

$$(2x)^{7\log x} = x^2 \cdot (2x)^{8\log x + 1}$$

$$2^{7\log x} \cdot x^{7\log x} = x^2 \cdot 2^{8\log x + 1} \cdot x^{8\log x + 1}$$

~~3. // $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1} = 336$~~

1 N 1

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

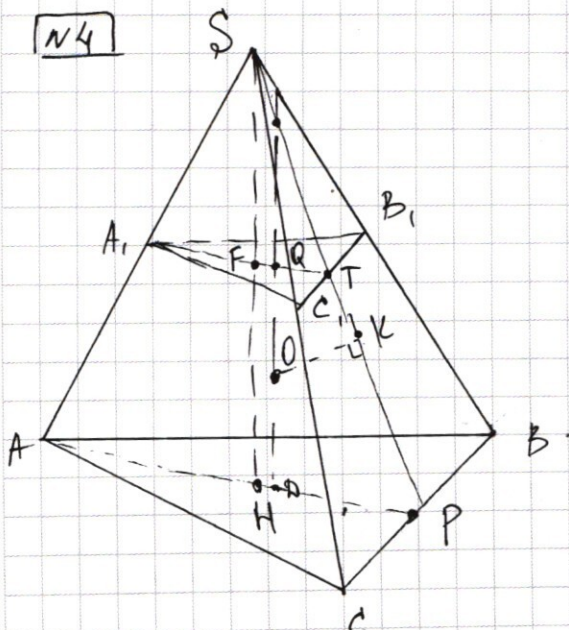
Так как число восьмизначное, то оно должно содержать еще две «1».

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Всего случаев (вместе с повторением) $P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1} = 336$

Ответ: 336.

1 N 4



1. Так как сфера вписанна, то её центр будет проектироваться на центр вписанной окружности в $\triangle ABC$. (в точку D)
2. У нас (A, B, C_1) и (ABC) — плоскости перпендикулярные SH (SH — высота пирамиды $ABC S$)
3. Тогда $ABC A, B, C_1$ — усеченная пирамида и $\triangle ABC \cap \triangle A, B, C_1$ и $K = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ ($\frac{S_{A, B, C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$)
4. Т.к. $QD \perp (ABC)$, $FH \perp (ABC)$, то $QD \parallel FH$.
Т.к. $QD \parallel FH$ и $(ABC) \parallel (A, B, C_1)$,
($(ABC) \perp SH$, $(A, B, C_1) \perp SH \rightarrow (A, B, C_1) \parallel (ABC)$),
то $FH = DQ = 2R$ (R — радиус шара)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 5x \overset{-\cos 5x}{\cancel{\sin 5x}} - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x \right) + \cancel{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin (7x) \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} \cos 9x &= \cos(5x + 4x) = \cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x \\ \sin 9x &= \sin(5x + 4x) = \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x \end{aligned}$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x) - \sin 5x \sin 4x + \sin 5x (\cos 4x) + \sin 4x \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x - \cos 5x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x + \sin 4x - 1) + \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) - \sin 4x (\sin 5x - \cos 5x) + \sin 5x - \cos 5x = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) - (\sin 5x - \cos 5x) (\sin 4x - 1) = 0$$

$$\cos 4x \cdot \sqrt{2} \left(\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \right) - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) (\sin 4x - 1) = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y \cdot y^{\ln x} \cdot y^{\ln 7} \cdot x^2 - y^{\ln 7} = 0$$

$$y^{\ln 7} (y^{\ln x + 1} \cdot x^2 - 1) = 0$$

$$y^{\ln x + 1} \cdot x^2 = 1$$

$$y^{\ln x + 1} = \frac{1}{x^2}$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\left| \frac{x+(y+5)}{x+5} \right| + \left| \frac{-x+(y+5)}{5-x} \right| = 10$$

$y > -5$

	$-(y+5)$		$y+5$	
$x+(y+5)$	-		+	
$-x+(y+5)$	+		+	-

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

a) $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$$\begin{cases} y > -x-5 \\ y > x-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > -5-x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

	$-x-5$		$x-5$	
$y+x+5$	-	+		+
$y-x+5$	-	-		+

$x < 0$

	$-x-5$		$x-5$	
$x+y+5$	-	+		+
$-x+y+5$	+	-		-

1) $x \geq 0$

$$\begin{cases} y < -x-5 \\ -x-y-5 - y+x-5 = 10 \\ -2y = 20 \\ y = -10 \end{cases}$$

2) $-x-5 < y < x-5$

$$\begin{cases} x+y+5 - y+x-5 = 10 \\ 2x = 10 \\ x = 5 \end{cases}$$

3) $y > x-5$

$$\begin{cases} x+y+5 + y-x+5 = 10 \\ 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x < 0$

	$-x-5$		$x-5$	
$y+x+5$	-	+		+
$y-x+5$	-	-		+

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ 2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1 \\ \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 7x - 2(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x) = 0 \\ 2\sin 7x - 2\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

$a \log_b a = a^{\frac{1}{\log_a b}} = b^{\log_a a \cdot \log_a b} = b^1 = b$

$b \log_a b = b^{\frac{1}{\log_b a}} = a^{\log_b b \cdot \log_b a} = a^1 = a$

$3 \log_3 3 = 3$

123) $\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

или: $x > 0, y > 0.$

а) $y^2 - (x+4)y + (8x - 2x^2) = 0$

$D = (x+4)^2 - 4(8x - 2x^2) = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2}$

$y_1 = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$

$y_2 = \frac{x+4-3x+4}{2} = \frac{8-2x}{2} = 4-x.$

($0 < x < 4$)

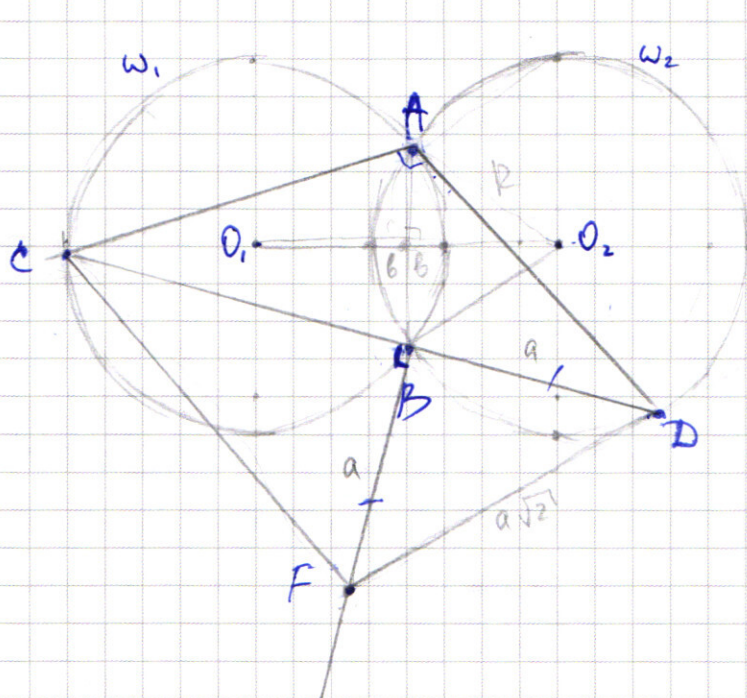
б) $x^2 y^4 \cdot y^{\ln x - \ln x^2} = y^{\ln x^2} = \frac{y}{y^{\ln x^2}} \quad (1)$

$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = \frac{1}{x^{2\ln x} y^{4\ln x}} = \frac{1}{x^2 y^4 \ln x^2} \quad (2)$

Тогда, $(1) = (2) \Rightarrow$

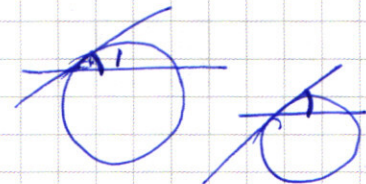
$\Rightarrow \frac{1}{x^2 y^4 \ln x^2} = \frac{y}{y^{\ln x^2}}$

$y x^2 \cdot y^{\ln x^2} = y^{\ln x^2}$



$$R=10$$

R

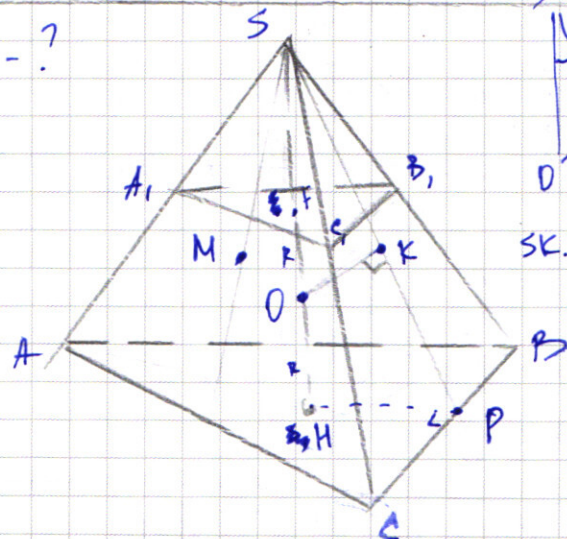
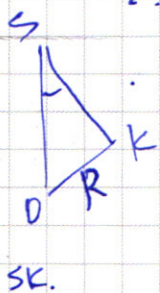


Т.к. b — окружность W_1 ,
 AD — касат., AC — диаметр, то
 $\angle ABC = 2\angle DAC = 40^\circ$.
 Тогда AC — диаметр ($AC=20$)



$$SX = \frac{5}{2}b$$

$$y = \frac{b}{2}$$



$(ABC) \perp SO$, $S_{ABC} = 16$
 $(A, B, C) \perp SO$, $S_{A, B, C} = 1$

$$\frac{SF}{SS_1} = \frac{1}{16} = \frac{b}{16b} \quad \left| \frac{b}{b+2R} = \frac{1}{16} \right. \quad \left. \begin{array}{l} b+2R=16b \\ 2R=15b \\ R=\frac{15}{2}b \end{array} \right.$$

$\triangle SOK \sim \triangle SHP$ $\Rightarrow \frac{SO}{SP} = \frac{OK}{HP}$

У $\triangle SOK$ $\sin \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{b+R} = \frac{\frac{15}{2}b}{b+\frac{15}{2}b} = \frac{\frac{15}{2}b}{\frac{17}{2}b} = \frac{15}{17}$

Тогда $\alpha = \arcsin \frac{15}{17}$

$\triangle SOK \sim \triangle SHP$ и $\frac{b}{b+2R} = \frac{1}{4} \rightarrow 4b = b+2R \rightarrow R = \frac{3}{2}b$

в $\triangle SOK$ $\sin \alpha = \frac{R}{b+R} = \frac{\frac{3}{2}b}{b+\frac{3}{2}b} = \frac{3}{5}$

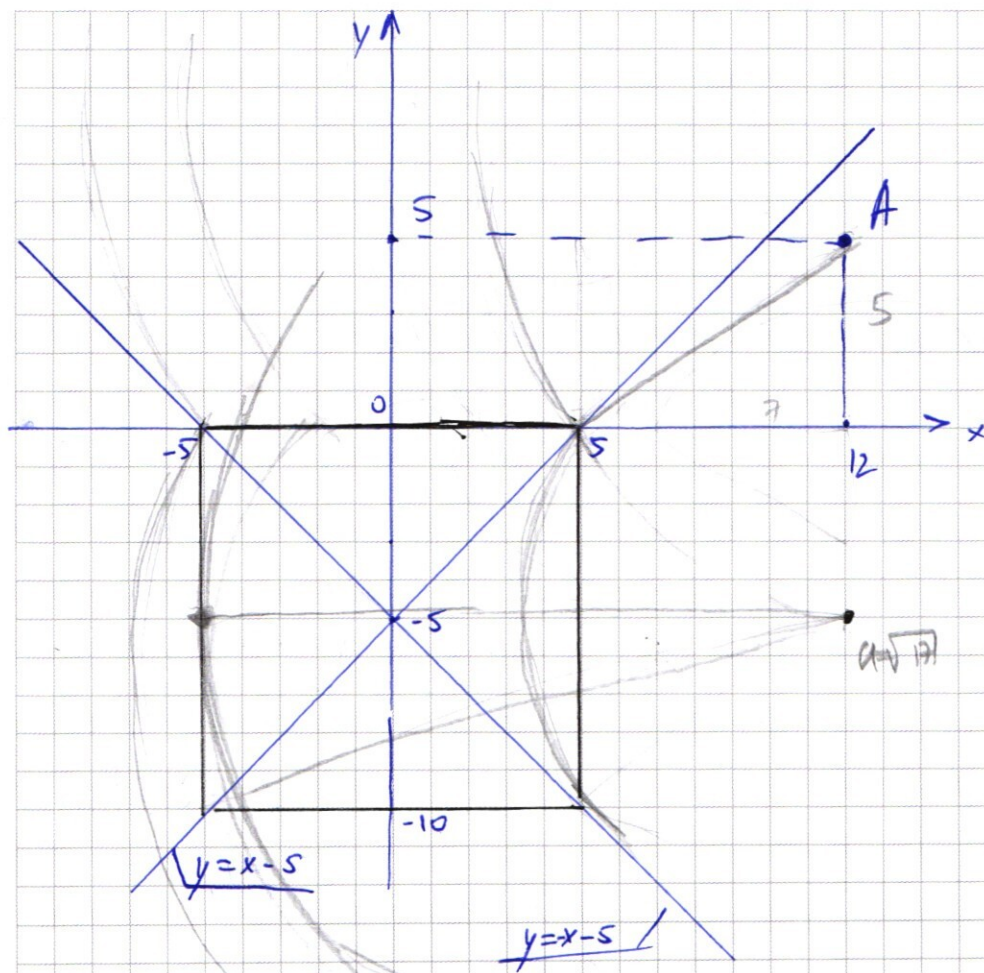
$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$

$\triangle KLM \sim \triangle A, B, C$
 $S' = \frac{36}{25}$

$k = \frac{S_{SOK}}{S_{SN}} = \frac{ET}{NK} = \frac{SF}{SN} = \frac{b}{\frac{8}{5}b} = \frac{5}{8}$

$SK = SO \cos \alpha =$
 $(\text{у } \triangle SOK) = (b+R) \cos \alpha =$
 $= \frac{17}{2}b \cdot \frac{4}{5} = 2b$
 у $\triangle SPK$ $SN = SK \cos \alpha =$
 $= 2b \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}b$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$1) \begin{cases} y \geq x - 5 \\ y \geq -x - 5 \end{cases}$$

~~$0/0/0 \rightarrow 0/0/0$~~

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$2) \begin{cases} y \geq -x - 5 \\ y \leq x - 5 \end{cases}$$

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

р.н.

$$3) \begin{cases} x + y + 5 - y + x - 5 = 10 \\ 2x = 10 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y \leq \\ y \leq \end{cases}$$

$$-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

$$4) \begin{cases} y > x - 5 \\ y < -x - 5 \end{cases}$$

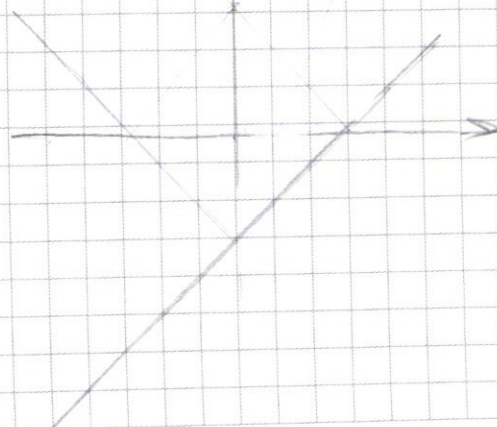
$$x = -5$$

$$5) (x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$$

$$(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$$

Окружность с центром в $A(12; 5)$

$$\frac{48}{7} = 336$$



$$\begin{array}{r|l} 9261 & 9 \\ 9 & 1025 \\ \hline 26 & 9 \\ 18 & 12 \\ \hline 81 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1025 & 3 \\ 9 & 343 \\ \hline 12 & 13 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 13 & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 2 \\ 28 & 49 \\ \hline 63 & \end{array}$$

7 7 7 . 3 3 3 . 1 1

$n=7$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

1) $y = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$y, x \in \mathbb{Z}$. Кон-то xy .

$$0 < 2^x < \infty$$

$$3 \cdot 2^{34} < 2^x + 3 \cdot 2^{34} < \infty$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y \leq 76 + 2^{35} - 2x - 2^{33} - 2x.$$



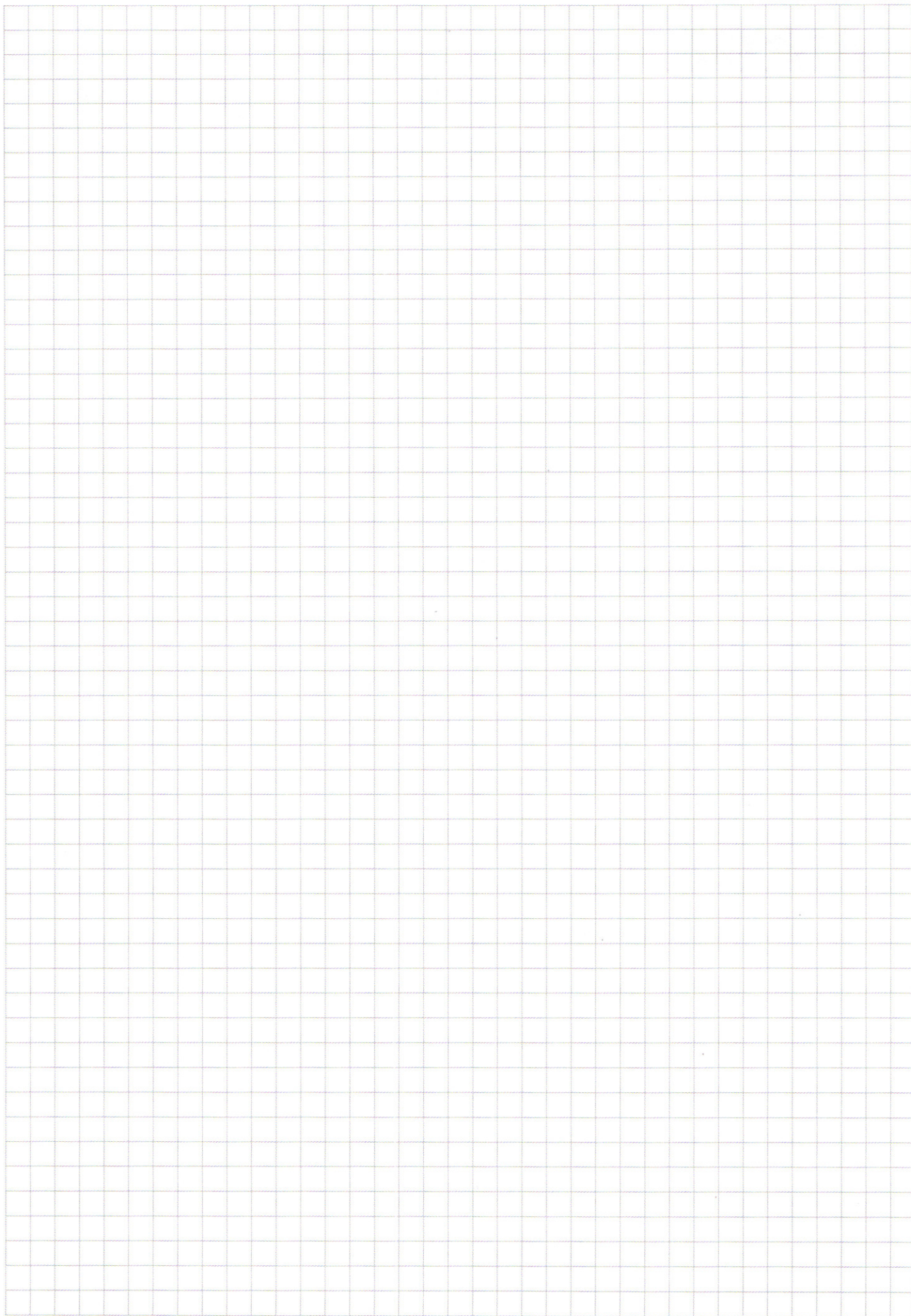
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)