МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) Знаки выражений под модулями зависят от ~~знаков~~ функций

$y_1 = -x-5$
$y_2 = x-5$

Изобразим их на графике. Они делят коорд. пл-ть на 4 различн. участка. Рассмотрим их:

а) $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ x+y+5+y-x+5 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$

б) $\begin{cases} y < -x-5 \\ y > x-5 \\ -x-y-5+y-x+5 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -5$; $y \in R$ – б. много решений.

~~Подставляем во (2)~~

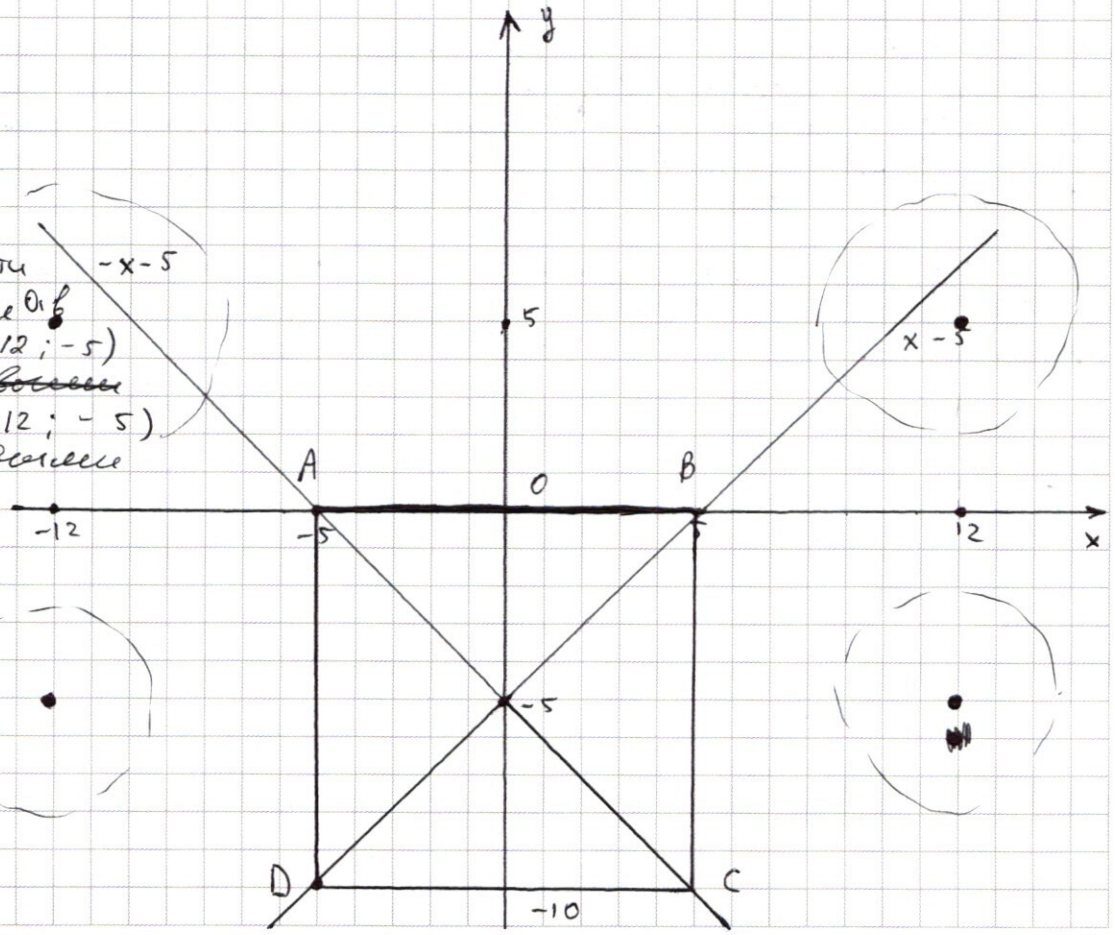
$\begin{cases} y < 0 \\ y > -10 \\ x = 5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} y > -x-5 \\ y < x-5 \\ x+y+5-y+x-5 = 10 \end{cases}$

$\begin{cases} y > -10 \\ y < 0 \\ x = 5 \end{cases}$

г) $\begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \\ y = -10 \end{cases}$

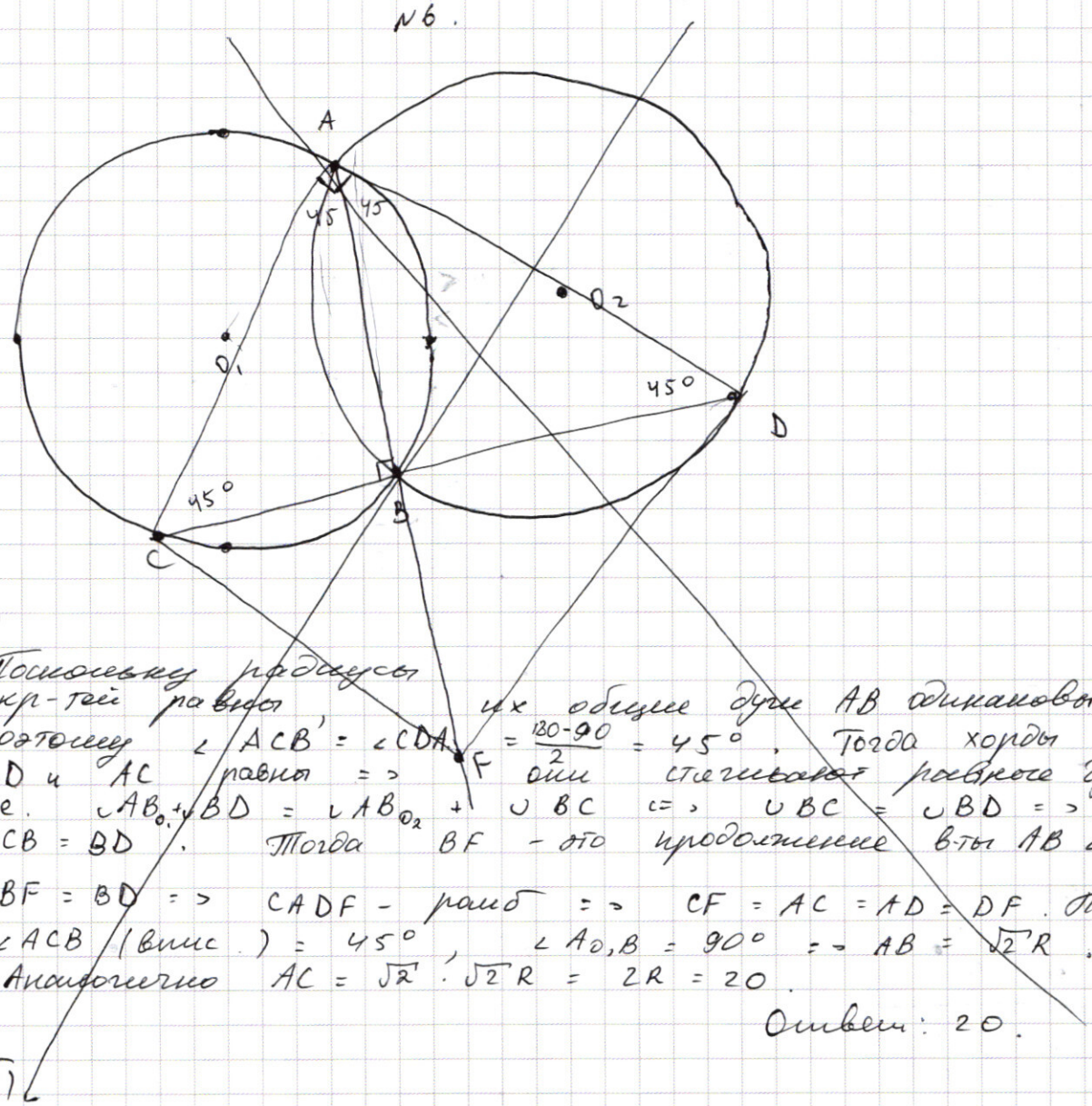
(2)
Это у-ние задает 4 окр-ти с центрами в $(12;5)$, $(-12;-5)$ ~~с одинаковыми~~ $(-12;5)$ и $(12;-5)$ с одинаковыми радиусами $R = \sqrt{a}$.



Система имеет ровно 2 решения, когда квадрат, заданный (1) пересекается с 4 мя окр-тями только в 2ух точках. Это происходит либо когда 2 нижние окр-ти касаются отрезков AD и BC, т.е. при $a = 49$, либо когда 2 верхние окр-ти проходят через точки D и C, т.е. при $a = 15^2 + 17^2 = 514$.

Ответ: 49 ; 514

№6.



а)

Поскольку радиусы окр-тей равны, их общие дуги AB одинаковы поэтому $\angle ACB = \angle CDA = \frac{180-90}{2} = 45°$. Тогда хорды AD и AC равны => они стягивают равные дуги, т.е. $\smile AB_{O_1} + \smile BD = \smile AB_{O_2} + \smile BC \Leftrightarrow \smile BC = \smile BD \Rightarrow$ $CB = BD$. Тогда BF – это продолжение в-ты AB $\triangle CAD$.

$BF = BD \Rightarrow CADF$ – ромб $\Rightarrow CF = AC = AD = DF$. Поскольку $\angle ACB$ (впис.) $= 45°$, $\angle AO_1B = 90° \Rightarrow AB = \sqrt{2}R$.
Аналогично $AC = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}R = 2R = 20$.

Ответ: 20.

б)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

* * * * * * * *

$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

Возможно 2 варианта:

Число состоит из

3×3
7×3
1×2

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 =$

$= \frac{8!}{3!\,\cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3!\,\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{2!} = \frac{8!}{2^3 \cdot 3^2}$

3×1
9×1
7×3
1×3

$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 =$

$= \frac{8!}{\cancel{7!}} \cdot \frac{\cancel{7!}}{\cancel{6!}} \cdot \frac{\cancel{6!}}{3!\,\cancel{3!}} \cdot \frac{3!}{3!} =$

$= \frac{8!}{2^2\,3^2}$

$N = \frac{8!}{2^2 3^2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3 \cdot 8!}{2^3\,3^2} = \frac{\cancel{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{24}} =$

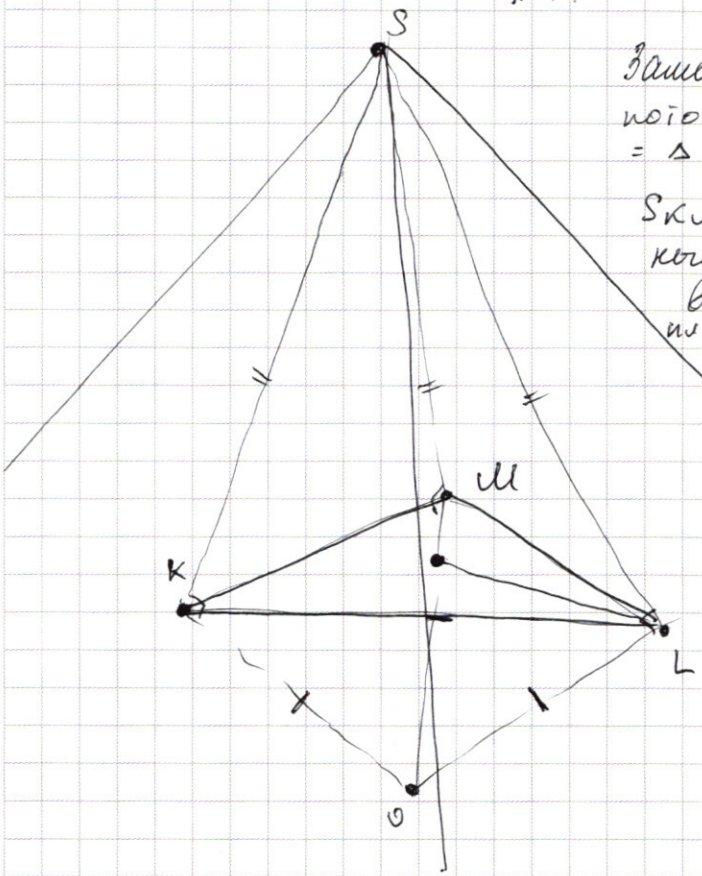
$= 30 \cdot 56 = 1680$

Ответ: 1680.

№ 2.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

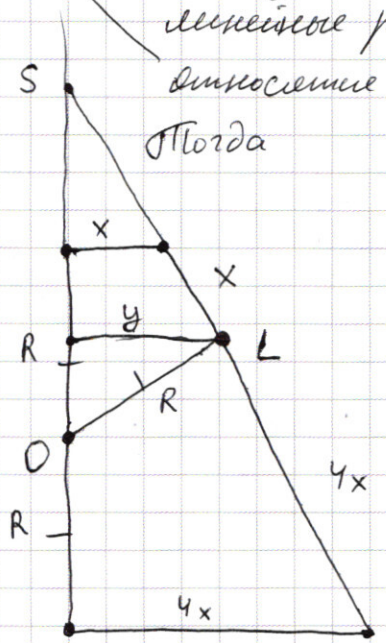
№4.



Заметим, что $SK = SM = SL$, потому что $\triangle SLO = \triangle SKO = \triangle SMO$ по катету и гипот.

$SKML$ и $OKML$ - прав. треугольные пирамиды с общим основанием, поэтому $SO \perp$ пл. KML. В сечениях, перп. SO и касающихся сферы отмечены точки их пересечения с SO. Площади этих сечений относятся как $\frac{1}{16}$. Значит, их линейные размеры относятся как $\frac{1}{4}$.

Тогда



$y = \frac{8}{5}x$. Значит, из подобия площадь искомого сечения равна

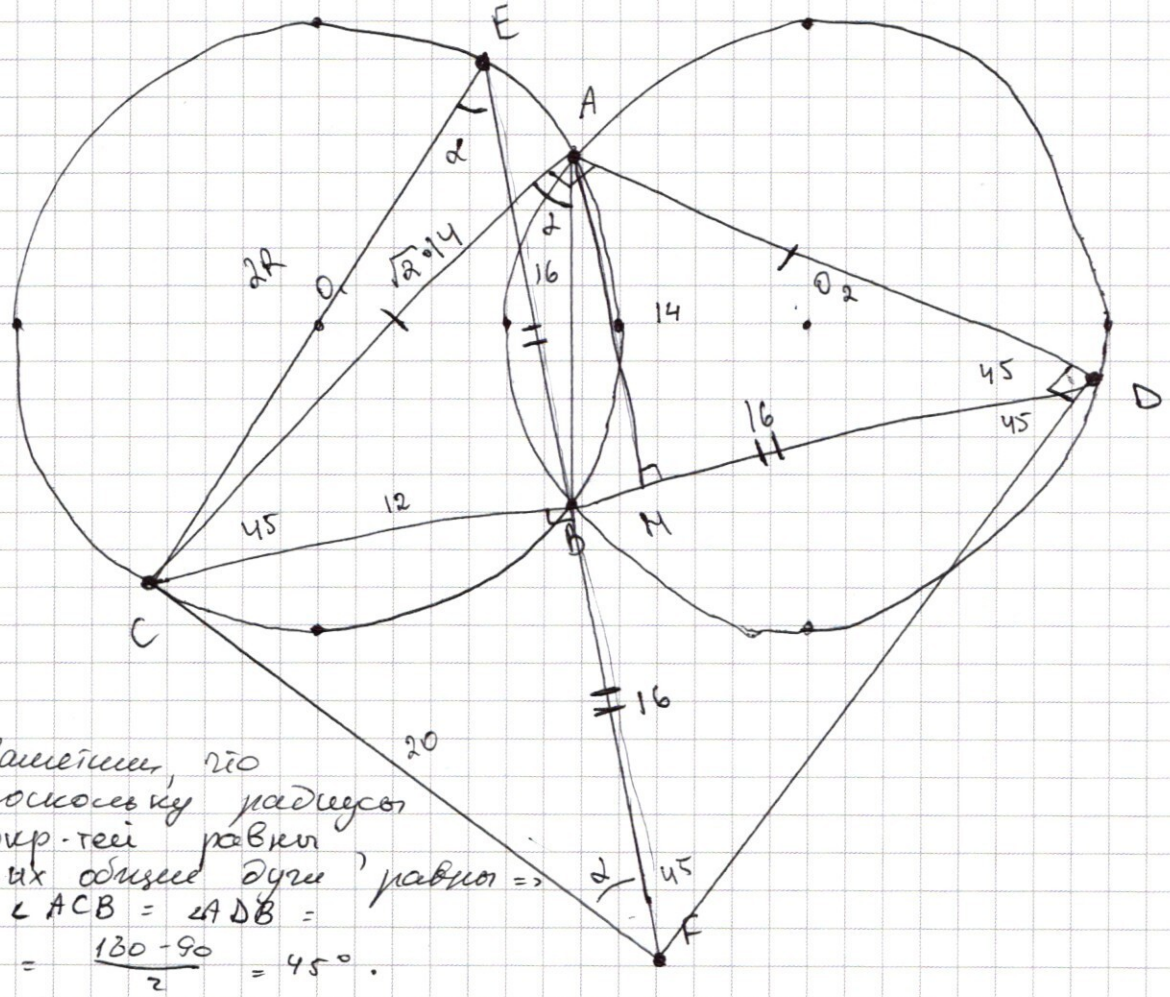
$S = \frac{64}{25}$

Ответ: $\frac{64}{25}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



а)

Заметим, что поскольку радиусы окр-тей равны их общие дуги равны $\Rightarrow$ $\angle ACB = \angle ADB = \frac{180-90}{2} = 45°$.

Пусть продолжение FB пересекает окр-ть 1 в точке E. $\angle CAB = \angle CEB = \alpha$ (обозн.) (опир. на 1 дугу). Тогда $\angle ECB = \angle BAD = 90-\alpha$. Они оба острые ($\alpha > 0$) $\Rightarrow$ $\cup BD = \cup EB \Rightarrow EB = BD = BF$. $CB \perp EF \Rightarrow$ ΔECF – р/б (в-та является медианой) $\Rightarrow CF = CE = 2R$ ($\angle CBE = 90°$, поэтому CE – диаметр). $= 20$

Ответ: 20.

б) $BF = BD = EB = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Проведём в ΔCAD в-ту AM. Она равна $\frac{12+16}{2} = 14$. Тогда $AC = AD = 14\sqrt{2}$.

$S_{ACF} = 20\cdot\sqrt{2}\cdot 14\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(90-\alpha+45) = 140\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45) = 140\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right) = \overset{28}{\cancel{140}}\cdot\frac{7}{\cancel{5}_1} = 196$

Ответ: 196.

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$|y+10| + |y| = 10$

$-y-10-y = 10$

$2y+10 = 10$

$y = 0$

$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ 2y+10 = 10 \end{cases}$

$y \geq -x-5$

$y \geq x-5$

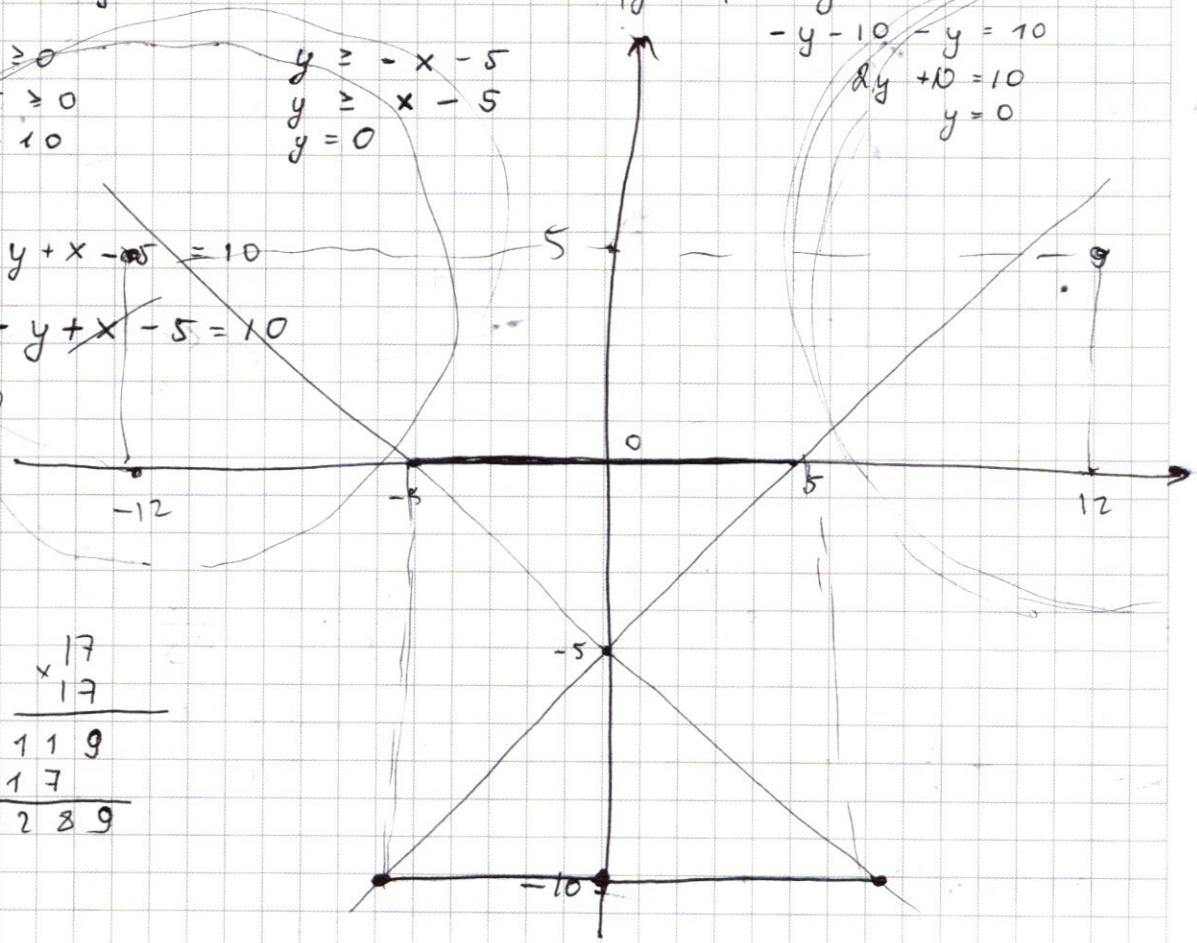
$y = 0$

$x+y+5-y+x-5 = 10$

$\cancel{-x}-y-5-y+\cancel{x}-5 = 10$

$-2y = 20$

$y = -10$



$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 17 \\ \hline +\ 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$15^2 + 17^2 = 225 + 289 = 514$

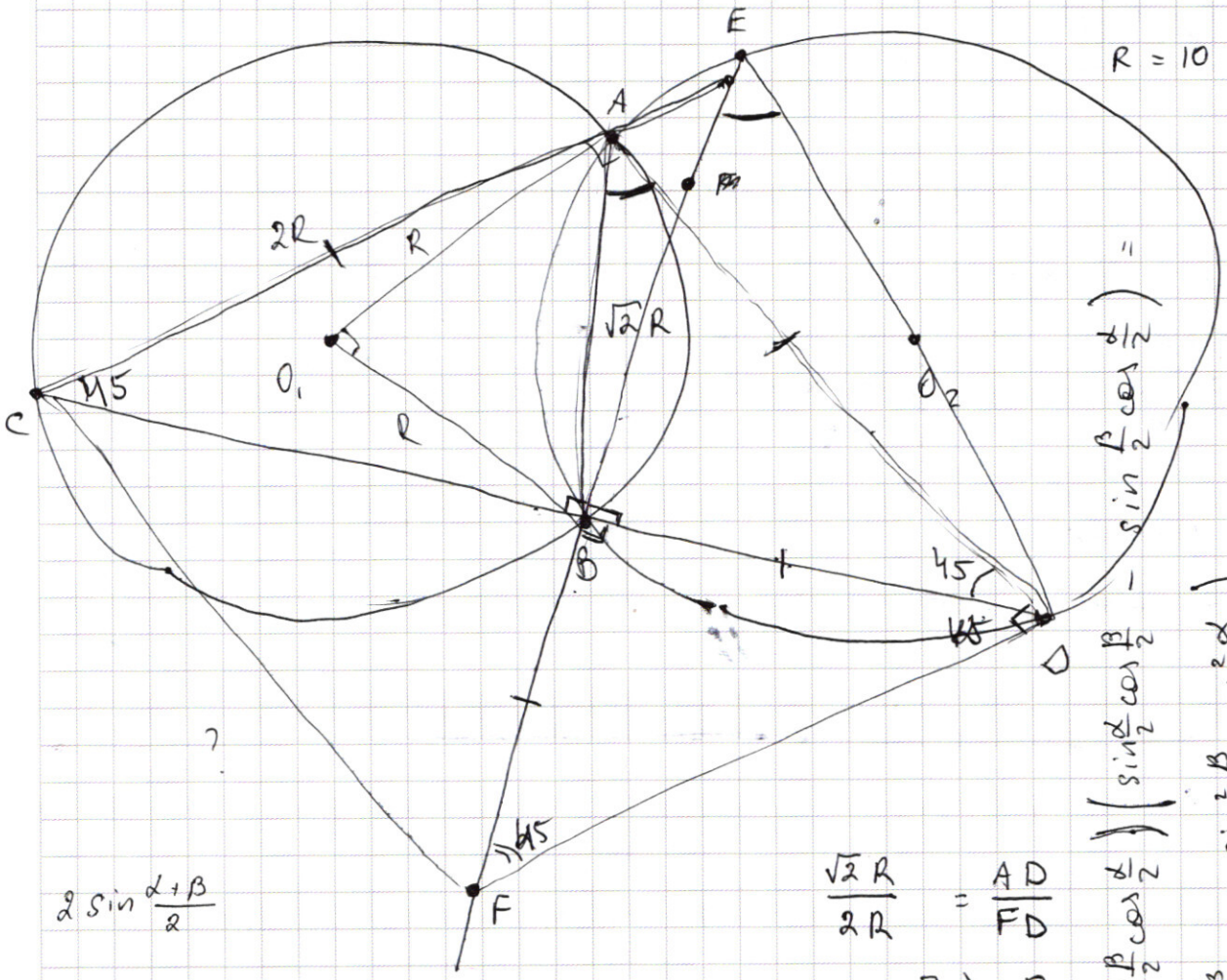
$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = 2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right) =$

$= 2\left(\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right) =$

$1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$

$= 2\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right) = \underline{\cos\alpha + \cos\beta} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{1}{2}$



$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}R}{2R} = \frac{AD}{FD}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin^2 2x + \sin 2x(\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

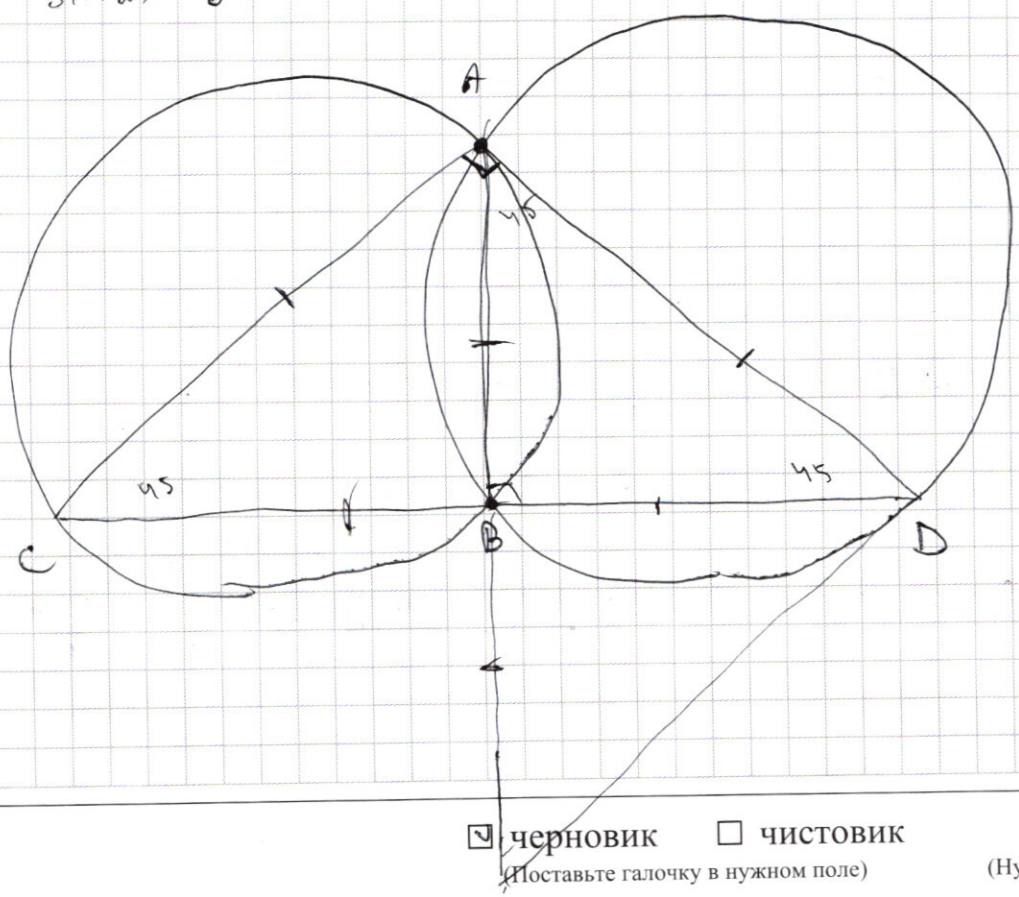
$2\sin 7x \sin^2 x$

$\sin 2x = D = \sin 14x + 2\sqrt{2}$

$2\cos 7x \sin 2x$

$$= 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right) - \left(\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\right) - \sin^2\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\Big) =$$



$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

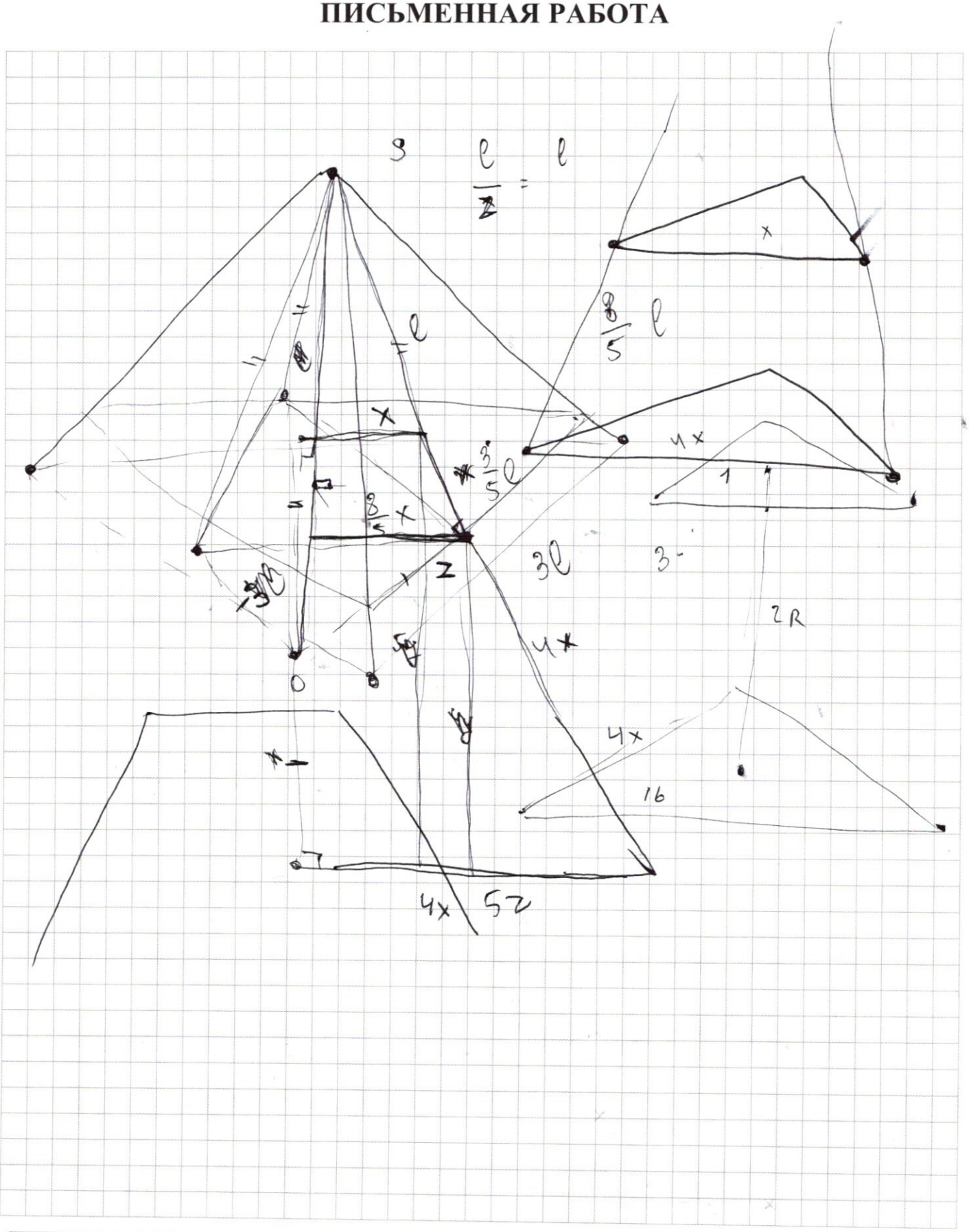
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

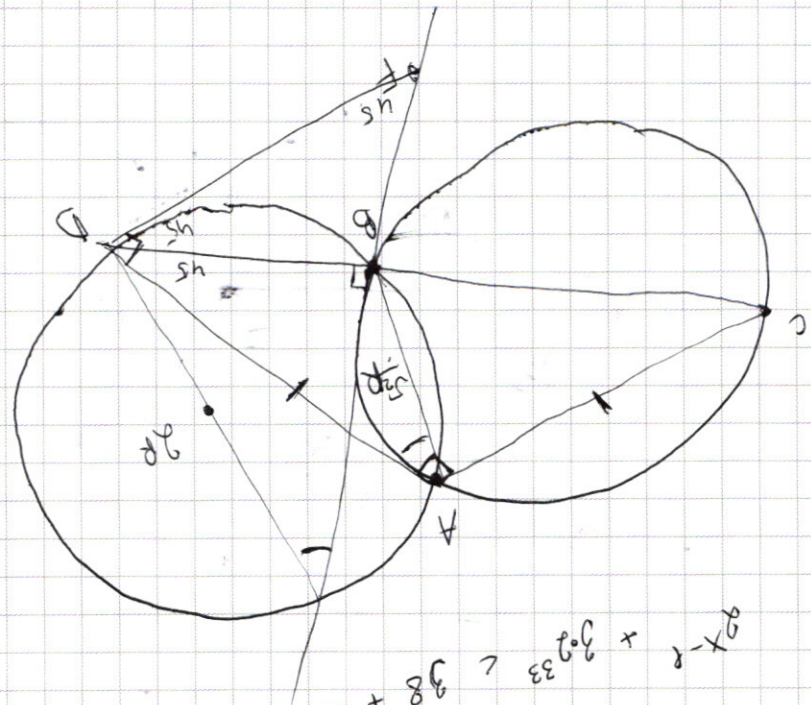
$2\cos^2 4x = -2\cos 9x \cos 5x + 2\sin 9x \sin 5x + 2(\cos 9x - \cos 5x)(\sin 9x + \sin 5x)$

$2\cos^2 4x = -$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x} = y^{\ln y}$



$2^x + 3 \cdot 2^{3x} < 76 + 2(2^{3x-1}) \times \frac{y^3}{x^3} = y\frac{dy}{dx} =$

$2^{x-8} + 3 \cdot 2^{33} < 38 + 2^{3x} - x$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)$ $\quad y\ln y - 7\ln x$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$ $\quad x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y\ln y}{y^7 \ln x}$

$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 = xy - 4y^{3\ln x} x^{-2\ln x} = y\ln y$

$\frac{dy}{dx} = \ln y$

$\frac{dy}{dx} = y\frac{dy}{dx} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)