

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИД

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 11 - 1

Ответ: 1680

Решение: Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Посмотрим на цифру в нашем числе. Если она не 1, то имеет делители. Если цифра (пусть a), $a:7$, то $a=7$, нулей в нашем числе нет, иначе произведение цифр было бы 0. Если $a:3$, то $a=3$ или $a=9$. Если a делится на другие делители, то 9261 тоже на них делится. Противоречие. Тогда $a \neq 1, a \neq 7$, a может быть 3, 7, 9.

Если в нашем числе есть 9, то оставшиеся числа, это $\{3, 7, 7, 7, 1, 1, 1\}$. Если нет, то только цифры такие: $\{3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1\}$.

Поскольку у нас нет нулей, цифры могут стоять в любом порядке. Тогда в первом случае у нас будет $\frac{8!}{1!1!1!1!1!1!}$ способов расставить числа: $\frac{8!}{1!1!1!1!1!1!}$, поскольку $8!$ способов расставить числа по любому, и $1!$ для $\forall x$ - количества одинаковых чисел в группах различных чисел, поскольку их мы можем переставить. Аналогично во втором случае: $\frac{8!}{3!3!2!}$ способов.

Всего: $\frac{8!}{6^2} \cdot (1 + \frac{1}{2}) = \frac{8!}{24} = 1680$

№ 11 - 3

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^c - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad (y \neq 1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ y/x^7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$1) (x^2 y^4)^{-\ln x} = e^{\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x)} = y^{\log_y e^{\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x)}} = y^{\frac{\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x)}{\ln y}}$$

$$2) y^{-\ln(x^2 y^4) \ln x / \ln y} = y^{\ln(y/x^7)} \Leftrightarrow -\ln(x^2 y^4) \ln x = \ln(y/x^7) \ln y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\ln x + 4\ln y) \ln x = (\ln y - 7\ln x) \ln y \Leftrightarrow$$

$$2\ln^2 x - 3\ln x \ln y + \ln^2 y = 0$$

$$(\ln x - \ln y)(2\ln x - \ln y) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln y \\ 2\ln x = \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$1) x = y \Rightarrow y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ (x > 0) \Rightarrow y = 2$$

$$2) x^2 = y \Rightarrow y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-2)(x^2+x-4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)\left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \ (x > 0) \Rightarrow \begin{matrix} y = 4 \\ y = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{matrix}$$

II случай. $y = 1$

$$\begin{cases} (x^2)^{-\ln x} = 1 \\ 1 - x - 2x^2 + 8x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ -\ln x = 0 \\ -2x^2 + 7x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -2 + 7 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (!)$$

Нет решений.

$$\text{Ответ: } (2; 2), (2; 4), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$$

N 11 - 7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases} \Leftrightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32}-1)x$$

Тогда для данного x существует $(76 + 2(2^{32}-1)x) - (2^x + 3 \cdot 2^{34})$
~~нет~~ решений ~~для~~ системы (если, конечно, они существуют для
данного x)

Пусть $x = k + 6, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} S(x) &= 76 + 2(2^{32}-1)(k+6) - (2^{k+6} + 3 \cdot 2^{34}) = \\ &= 76 + 2(2^{32}-1)k - 12 - 2^6 \cdot 2^k = 2(2^{32}-1)k - 2^6(2^k - 1) \end{aligned}$$

Я переформулирую задачу: ~~для~~ ~~нужно~~ найти сумму
положительных значений $S(x)$.

1) Заметим, что для $k=0$ и $k=32$ $S(x)=0$. Тогда $S(x)$ - не положительна.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Пусть $k < 0$. Тогда $2(2^{32}-1)k \leq -2(2^{32}-1)$, а $-2^6(2^k-1) \leq \frac{64}{32}$

$$\text{Тогда } S(x) \leq -2(2^{32}-1) + 64 = 66 - 2^{32} < 0$$

3) Пусть $k > 32$. Тогда заметим, что при $k=32$ $S(x)=0$, а на i -том шаге $S(x) \leq 0$ (предположение и база индукции).

$$\text{Тогда } S(i) \leq 0, i > 32.$$

$$\begin{aligned} S(i+1) &= 2(2^{32}-1)i + 2(2^{32}-1) - 2^6(2^k+2^k-1) = \\ &= S(i) + 2(2^{32}-1) - 2^{k+6} < S(i) + 2^{33} - 2 - 2^{38} < 0 \end{aligned}$$

Тогда при $k > 32$ $S(x) \leq 0$ и решение кет.

4) Пусть $k > 0$ и $k < 32$. Пусть $f(x) = 2x(2^{32+k-x}-1)$

$$\text{Тогда } f(k) = 2k(2^{32}-1), \text{ а } f(32) = 2^6(2^k-1)$$

$$\text{Тогда } S(k) = f(k) - f(32)$$

$$\text{Пусть } 0 < x < 32. \text{ Тогда } f(x+1) - f(x) = 2(x+1)(2^{32+k-x-1}-1) -$$

$$- 2x(2^{32+k-x}-1) = 2^{32+k-x}((x+1)-2x) - 2 =$$

$$= 2^{32+k-x}(1-x) - 2, \text{ что при } x \geq 1 \text{ отрицательно}$$

$$\text{а при } x=0 \text{ дает } 2^3(2^{32+k-x} > 0; (1-x) \leq 0; -2 < 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, нам надо найти } \sum_{k=1}^{31} S(k) &= \sum_{k=1}^{31} (2k(2^{32}-1) - 2^6(2^k-1)) = \\ &= 2(2^{32}-1) \sum_{k=1}^{31} k - 2^6 \sum_{k=1}^{31} (2^k) + 2^6 \cdot 31 = 2(2^{32}-1) \frac{31 \cdot 32}{2} - 2^6(2^{32}-1) + 2^6 \cdot 31 = \\ &= (2^{32}-1)(32 \cdot 31 - 64) + 32 \cdot 31 = 32 \cdot (2^{32}-1) \cdot 29 + 32 \cdot 31 = 2^{37} + 2 \cdot 32 = \\ &= 2^{37} + 2^6 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 2^{37} + 2^6$$

N5

$$\begin{cases} |x-y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

Заметим, что если нам подойдёт

пара (x_0, y_0) , то как и подходит пара $(-x_0, y_0)$.

$$|-x+y+5| + |y+x+5| = |x+y+5| + |y-x+5|$$

$$(|x|-12)^2 = (|-x|-12)^2$$

~~Пусть пары (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ — искомого. Тогда~~

Заметим, что если $x_0 \neq 0$, то (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ — искомого.

Тогда для определённости пусть $x_0 > 0$.

1) $y_0 < -x_0 - 5$

$$-x_0 - y_0 - 5 - y_0 + x_0 - 5 = 10 \Rightarrow y_0 = -10, x_0 < 5$$

Тогда $(|x|-12)^2 = a - 25 \rightarrow 12 - x_0 = \sqrt{a - 25}, a \geq 25$ (*)
 $x_0 \in \emptyset, a < 25$

2) $y_0 > x_0 - 5$

$$x_0 + y_0 + 5 + y_0 - x_0 + 5 = 10 \Rightarrow y_0 = 0, x_0 < 5$$

$$(|x|-12)^2 = a - 25 \rightarrow 12 - x_0 = \sqrt{a - 25}, a \geq 25$$
 (*)
 $x_0 \in \emptyset, a < 25$

3) $-x_0 - 5 \leq y_0 \leq x_0 - 5$

$$x_0 + y_0 + 5 + x_0 - 5 - y_0 = 10 \Rightarrow 2x_0 = 10 \Rightarrow x_0 = 5, y_0 \in [-10; 0]$$

$$|y|-5 = \sqrt{a-49} \Rightarrow$$

$$y_0 \in \emptyset \quad a < 49$$

$$y_0 = -5 \quad a = 49$$

$$y_0 = -5 - \sqrt{a-49} \quad a \in (49; 49+25]$$
$$y_0 = -5 + \sqrt{a-49}$$

$$y \in \emptyset \quad a > 49+25$$

(*) $12 - x_0 = \sqrt{a - 25}, a \geq 25, x_0 < 5 \Rightarrow$

$$12 - x_0 > 7 \Leftrightarrow a - 25 > 49 \Leftrightarrow a > 49 + 25, x_0 = 12 - \sqrt{a - 25}$$

Если же $a < 49 + 25$, то $x_0 \in \emptyset$

$$x_0 \neq 0 \Rightarrow 12 - \sqrt{a - 25} \neq 0 \Rightarrow a \neq 144 + 25$$

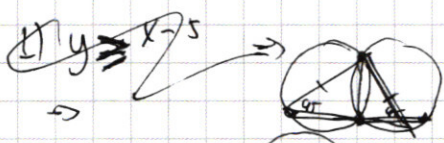
При $a = 144 + 25 \quad x_0 \in \emptyset$

$$y = x - 5 \quad y = 5 + x$$

$$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10$$

$$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 0$$

$$3 + 5 + 5 + 6$$



$$R = 10$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$x(2^{33} - 2) + 76 \Rightarrow y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x \rightarrow S(x)$$

$$S(x) = \frac{x(2^{33} - 2) + 76}{(2^{33} - 2) \cdot k}$$

$$\sum S(x) > 0$$

$$2(2^{32} - 1) \frac{31 \cdot 32}{2} - 2^6(2^{32} - 1)$$

$$x = 6$$

$$(6 \cdot (2^{33} - 2) + 76) - (2^6 + 3 \cdot 2^{34})$$

$$76 - 12 - 64 = 0$$

$$x < 32$$

$$(x(2^{33} - 2) - 2^x) - (3 \cdot 2^{34} - 76)$$

$$(x - 6)(2^{33} - 2) - (2^x - 2^6)$$

$$64 - 2 \cdot 32 = 0$$

$$x = 6 + k$$

$$2k(2^{32} - 1) = 2^6(2^k - 1)$$

$$f(k) - f(32)$$

$$f(k) = 2k(2^{32-k} - 1)$$

$$f(4) = 2k(2^{32-k} - 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.5 20 35
6.2 15
3.2 10
8+6(14)/35
3+5+6

abcde fgh

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ -9 \\ \hline 26 \\ -18 \\ \hline 81 \\ -81 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ -3 \\ \hline 343 = 7^3 \end{array}$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \Rightarrow x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

(0;0)
(2;4)

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow$$

(0;0) (2;2)

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$x(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

II.

$x \rightarrow 0$
 $y/x \neq 0 \Rightarrow y > 0$ $x \neq 0$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$\cos 5x = a$
 $\sin 5x = b$
 $\cos 4x = c$
 $\sin 4x = d$

$$\frac{8!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3!} + \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$$

$$\frac{8!}{6 \cdot 6} + \frac{8!}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{8!}{6^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{8!}{6^2} \cdot \frac{3}{2} =$$

$$(ac - bd) + (ad + bc) - a - \sqrt{2}c + b = 0$$

$$(a+b)c + (a-b)d + (a-b) = 0$$

$$= \frac{8!}{6 \cdot 4} = \frac{8!}{24} = 10 \cdot 21 \cdot 8 = 1680$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$x^2 y^4 = e^{\ln(x^2 y^4)} = y^{(\log_y e)(\ln x^2 y^4)}$$

$$(a+b-2)c + (a-b)(d-1) = 0$$

$$-\ln x \log_y e \ln x^2 y^4 = \ln(y/x^7) \Rightarrow$$

$$\frac{\ln(x^2 y^4)}{\ln y} = \ln(y/x^7) \Rightarrow$$

$\cos(\pi/2) = 0$
 $\sin(\pi/2) = 1$

$$-\ln x \ln x^2 y^4 = \ln(y/x^7) \ln y \Rightarrow (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x)(\ln y)$$

$$(\ln y - 7 \ln x) \ln y + \ln x(2 \ln x + 4 \ln y) - \ln^2 y - (7 \ln x + 4) \ln y - 2 \ln x = 0$$

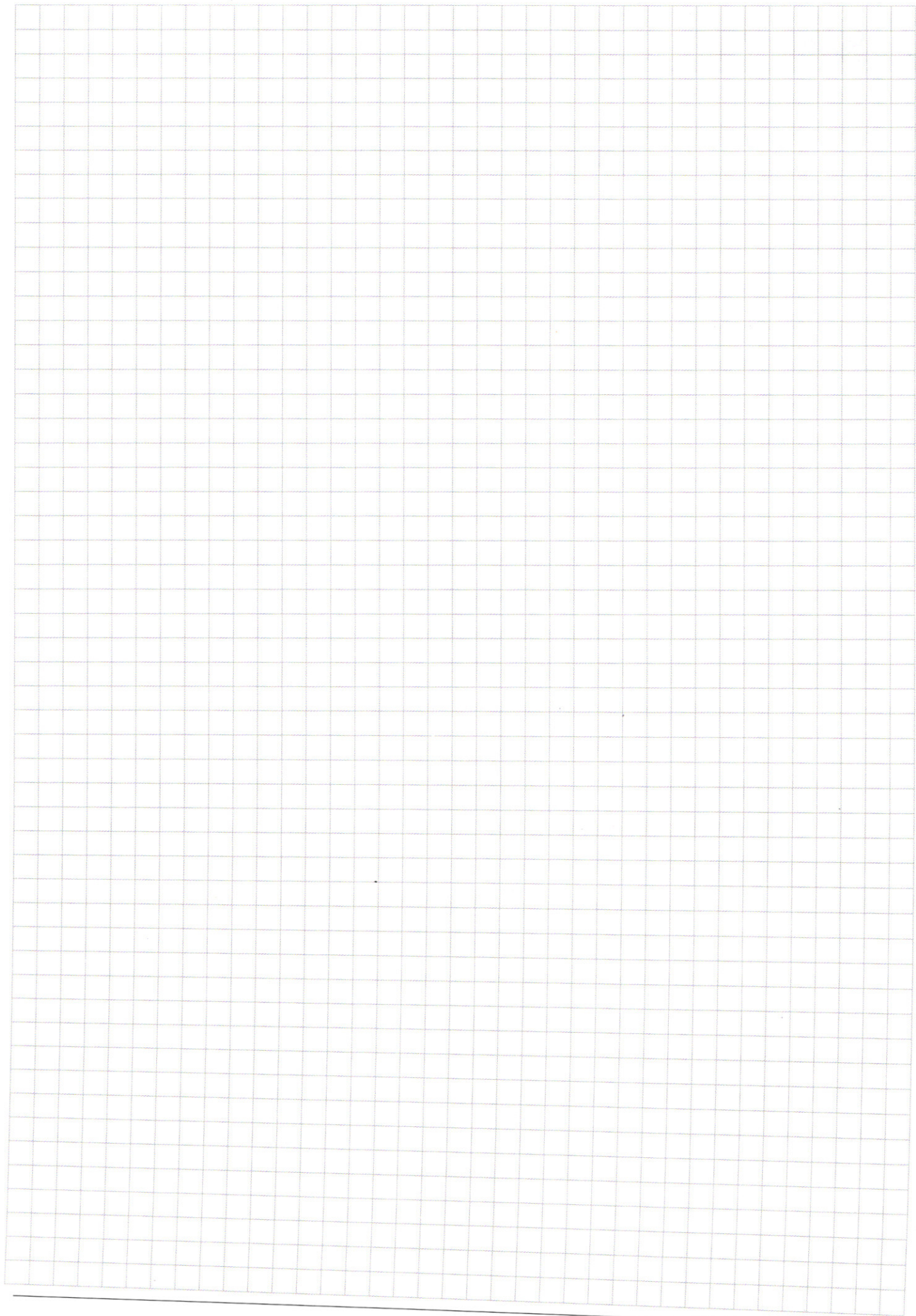
$$\ln^2 y - 7 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x + 4 \ln x \ln y = 0$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - 2 \ln x) = 0$$

$\ln y = \ln x$
 $\ln y = 2 \ln x$

$x = y$
 $y = x^2$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

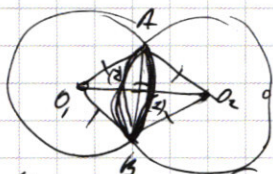
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Лемма: для двух одинаковых

окружностей $\widehat{AB}(2) = \widehat{AB}(1)$,



Поскольку $O_1 A = O_1 B = O_2 A = O_2 B$, AB — общая, $\triangle O_1 AB = \triangle O_2 AB$.

Тогда $\angle A O_1 B = \angle A O_2 B$, следовательно $\widehat{AB}(1) = \widehat{AB}(2)$

✓ 11-2.

Пусть $\alpha = 5x + \pi/2$, $\beta = 4x$

Тогда $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}/2 \cos 4x - \sqrt{2}/2 \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$\begin{aligned} & \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \\ & + \sin 5x = 0 \Rightarrow \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) + \\ & + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) - \cos 5x = 0 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда при $a < 49$ нет решений

$$a = 49 \quad x_0 = 5 \quad y_0 = -5$$

$$a \in (49; 49+25] \quad y_0 = -5 \pm \sqrt{a-49}, \quad x_0 = 5$$

$$a > 49+25, \quad a \neq 144+25 \quad x_0 = 12 - \sqrt{a-25}, \quad y_0 \in \{0; -10\}$$

$$a = 144+25 \quad \emptyset$$

Тогда

$$2) \quad x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2|y+5| = 10 \\ 12^2 + (y-5)^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y+5| = 5 \\ (y-5)^2 = a-144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y+5| = 5 \\ (y-5)^2 = a-144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1) \sqrt{a-144} = 0 \\ 2) \sqrt{a-144} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 144 \\ a = 144+100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -10 \\ 25 = a-144 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 144+25, \quad y = 0 \text{ или } y = -10, \quad x = 0 \\ 169 \end{matrix}$$

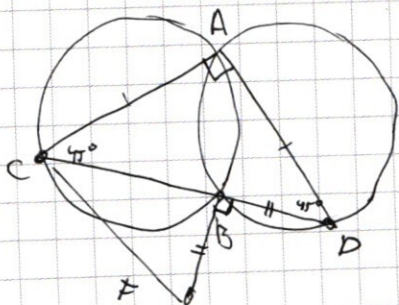
Тогда 2 решения при $a = 49, a = 169$.

При других будет не 2 решения.

Примечание: в первом случае ($x_0 \neq 0$), x_0, y_0 — должны быть единственными, поскольку ещё есть пара $(-x_0, y_0)$.

Ответ: $a = 49, a = 169$

№ 6.



CF? Заметим, что $\angle ADB$ и $\angle ACB$ опираются на одинаковые дуги. Тогда $\angle ADB = \angle ACB = \frac{180^\circ - 90^\circ(\angle A)}{2} = 45^\circ$, следовательно $\triangle ACD$ — равнобедренный