

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 1) Разложим число 9261 на простые множители:

$$9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1, \text{ действительно,}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 21 \cdot 21 \cdot 21 = 9261$$

По основной теореме

арифметики это разложение

единственное (с точностью до позиции числа)

$$\left(\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 42 \\ 441 \end{array} ; \begin{array}{r} \times 441 \\ 21 \\ \hline 441 \\ 882 \\ \hline 9261 \end{array} \right)$$

а) Поскольку в р-ии на простые мн-тели участвуют числа > 0 и < 10 , то это

и есть цифры нашего восьмизначного числа,

(т.к. произведение $7 \cdot 3 = 21$ не цифра)

Две единицы были добавлены в р-е, чтобы у нас получилось 8 чисел в р-ии, которые и будут цифрами искомого числа.

Теперь применим формулу для числа перестановок с повторениями:

$$N = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 56 \cdot 10 = \boxed{560}$$

№2 $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

Применим формулу суммы синусов и разности косинусов.

$$2 \sin \frac{9x+5x}{2} \sin \frac{9x-5x}{2} + 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\sin 2x + \cos 2x) - \sqrt{2} (\sin 2x + \cos 2x) (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) (2 \sin 7x + \sqrt{2} \sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x) = 0.$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 0$$

Разделим на $\cos 2x$, (т.к.

$\cos 2x \neq 0$, ведь если

то так ($\cos 2x = 0$), то

$\sin 2x \neq 0$, но тогда

рав-во $\cos 2x + \sin 2x = 0$ не

будет верным,
значит $\cos 2x \neq 0$)

$$\tan 2x + 1 = 0$$

$$\tan 2x = -1$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{или } 2 \sin 7x + \sqrt{2} \sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x = 0$$

$$\sin 7x + \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x = 0.$$

$$\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 5x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

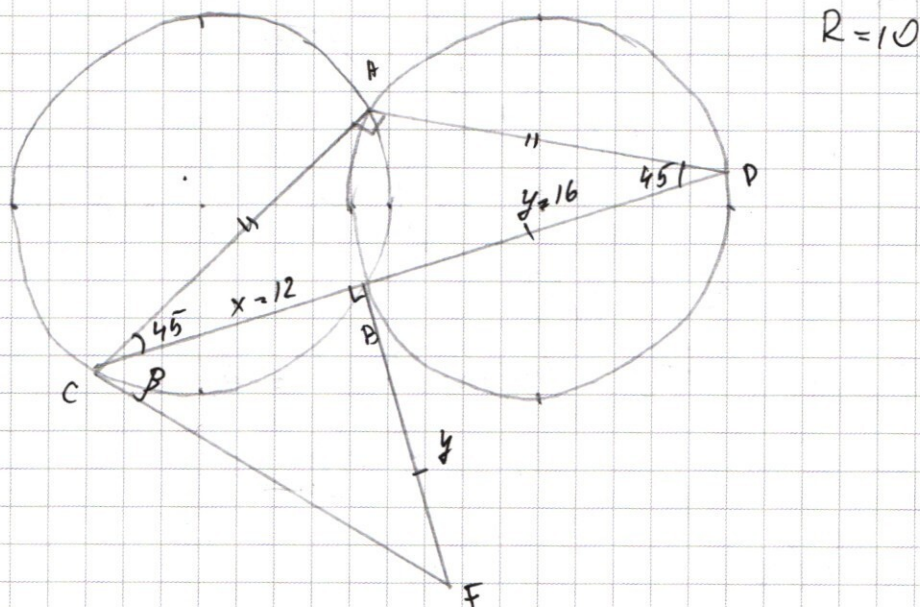
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9} n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Таким образом ответ:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9} n, n \in \mathbb{Z} \\ &\frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \\ &\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

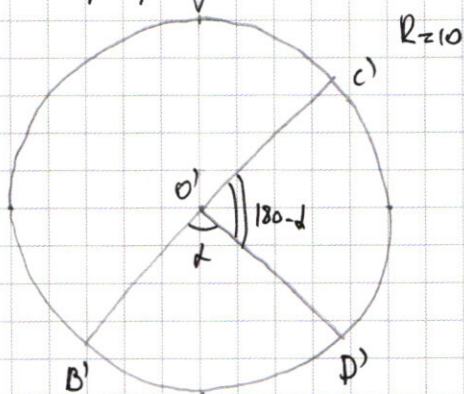
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6



1) Пусть $BC=x$; $BD=y$, тогда рассмотрим дуги, стянутые хордами AC и AD (дуги $\sphericalangle CBA$ и $\sphericalangle ABD$)
 $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CB + \sphericalangle AB_1$; $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AB_2 + \sphericalangle BD$.
 ~~$\sphericalangle ABB$~~ $\sphericalangle AB_1 = \sphericalangle AB_2$, т.к. окружности равны.
 Значит $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 45^\circ$ (из $\triangle CAD$), значит
 град. мера $\sphericalangle AB_1 = \sphericalangle AB_2 = 90^\circ$.
 тогда $\sphericalangle CB = \sphericalangle CBA - 90^\circ$; $\sphericalangle BD = \sphericalangle ABD - 90^\circ$.
 $\sphericalangle CBA = 360^\circ - \sphericalangle ABD$, т.к. это дуги, стянутые
 одними хордами CA и AD (из равнобедренного $\triangle ACD$), тогда $\sphericalangle CB = 180^\circ - \sphericalangle BD$, если
 град. мера $\sphericalangle BD = \alpha$, то $\sphericalangle CB = 180^\circ - \alpha$.

Начертить эти дуги "вместе" на одной окружности с радиусом 10.



$R=10$

$$\cup B'D' = \cup BD$$

$$\cup C'D' = \cup CD$$

Получим, что $B'O', C'$ на α и β - диаметре, тогда

$$(B'D')^2 + (D'C')^2 = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{т.к. } B'D' = BD \quad C'D' = CD \quad (\text{из рав-ва дуг})$$

получим, что $x^2 + y^2 = 4R^2$

$$\text{т.к. } BD = BF = y \Rightarrow \text{то } (CF)^2 = x^2 + y^2 = 4R^2$$

$$\text{и } \angle CBF = 90^\circ$$

$$CF = 2R = 20$$

$$2) \quad x^2 + y^2 = 4R^2 = (20)^2$$

$$y^2 = (20-12)(20+12) = 8 \cdot 32$$

$$y = 8 \cdot 2 = 16$$

$$AC = AD = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}} = \sqrt{\frac{28^2}{2}} = 14\sqrt{2}$$

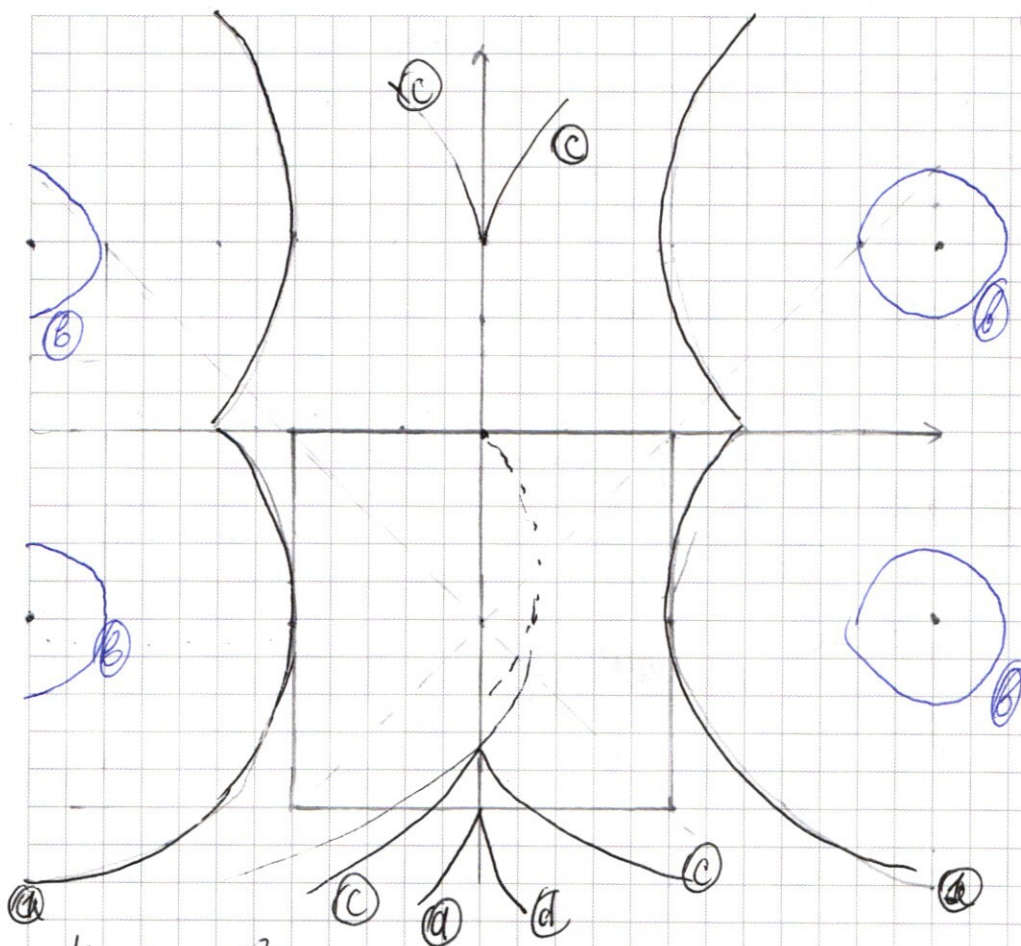
$$\left. \begin{aligned} \sin(\angle BCF) &= \sin \beta = \frac{4}{5} \\ \cos(\angle BCF) &= \cos \beta = \frac{3}{5} \end{aligned} \right\} \text{ (заметьте, что } \angle CBF \text{ - острый)}$$

$$\angle ACB = 45^\circ = \gamma$$

$$\text{Найдем } \sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin(\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{14 \cdot 2 \cdot 20}{2 \cdot 10} = 28$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



исследуем гр-к гр-а (2).
Начнем увели-
вать a от 0.
Получим сначала
гр-к вида (b)
Будем далее
увеличивать
радиус.

Нам будут подходить окружности ~~с радиусом~~ вида (a)
(с касанием квадрата), далее будем увеличивать
радиус, и получаемые гр-ки не будут подходить,
(т.к. и т. перес-а) до момента вида (c),
а он ~~не~~ будет когда начало коорд. ~~не~~ удовл.
гр-ю (2)

$$12^2 + 25 = a$$

$$a = 13^2 = 169$$

и будет подходить до момента с гр-кой вида (a),
когда точка $(0; -10)$ удовл. гр-ю (2)

$$12^2 + 0 = a = 144 \quad 12^2 + 25 = 169 = a, \text{ а значит}$$

гр-ки (c) и (d) совпадают

N5 ③ $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

④ $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$

② ^{2р-к} ур-е представляет собой 4 окружности
окружность, отражённую отное. Ox и Oy с центром
в т. $(12; 5)$ и радиусом $\sqrt{a}$ (дважды)

Теперь посмотрим, что из себя представляет
график ур-я ③

Раскроем модули по сир-ю:

1) $\begin{cases} x+y > -5 \\ y-x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y > -5-x \\ y > -5+x \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~тогда~~ $x+y+5+y-x+5=10$ $y=0$

2) $\begin{cases} x+y > -5 \\ y-x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -5-x \\ y < -5+x \end{cases} \Leftrightarrow$ ~~тогда~~

$x+y+5-y+x-5=10$

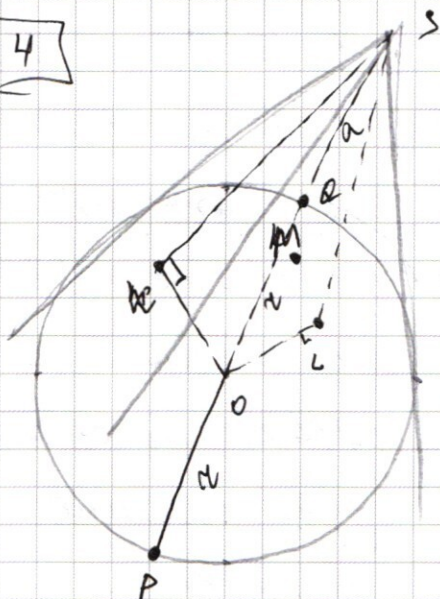
$x=5$

3) $\begin{cases} x+y < -5 \\ y-x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -5-x \\ y > -5+x \end{cases}$ ~~тогда~~ $-x-y-5+y-x+5=10$ $x=-5$

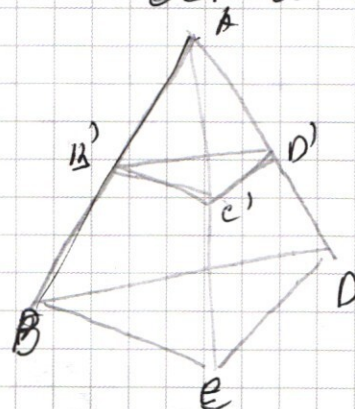
4) $\begin{cases} x+y < -5 \\ y-x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -5-x \\ y < -5+x \end{cases}$ ~~тогда~~ $-x-y-5-y+x-5=10$ $y=-10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



1) Плоскости, сечениями касающейся сферы и $\perp SO$ параллельна, а значит T -ки в этих сечениях подобны (это легко доказать, рассматривая сечения тетраэдра $MS-ABCD$, параллельной основанию,



Здесь все стороны сечений будут параллельны и пропорциональны с одной и той же k -той.

(из подобия T -ков, образованных на гранях, вида $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

по 3 углам $\Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = k \neq \frac{AC}{AC'}$;

$\triangle A'C'D' \sim \triangle ACD$ по 3 углам $\Rightarrow \frac{C'D'}{CD} = k = \frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = k$

Тогда можно найти этот k -т подобия:

$$k = \sqrt{\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}} = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Тут же мы доказали, что и тетраэдр} \\ \text{подобен, т.к. все углы их равны и стороны} \\ \text{пропорциональны, с тем же } k=4 \\ \text{этих} \end{array} \right)$$

Пусть точки касания T -плоскостей и сферы A и P (см. чертеж), очевидно, что T -сечение большей MS -диаметра от S .

P и $Q \in SO$, т.к. $SO \perp$ этим MS -сечениям, значит содержит радиусы в T -касаниях значит и точки касания

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

8-3H

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$\begin{array}{r} 343 \\ \times 2 \\ \hline 686 \end{array}$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 9261$$

$$2^8 = 256$$

$$2^{16} =$$

$\begin{array}{r} 343 \\ \times 2 \\ \hline 686 \end{array}$

9261 : 9

$$\begin{array}{r} 9261 \div 3 = 3087 \\ \begin{array}{r} 3087 \div 3 = 1029 \\ 1029 \div 3 = 343 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1024 \\ \hline 2 \\ \times 2048 \\ \hline 2 \\ \times 4096 \\ \hline 2 \\ \times 8192 \\ \hline 2 \\ 16384 \end{array}$$

343 · 3 · 3 · 3

49 · 7 · 3 · 3 · 3

$$\begin{array}{r} 343 \div 11 = 31 \\ 31 \div 13 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \div 7 = 49 \\ 49 \div 7 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ \hline 22 \\ 2401 \\ 686 \\ \hline 9261 \end{array}$$

7 · 7 · 7 · 3 · 3 · 3

21 · 21 · 21

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ 441 \\ 441 \\ 882 \\ \hline 9261 \end{array}$$

1122

77733311

77733311
7773

112

3! 6

$$\frac{n!}{k!} = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 560$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ 121 \\ 112 \\ 121 \\ 211 \\ \hline 211 \end{array}$$

abc
acb
bac
bca
cab
cba

1! 23
k!

N2

$$\cos(9x) - \cos(5x) - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(9x) + \sin(5x) = 0$$

$$\cos a + \sin a + \sin b - \cos b - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\cos 9x - \cos 5x = 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \sin \frac{9x-5x}{2} = 2 \sin 7x \sin 2x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x + 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) + 2 \sin(\alpha) \sin(\beta) - \sqrt{2} \cos^2(\beta) + \sqrt{2} \sin^2(\beta)$$

$$2 \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) - \sqrt{2} (\cos \beta - \sin \beta) (\cos \beta + \sin \beta) = 0$$

$$(\cos \beta + \sin \beta) (2 \sin \alpha + \sqrt{2} \sin \beta - \sqrt{2} \cos \beta) = 0$$

$$\cos \beta + \sin \beta = 0 \quad | : \cos \beta$$

$$1 + \tan \beta = 0$$

$$\tan \beta = -1$$

$$\beta = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin \alpha + \sqrt{2} \sin \beta - \sqrt{2} \cos \beta = 0$$

$$\sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta = 0$$

$$\sin \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \beta - \sin \frac{\pi}{4} \cos \beta = 0$$

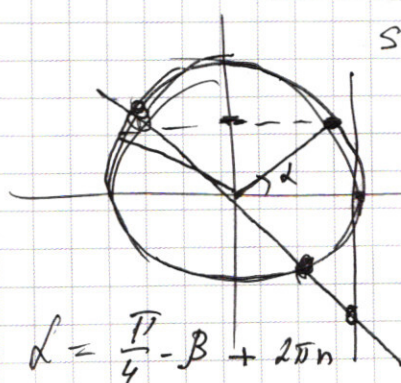
$$\sin \alpha + \sin \left(\beta - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \beta \right)$$

$$\frac{60}{160} - \frac{2}{5}k = \frac{3}{20}$$

$$\frac{\pi}{5}k = \frac{36}{160} \cdot 18$$

$$k = \frac{18}{160} \cdot 5 = \frac{9 \cdot 40}{160}$$



$$\sin(60-30) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta + 2\pi n$$

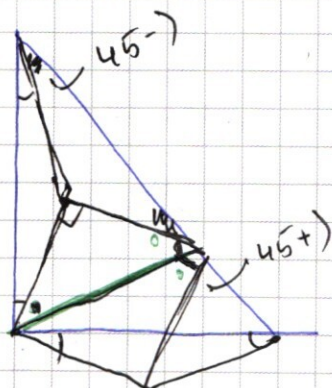
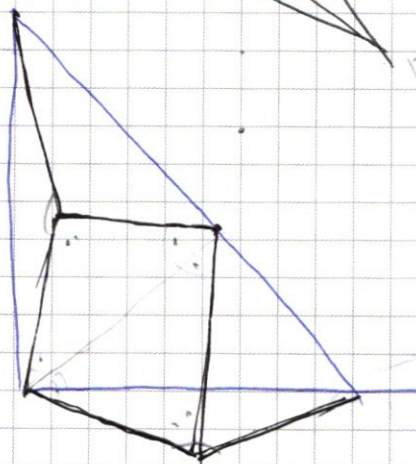
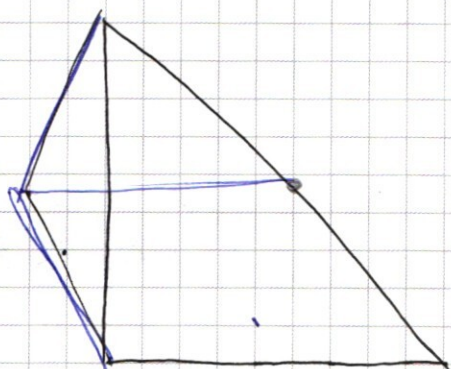
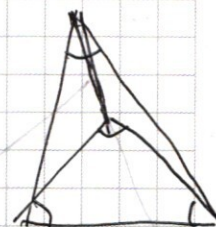
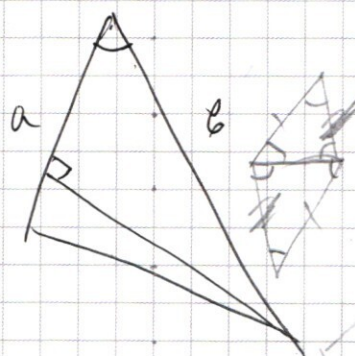
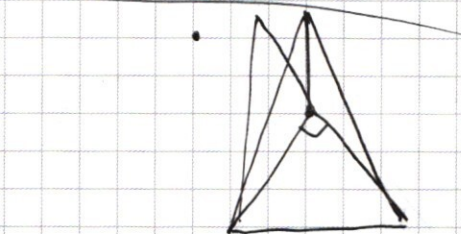
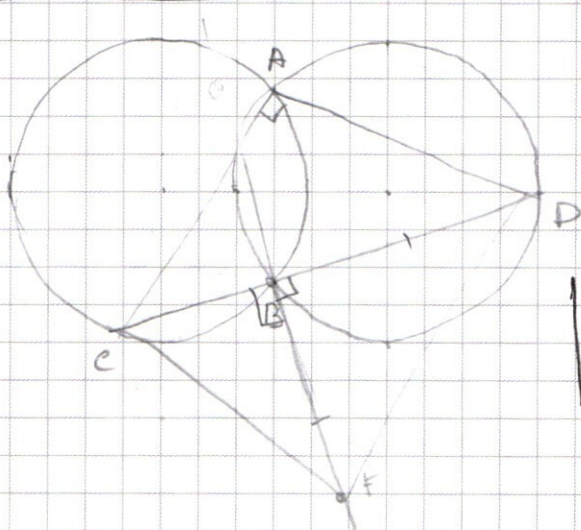
$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} + \beta + 2\pi n$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

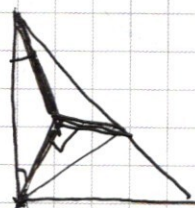
$$\sqrt[3]{(x^2 y^4) - \ln x} = y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

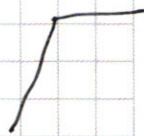
$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

№6.



45 = 90+

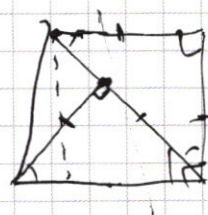




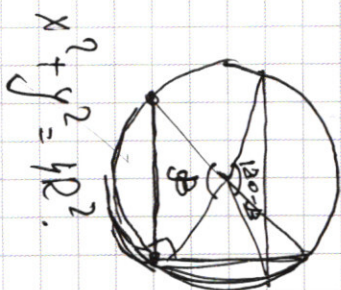
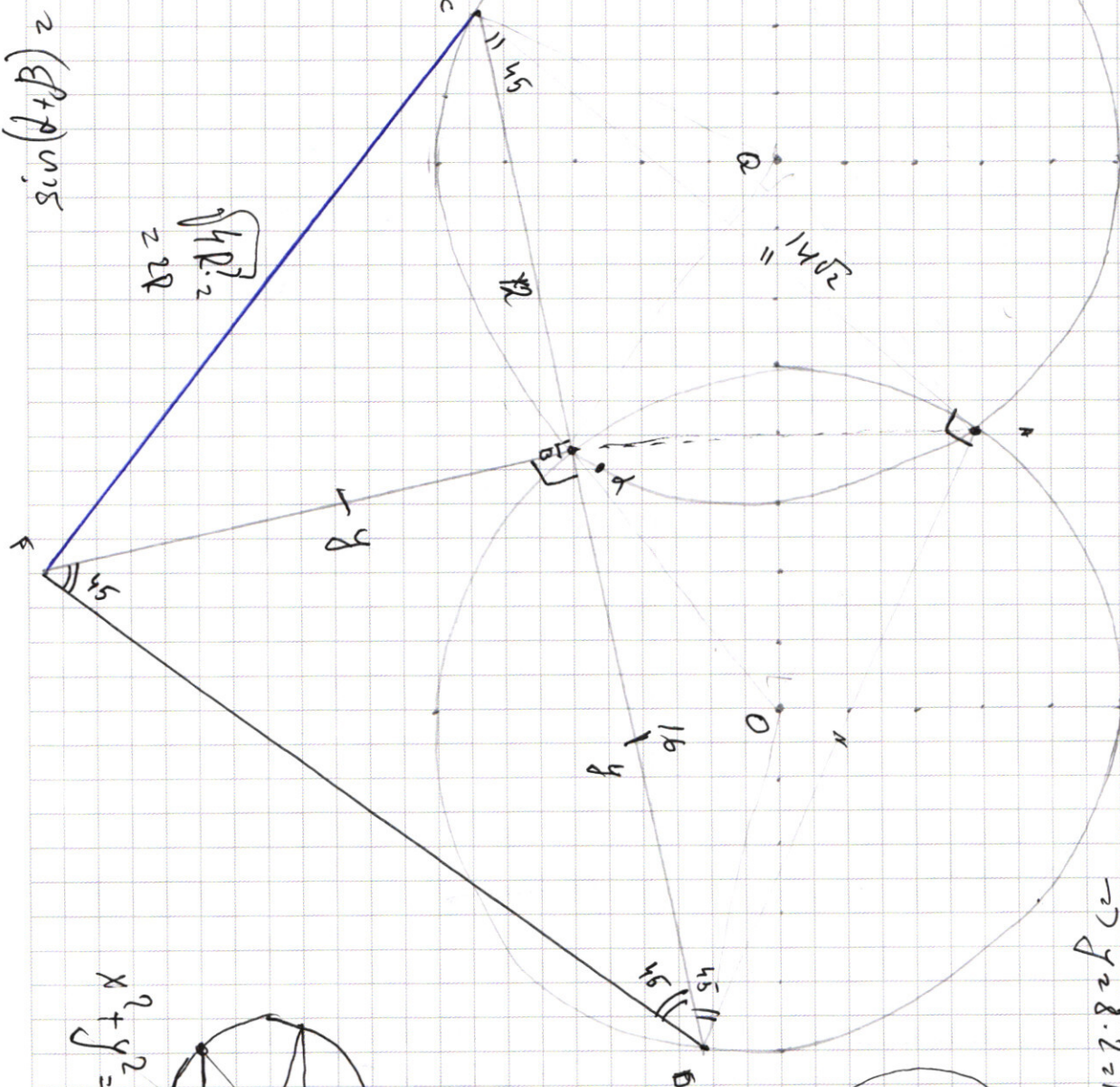
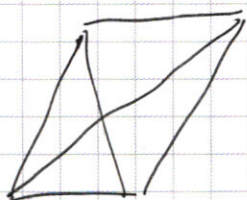
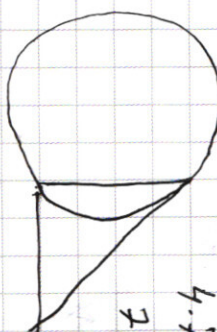
$\frac{1}{2}$ liters
 $\frac{1}{2}$ absorbent

$$(20)^2 - (12)^2 = y^2$$

→ y_{28.2216}



$$\begin{aligned} 28^2 &= 22a^2 \\ 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 &= a^2 \\ 7 \cdot 2\sqrt{2} &= a \\ 14\sqrt{2} &= a \end{aligned}$$

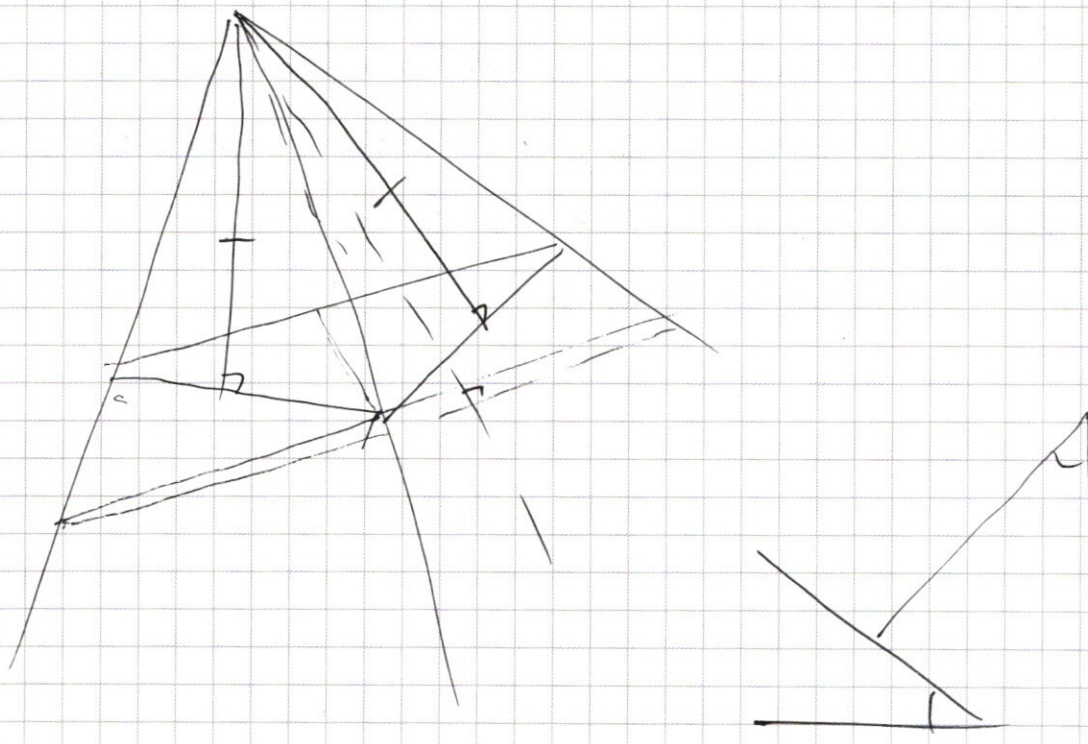


$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 270 - 180 = 90^\circ$$

$$\begin{array}{r} 270 - d \\ 270 - d \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Значи При дальнейшем увеличении a всё
бы пересечения с квадратом не будет
совсем.

Таким образом, ответ $a = 13^2 = \boxed{169}$ и

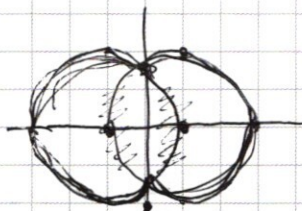
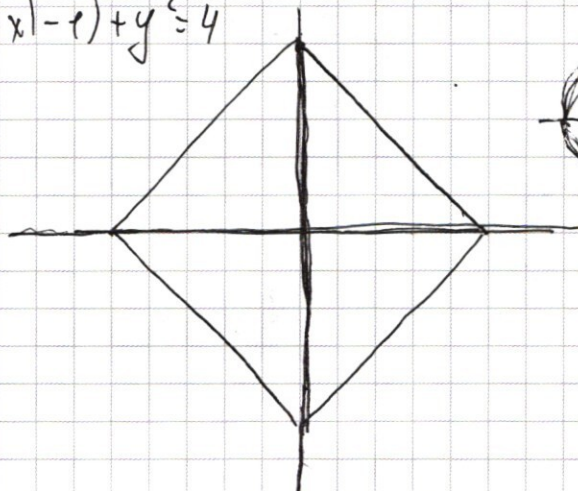
$$a = 7^2 = \boxed{49}$$

(Второй ответ получен подстановкой точки
касания $(-5; -5)$ в $\textcircled{2}$, а точка касания
очевидно эта, т.к. пр-я $x = -5 \perp O_x$; а
радиус в точку касания $\parallel O_x$.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \\ (|x|-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

4 отр-еги



$$y = 0$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$y = 0$$

$$x+y+5 - y+x-5 = 10$$

$$x = 5$$

$$-x-y+5 + y-x+5 = 10$$

$$x = -5$$

$$-x-y+5$$

$$-x-y-5 - y+x-5 = 10$$

$$-y = 10$$

$$y+x > -5$$

$$y-x > -5$$

$$y > -5-x$$

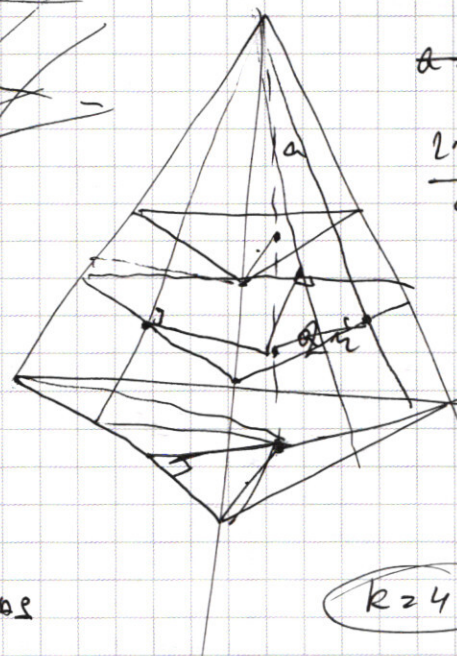
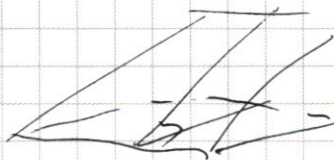
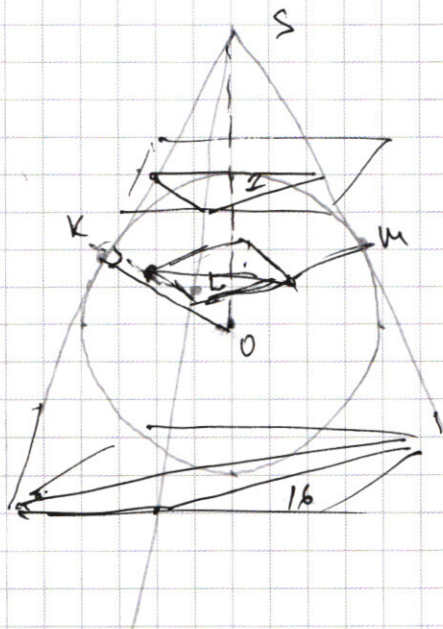
$$y > -5+x$$

1) $x+y > -5$ $y > -5-x$

$y-x > -5$ $y > -5+x$

2) $y+x < -5$ $y < -5-x$

$y-x < -5$ $y < -5+x$



$$a = 2r$$

$$\frac{2r+a}{a} = 4$$

$$2r = 3a$$

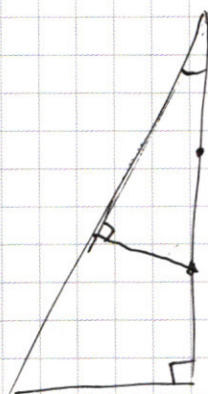
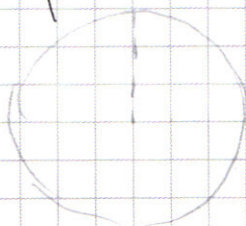
$$a = \frac{2}{3}r$$

$$\frac{r}{r+a} = \frac{r}{r+\frac{2}{3}r} = \frac{3}{5}$$

Sos

$$k = 4$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$



$$\tan \alpha = \frac{3}{5}$$

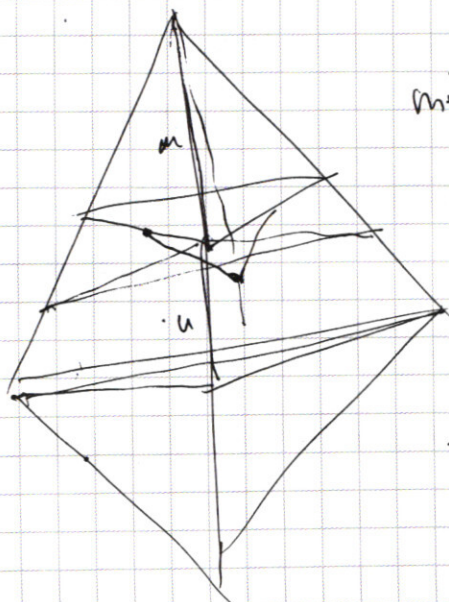
$$\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

$$\frac{9}{25} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$$

$$\frac{25}{34}$$

$$\frac{m}{m+n} = \frac{SD}{SD+PD}$$

$$\frac{r+a}{2r+a}$$



$$\frac{r+a}{2r+a} =$$

$$= \frac{r+\frac{2}{3}r}{\frac{5}{3}r} = \frac{\frac{5}{3}r}{\frac{5}{3}r} = 1$$

