МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

№1.

$9261 = 3\cdot 3087 = 3^2\cdot 1029 = 3^3\cdot 343 = 3^3\cdot 7^3.$

Подходящие числа могут быть представлены некоторой последовательностью цифр 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 и только, т.к. 3 и 7 – простые числа.

$C_8^3 = \frac{7\cdot 8\cdot 6}{2\cdot 3} = 56$ вариантов расставить ~~единицы~~ семёрки на 8 позициях

$C_6^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ вариантов расставить тройки на оставшихся 6 позициях.

~~Семёрки~~ Единицы однозначно ставятся на оставшиеся позиции.

Итого чисел $C_8^3 \cdot C_6^3 = 1120$

Ответ: 1120 чисел.

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. \end{cases}$$

1) $y+5 \le -x$ и $y+5 \le x$: $\cancel{-x}-y-5-y\cancel{+x}-5=10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2y = 20 \Leftrightarrow y=-10.$

2) $y+5 \geq -x$ и $y+5 \le x$: $x\cancel{+y}\cancel{+5}\cancel{-y}+x\cancel{-5}=10 \Leftrightarrow x=5.$

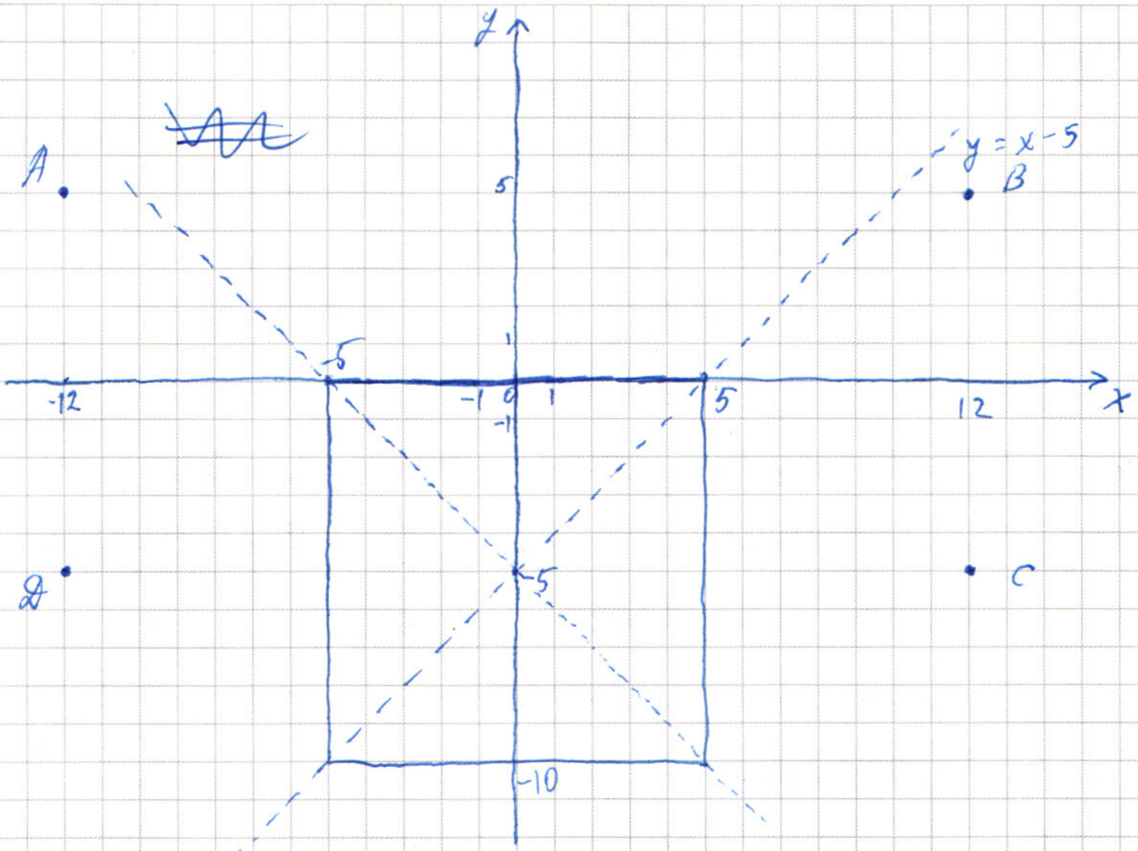
3) $y+5 \le -x$ и $y+5 \geq x$: $-x\cancel{-y}\cancel{-5}\cancel{+y}-x\cancel{+5}=10 \Leftrightarrow x=-5.$

4) $y+5 \geq -x$ и $y+5 \geq x$: $\cancel{x}+y\cancel{+5}+y\cancel{-x}\cancel{+5}=\cancel{10} \Leftrightarrow y=0.$

Второе уравнение системы задаёт 4 окружности с центрами в точках $(12;5)$, $(-12;5)$, $(12;-5)$ и $(-12;-5)$ одинакового радиуса $\sqrt{a}$.

Изобразим это на координатной плоскости xOy:

□ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



В случае, если окр-ть с центром в точке A ~~xx~~ пересекает квадрат, задающийся первым уравнением системы, то и окр-ть с центром в точке B будет пересекать его. Аналогичное утверждение справедливо и для пары окр-тей с центрами в точках C и D.

По условию сис-ма должна иметь ровно 2 решения, что выполняется в одном случае: одна пара окр-тей имеет 2 общие с квадратом точки, а другая пара не имеет их вовсе.

Если $a < 49$, то ~~xxx~~ ни одна из окружностей не пересекается с квадратом.

Если $\boxed{a = 49}$, то окр-ти с центрами в точках C и D касаются квадрата, другая пара окр-тей не имеет с ним общих точек.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пока $49 < a \le 5^2+17^2 = 314$, ~~ххх~~ система будет иметь не менее 4 решений ($R_1 = \sqrt{314}$ – расстояние от точки D (или C) до наиболее удалённой от неё точки, принадлежащей квадрату). Если $314 < a < 514 = 15^2+17^2$, то пара окр-тей с центрами в точках C и D уже не будет пересекаться с квадратом (они „слишком большие"), а пара окр-тей с центрами в точках A и B будет пересекать квадрат более чем в двух различных точках.

При $\boxed{a = 514}$ ($R_2 = \sqrt{514}$ – расстояние от точки A (или B) до наиболее удалённой от неё точки, принадлежащей квадрату).

Если $a > 514$, то окр-ти с квадратом не пересекаются.

Ответ: $a \in \{49; 514\}$.

№3.

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases} \qquad x>0,\ y>0.$$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y-2x)(y+x) - 4(y-2x) = (y-2x)(y+x-4)$

1) $y = 2x$: $(x^2\cdot(2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2/x^6)}$

$16^{-\ln x}\cdot \cancel{x^{-6\ln x}} = 2^{\ln 2 - 6\ln x}\cdot x^{\ln 2}\cdot \cancel{x^{-6\ln x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2 - 5\ln x} \Leftrightarrow \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{x = 2;\ y = 4.}$

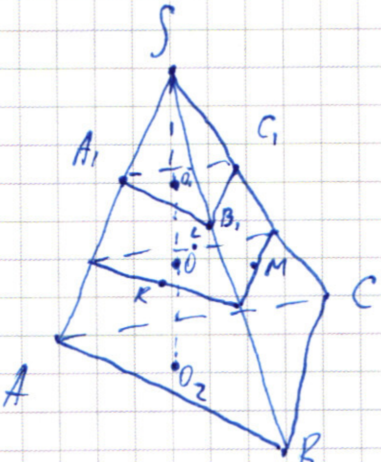
2) $y=4-x$: $\left(x^2\cdot(4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)}$

$x^{-2\ln x}\cdot \cancel{(4-x)^{-4\ln x}} = (4-x)^{\ln(4-x)}\cdot \cancel{(4-x)^{-7\ln x}}$ $\quad (4-x)^{-3\ln x}$

$(2;4)$ часть ответа

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}\cdot x^{-3\ln(4-x)}$

№4.

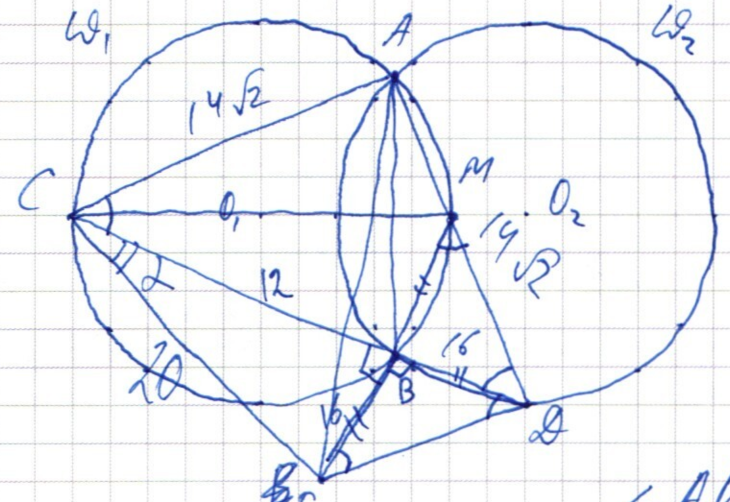


~~Т.к.~~ Пусть $(A_1B_1C_1)$ и (ABC) – касающиеся сферы плоскости в точках O_1 и O_2 соответственно, O – центр сферы, тогда точки S, O_1, O, O_2 лежат на одной прямой; пирамиды $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ подобны друг другу с линейным коэффициентом подобия, равным квадратному корню отношения площадей их оснований: $\frac{SO_1}{SO_2}=\sqrt{\frac{1}{16}}=1/4$. Пусть $SO_1=h$, тогда $O_1O=OO_2=r_{сферы}$, $O_1O+OO_2=O_1O_2=3h$, откуда $O_1O=1{,}5h=OK$; $tg\angle KSO=\frac{OK}{SO}=\frac{1{,}5h}{2{,}5h}=0{,}6$, откуда $\boxed{\angle KSO = arctg\,0{,}6}$, $S_{сеч.(KLM)}=S_{\Delta A_1B_1C_1}\cdot\left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2 = 1\cdot\frac{2{,}5^2h^2}{h^2}=\boxed{6{,}25=S_{сеч}}$

Ответ: $\angle KSO = arctg\,0{,}6$; $S_{сеч}=6{,}25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



а) Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle AO_1B = 2\alpha = \angle AO_2B$ в силу рав-ва радиусов окр-тей ω_1 и ω_2; $\angle ADB = 90^\circ - \alpha$, тогда $\angle AO_2B = 180^\circ - 2\alpha$.

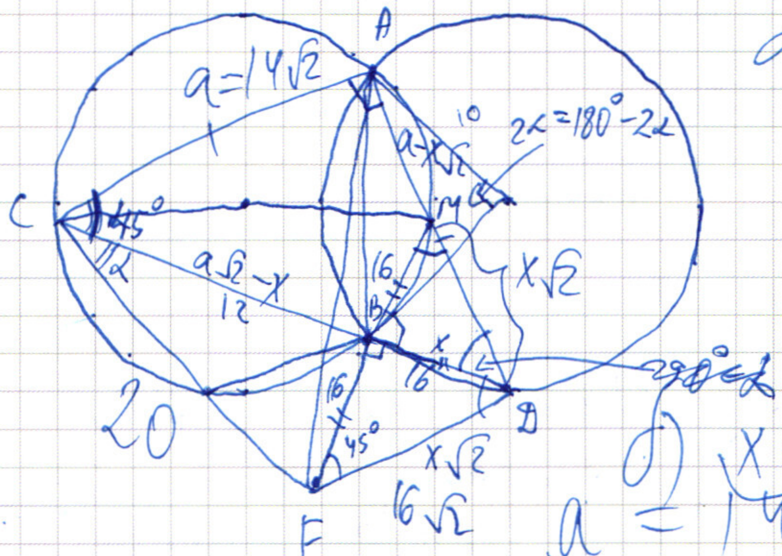
Отсюда получаем $2\alpha = 180^\circ - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ = \angle BFD = \angle BDF$. Пусть $BF \cap \omega_1 = M$, $\angle CBM = 90^\circ$, тогда CM – диаметр ω_1, $CM = 20$, при этом $FB = BM$, поскольку DB является и высотой и биссектрисой в $\triangle FDM$. Отсюда следует, что $\triangle FCM$ – равнобедренный ($CB \perp FM$, $FB = BM$), т.е. $CM = \boxed{CF = 20}$

б) Пусть $\angle FCD = \alpha$; $BF = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, тогда $\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$; $AC = AD = \frac{12+16}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$

$\sin(45^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0{,}7\sqrt{2}$.

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 0{,}7\sqrt{2} = \boxed{196 = S_{\triangle ACF}}$

Ответ: а) $FC = 20$; б) $S_{\triangle ACF} = 196$.



$\alpha = 45^\circ$; $M \in BF$.

~~$x \cdot a\sqrt{2} = x\sqrt{2} - a2$~~

$CM = 20$ - диаметр.

$\triangle FCM =$ ~~равнобедр.~~

$CM = CF = 20$

б) $x = 16$, $a\sqrt{2} - 16 = 12$

$a = 14\sqrt{2} \to CD = 28$

$\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$.

$\sin(45^\circ + \alpha) = \sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}4}{\sqrt{2}} = 0{,}7\sqrt{2}$.

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 0{,}7\sqrt{2} = 196$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

$\cos(5x + 4x) = \cos 5x \cdot \cos 4x - \sin 5x \cdot \sin 4x$.

$-2\sin 7x \cdot \sin 2x + 2\sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

$2\sin 7x \cdot \sqrt{2}\cos(2x + \pi/4) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}\cos(9x - \pi/4) + \sqrt{2}\sin(5x - \pi/4) - \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$

$\sin(\frac{\pi}{4} - 9x) + \sin(5x - \pi/4) - \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$.

~~$2 \cdot \sin(-2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 7x) -$~~

$\cos 5x \cdot \cos 4x - 2\sin 5x \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 7x \cdot \sin 2x + 2\sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

$2\sin 7x \cdot \sqrt{2}\cos(2x + \pi/4) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

$2\sin 7x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) - \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0$.

$2\sin 7x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) - 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$-2\sin 7x \cdot \sin 2x + 2\sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$2\sin 7x \cdot \sqrt{2}\cos(2x + \pi/4) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\sin 7x \cdot \sin(\pi/4 - 2x) - \sin(\frac{\pi}{2} - 4x) = 0.$

$\cancel{2}\sin 7x \cdot \sin(\pi/4 - 2x) - \cancel{2}\sin(\pi/4 - 2x)\cdot\cos(\pi/4 - 2x) = 0.$

$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)\cdot(\sin 7x - \sin(2x - \pi/4)) = 0.$

$\sin(\pi/4 - 2x)\cdot 2\sin(2,5x + \pi/8)\cdot\cos(4,5x - \pi/8) = 0.$

1) $\sin(\pi/4 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \pi/4 - 2x = \pi n, n \in Z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$

2) $\sin(2,5x + \pi/8) = 0 \Leftrightarrow x = \cancel{\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9}k}, k \in Z.$ $-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k$

3) $\cos(4,5x - \pi/8) = 0 \Leftrightarrow x = \cancel{\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5}m, m \in Z}.$ $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{9}m, m \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}n, n \in Z;$ $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k, k \in Z;$ $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{9}m, m \in Z.$

№7.

$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}, \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x. \end{cases}$ $\qquad 2^x + 3\cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2\cdot(2^{32} - 1)x.$

~~При x = x~~

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2\cdot(2^{32} - 1)x.$

При $x = 6$: $64 + 3\cdot 2^{34} = (76 - 12) + 12\cdot 2^{32}$, т. е.

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$ при $x = 6$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0.\end{cases}$$ решить сис-му уравнений.

$y^2 - xy - 2x^2 = 0$; $D = 9x^2 \to y = \frac{x \pm 3x}{2} \to y = 2x$ или $y = -x$

$(y-2x)(y+x) - 4(y-2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-2x)(y+x-4) = 0$ $x > 0,\ y > 0.$

1 $y = 2x$: $(x^2\cdot(2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2/x^6)}$

$(x^2\cdot 16\cdot x^4)^{-\ln x} = \cancel{2x}\ (2x)^{\ln 2 - 6\ln x}$

$\cancel{(16x^6)^{-\ln x}} \Rightarrow 16^{-\ln x}\cdot \cancel{x^{+6\ln x}} = \cancel{2x}\ 2^{\ln 2 - 6\ln x}\cdot x^{\ln 2}\ \cancel{x^{6\ln x}}$

$2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2}\cdot 2^{\ln x}\cdot 2^{-6\ln x}$

$-4\ln x = \ln 2 - 5\ln x \Leftrightarrow \ln x = \ln 2 \Leftrightarrow \boxed{x = 2, y = 4.}$

2 $y = 4 - x$: $(x^2\cdot(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$ ПОДУМАТЬ.

$x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$ $\Big|\cdot(4-x)^{+4\ln x}$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right) + 4\ln x}$ $\Leftrightarrow x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{(4-x)x^4}{x^7}\right)}$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$\sqrt{2}\cos(9x - \pi/4)$

$-(-\sin 5x + \cos 5x) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x\right) = -\sqrt{2}\cos(5x + \pi/4).$

$\cos(5x + \pi/4)$

$\cancel{\sqrt{2}}\cos(9x - \pi/4) - \cancel{\sqrt{2}}\cos 4x - \cancel{\sqrt{2}}\cos(5x + \pi/4) = 0.$

$\cos(9x - \pi/4) - \cos(5x + \pi/4) = -2\cdot\sin 7x\cdot\sin(2x - \frac{\pi}{2}).$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$-2\sin 7x\cdot\sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cdot\cos 2x = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$\sqrt{2}\cos(9x - \pi/4) - \sqrt{2}\cos(5x + \pi/4) = \sqrt{2}\cos 4x.$

$\cancel{\cos(9x - \pi/4) = \cos 4x + \cos(5x + \pi/4).}$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin(2x - \pi/2) = \cos 4x$

$2\cdot\sin 7x\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}_{\cos 2x} = \cos 4x$

$2\sin 7x\cdot\cos 2x = \cos 4x.$

$-2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x = \sqrt{2}\cos 4x - 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x.$

$\left(x^2(4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

$x^{-2\ln x}\cdot(4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)} \quad \Big|\cdot(4-x)^{4\ln x}$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right) + \cancel{4}\ln x^4}$

$x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^3}\right)} \longrightarrow x^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x) - \ln x^3}$

$x^{-2\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{\left((4-x)^{\ln x}\right)^3} \Rightarrow x^{-2\ln x} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{x^{3\ln(4-x)}}$

$\cancel{x^{3\ln x}}\ x^{3\ln(4-x) - 2\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}.$

$(4-x)^{\log_{(4-x)} x\cdot(-2\ln x)} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^3}\right) + \cancel{\ln x^4}}$

$-\log_{(4-x)} x\cdot 2\ln x = \ln(4-x) - 3\ln x.$

$y^2 - xy - 2x^2 = 0;\ D = (3x)^2 \to y = \frac{x \pm 3x}{2} \to y = 2x$ или $y = -x.$

$(y-2x)(y+x) = y^2 - 2xy + xy - 2x^2 = y^2 - xy - 2x^2.$

$(y-2x)(y+x) + 4(2x-y) = 0 \Leftrightarrow (y-2x)(y+x) - 4(y-2x) = 0.$

$(y-2x)(y+x-4) = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чисел $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. $C_8^3 \cdot C_6^3 = 56 \cdot 20 = 1120$. $\frac{8!}{3!5!} = \frac{7\cdot 8\cdot 8}{6}$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

1) $\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 2x \cdot \sin 7x$

2) $\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cdot \cos 2x$.

~~$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 7x)$~~

$C_8^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 8}{6} = 56$

$C_6^2 = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$

$C_6^2 = \frac{720}{2\cdot 24}$

$\overline{abcdefgh}$, $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f\cdot g\cdot h = 9261$.

$9261 \,|\, 9$, 1029 $\quad \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6}$ $\quad 9261 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7$.

11333777

$1029 = 3\cdot 343 = 3\cdot 7^3$; ост. две цифры — единицы

77733311

Набор цифр: 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7.

$C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$ — способов поставить единицы.

$C_6^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} = 20$ — способов расставить тройки.

Итого $C_8^2 \cdot C_6^3 = 560$ чисел, удовлетвор. усл-ю.

$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. \end{cases}$ a: сис-ма им. ровно 2 реш-я.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

~~1) $x \leq -y-5$~~ ~~1) $y+5 \leq -x-5+y$~~

1) $y+5 \leq -x$ и $y+5 \leq x$: $-y-5-y-5 = 10$

$-2y = 20 \iff y = -10$, при $y < -x-5$ и $y \leq x-5$.

2) $y+5 \geq -x$ и $y+5 \leq x$: $x+y+5-y+x-5 = 10 \iff x = 5$,

при $y \geq -x-5$ и $y \leq x-5$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3) $y+5 \le -x$ и $y+5 \ge x$: $-x$ ~~...~~ $-x$ ~~...~~ $=10$

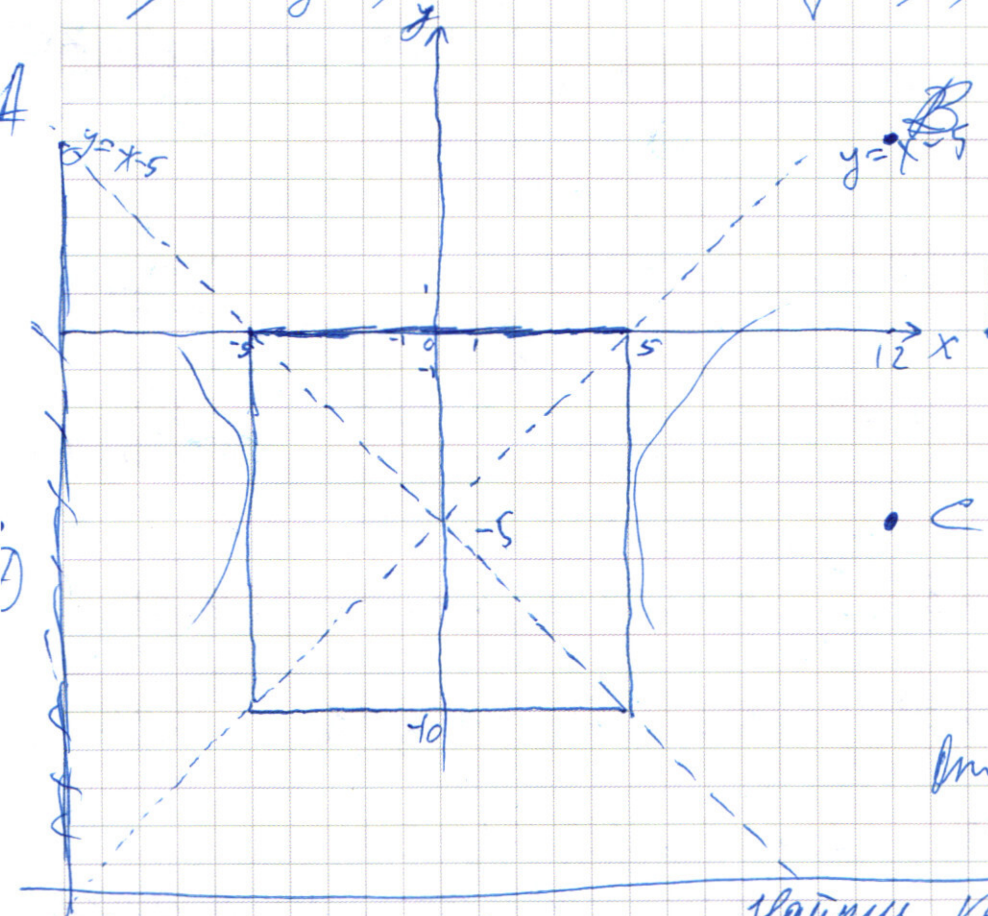
$-2x = \cancel{2}10 \Leftrightarrow \underbrace{x = -\cancel{10}5}$ при $y \le -x-5$ и $y \ge x-5$.

4) $y+5 \ge -x$ и $y+5 \ge x$: ~~...~~ $+y$ ~~...~~ $+y$ ~~...~~ $=$ ~~...~~ $\Leftrightarrow$ $y=0$,

при $y \ge -x-5$ и $y \ge x-5$.

$\boxed{a = 49.}$

$\boxed{a = \cancel{...} 225+289=514.}$



!Объяснить ещё надо будет.

Ответ: $a = 49$ и $a = 514$.

$$\begin{cases} y \ge 2^x + 3 \cdot 2^{34}, \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x. \end{cases}$$

Найти кол-во целых пар чисел (x, y), удовл. сис-ме неравенств.

Откуда: $2^x + 3 \cdot 2^{34} \le y < 76 + 2(2^{32}-1)x$.

$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32}-1)x$.

$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32}-1)x$; ур-е имеет не более двух решений.

~~$2 + 3 \cdot 2^{34}$ ... $76 + 2 \cdot 2^{33}$~~

$\underbrace{2^x - 2(2^{32}-1)x}_{f(x)} = \underbrace{76 - 3 \cdot 2^{34}}_{const}$; $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2(2^{32}-1) = 0$

ПОДУМАТЬ

$2^x \cdot \ln 2 = 2(2^{32}-1) \Leftrightarrow 2^x = \cancel{2(2^{32}-1)}\ 2(2^{32}-1) \log_2 e.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

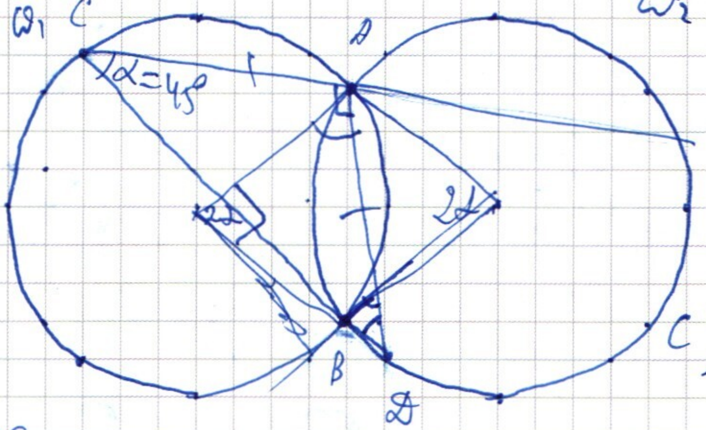
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

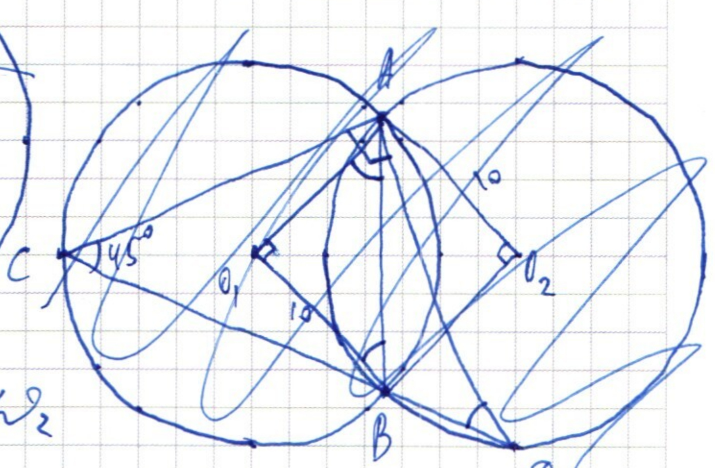
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

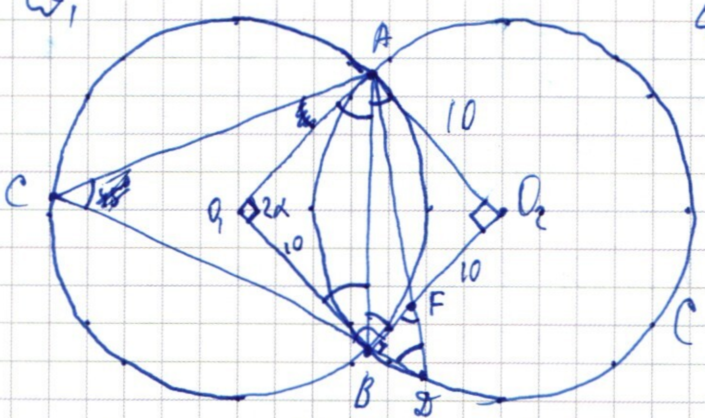
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

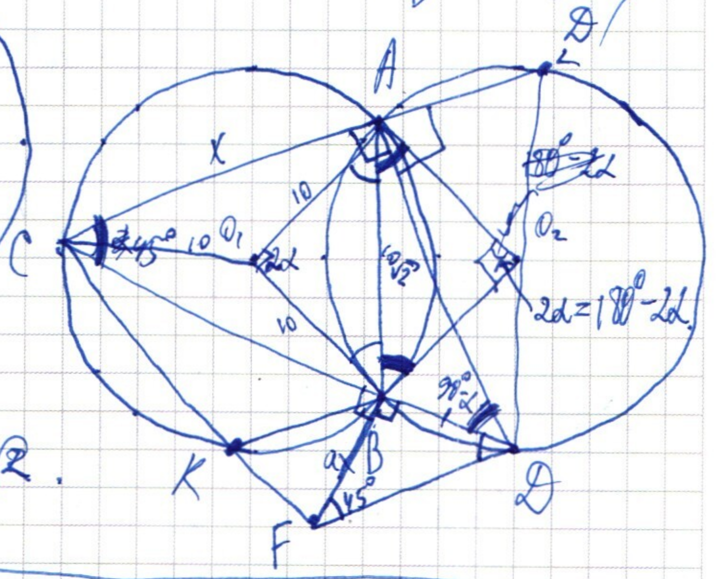
$$\left(x(4-x)^2\right)^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right)}$$ ЛУЧШЕ ГЕОМУ



$B \in CD$. CF-?







$\alpha = 45^\circ$. $\angle CO_1A$

$x(x+AL) = (x\sqrt{2}-a)\,x\sqrt{2}$.

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34}, \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x. \end{cases}$$

$2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32}-1)x$.

$76 = 2^2\cdot 19$.

$2^x + \cancel{2}\,2^{35} + 2^{2}(2^{32}-19) < 2(2^{32}-1)\cdot x$.

~~При~~ $\cancel{x = 34}$; $x = \cancel{4}$; $\cancel{8 + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2^{36}}$

$2^x + 3\cdot 2^{34} > 3\cdot 2^{34}$

$16 + 3\cdot 2^{34} < 76 + 8(2^{32}-1)$.

$16 + \cancel{3\cdot 2^{34}} + \cancel{76} < 76 + \cancel{2}^{35} - 8$; при $x = 6$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$3\cdot 2^{34} < 2^x + 3\cdot 2^{34} < 76 + (2^{33} - 2)x$

~~При $x=6$: $64 + 3\cdot 2^{34} < 76 + 2^{33}\cdot 6 - 12$~~

$f(x) = 2^x + 3\cdot 2^{34} - 76 - (2^{33}-2)x$

$f'(x) = 2^x\cdot \ln 2 - (2^{33}-2)$.

~~Если $x<6$, то при $x\in(-\infty;6)$~~

~~Если $x=1$~~ $(2^{33}-2)x > 3\cdot 2^{34} - 76$.

$(2^{32}-1)x > 3\cdot 2^{33} - 38$

Если $x=5$: $5(2^{32}-1) \vee 6\cdot 2^{32} - 38$.

$5\cdot 2^{32} - 5 \vee 6\cdot 2^{32} - 38$ $\quad x>5$.

~~Если $x=7$~~ Если $x=7$: $2^7 + 3\cdot 2^{34} \overset{?}{<} 76 + 7(2^{33}-2)$.

$\cancel{128} + 6\cdot 2^{33} \overset{\vee}{<} \cancel{76} + 7\cdot 2^{33} \cancel{-14}$.

$66 \quad 62$

Если $x=8$: $256 + 3\cdot 2^{34} < 76 + 16(2^{32}-1)$.

$196 + 12\cdot 2^{32} \overset{\vee}{<} 16\cdot 2^{32}$ ПОДУМАТЬ.

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

$\sqrt{2}\cos(9x - \pi/4) - \sqrt{2}\cos(5x+\pi/4) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2}\sin(5x - \pi/4) =$

$= \sqrt{2}\cos(\pi/4 - 5x) = \sqrt{2}\cos(5x - \pi/4)$.

$\sqrt{2}\cos(9x - \pi/4) + \sqrt{2}\cos(5x - \pi/4) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$.

$2\cos(7x - \pi/4)\cdot\cos 2x - \cos 4x = 0$.

$\cos(\underbrace{9x - \pi/4}_{2t}) - 2\sin(0{,}5x - \pi/8)\cdot\sin(\underbrace{4{,}5x - \pi/8}_{t}) = 0$.

$(4-x)^{\ln(4-x) - 7\ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)}\cdot x^{7\ln(4-x)}$

$6{,}25$.

S сег

$x>6$.

1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7.

$\frac{5\pi}{4\cdot 4{,}5}$