МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $9261 = 7\cdot7\cdot7\cdot3\cdot3\cdot3 = 7\cdot7\cdot7\cdot9\cdot3$

Число 9261 можно представить как произведение цифр двумя способами.
($7\cdot7=49$ - не цифра; $3\cdot7=21$; $3\cdot3\cdot3=27$)

1) восьмизначное число состоит из цифр 7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1
Посчитаем количество таких чисел

$\underbrace{C_8^3}_{\text{кол-во способов поставить семёрки в числе}}\cdot C_5^3 \cdot C_2^2$ ← кол-во способов поставить единицы на оставшиеся места; C_5^3 ← кол-во способов поставить 3 в оставшиеся места

$\frac{8!}{3!5!}\cdot\frac{5!}{3!2!}\cdot1 = 560$ чисел

2) восьмизначное число состоит из цифр 7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1
Посчитаем количество таких чисел

$\underbrace{C_8^3}_{\text{кол-во способов поставить 7}}\cdot C_5^3\cdot 2$ ← кол-во способов поставить 3 и 9 на ост 2 места. C_5^3 ← кол-во способов поставить 1 на ост. места

$560\cdot2 = 1120$ чисел

Всего чисел $1120+560 = 1680$ чисел

Ответ: 1680 чисел.

№5 $\begin{cases}|x+y+5|+|y-x+5|=10\\(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a\end{cases}$

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

1) $\begin{cases}x+y+5\geq0\\y-x+5\geq0\end{cases}$ $\begin{cases}y\geq -x-5\\y\geq x-5\end{cases}$ $x+y+5+y-x+5=10$
$2y+10=10 \Rightarrow y=0$

2) $\begin{cases}y\geq -x-5\\y\leq x-5\end{cases}$ $x+y+5-y+x-5=10 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

3) $\begin{cases}y\leq -x-5\\y\geq x-5\end{cases}$ $-x-y-5+y-x+5=10 \Rightarrow -2x=10 \Rightarrow x=-5$

4) $\begin{cases}y\leq -x-5\\y\leq x-5\end{cases} \Rightarrow -x-y-5-y+x-5=10 \Rightarrow -2y=20$
$y=-10$

Квадрат ABCD является графиком данной функции
$A(-5;0)$ $B(5;0)$ $C(5;-10)$ $D(-5;-10)$

$O_1(12;5)$ $O_3(-12;-5)$
$O_2(-12;5)$ $O_4(12;-5)$

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$
Графиком функции являются 4 окружности с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 и радиусом $\sqrt{a}$

1) ровно 2 решения будет, когда окружности с центрами O_3 и O_4 касаются квадрата $ABCD$.

Тогда $R=7$

Окружности с центрами O_1 и O_2 не будут касаться/пересекать $ABCD$, т.к. $O_2A = O_1B > 7$

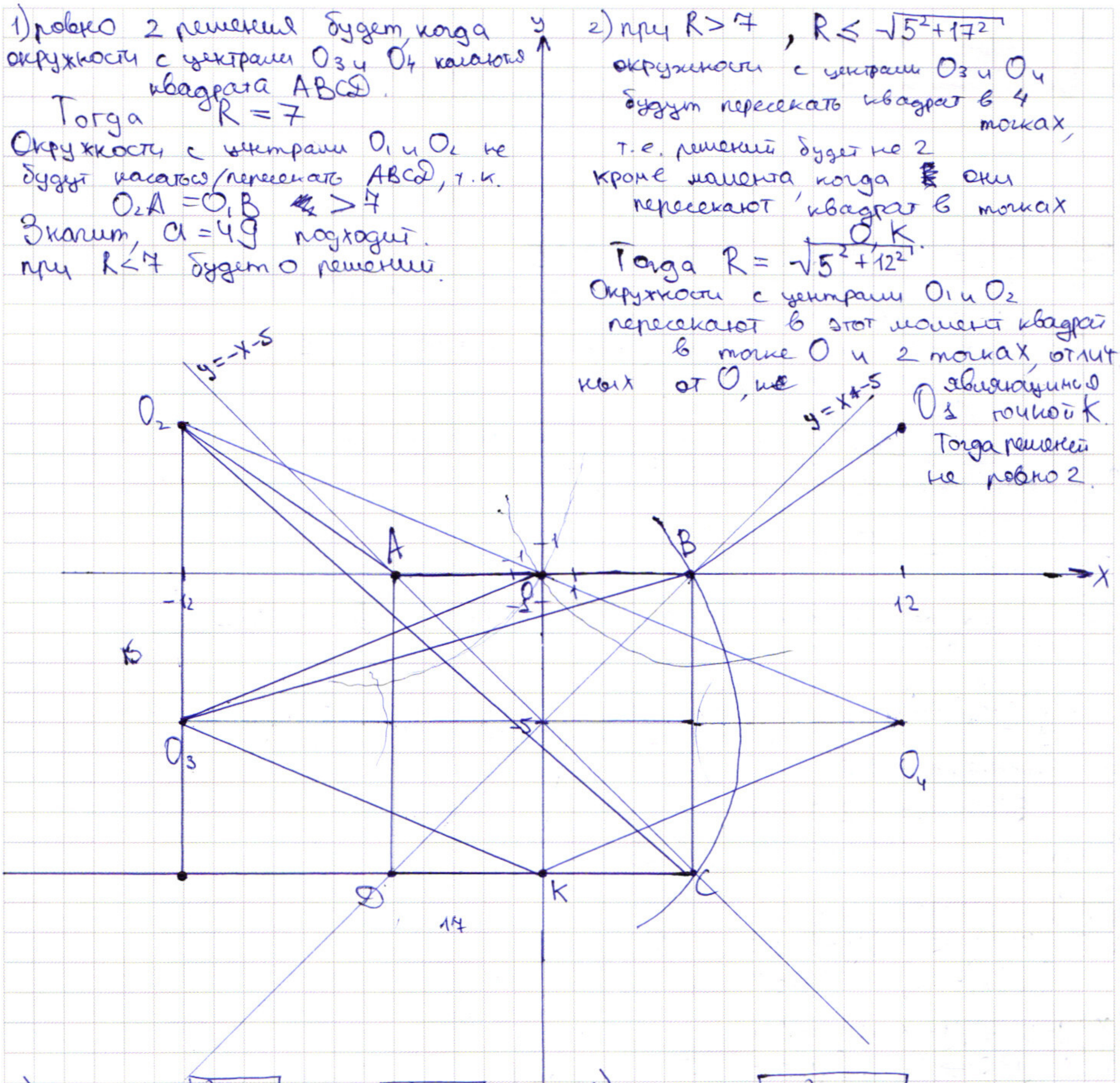
Значит, $a=49$ подходит.

при $R<7$ будет 0 решений.

2) при $R>7$, $R \leq \sqrt{5^2+17^2}$ окружности с центрами O_3 и O_4 будут пересекать квадрат в 4 точках, т.е. решений будет не 2 кроме момента когда они пересекают квадрат в точках O, K.

Тогда $R = \sqrt{5^2+12^2}$.

Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекают в этот момент квадрат в точке O и 2 точках, отличных от O, не являющимися точкой K. Тогда решений не ровно 2.



3) при $R > \sqrt{5^2+7^2}$, $R < \sqrt{15^2+17^2}$ окружности с центрами O_1 и O_2 пересекают квадрат $ABCD$ в более, чем двух точках поэтому решений не ровно 2.

4) при $R = \sqrt{15^2+17^2}$ окружность с центром O_2 касается квадрата в точке C.

окружность с центром O_1 касается кв. в точке D.

А окр. с ц. O_3 и O_4 не пересекают квадрат, т.к. $R\ \sqrt{15^2+17^2} > \sqrt{5^2+17^2}$

Тогда система имеет ровно 2 решения.

Значит, $a = 15^2+17^2 = 514$ подходит

5) при $R > \sqrt{15^2+17^2}$ ни одна окружность не будет пересекать $ABCD$, т.е. система не будет иметь решений.

Ответ: $a=514$, $a=49$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x$

$-\sqrt{2}\cdot\cos 4x + 2\cdot\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$2\cdot\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cdot(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\cdot\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cdot(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\cdot\sin 7x - \sqrt{2}\cdot(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

1) $\cos 2x - \sin 2x = 0$

$\sqrt{2}\left(\underset{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\cos 2x - \underset{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\sin 2x\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in Z$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

2) $2\cdot\sin 7x - \sqrt{2}\cdot(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\sqrt{2}\cdot(\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\underset{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\cos 2x + \underset{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin 2x\right) = 2\cdot\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\underset{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\cos 2x + \underset{\cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\sin 2x\right) = 2\cdot\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$2\sin 7x - 2\cdot\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\cdot\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

1) $\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k$

$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$

$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$

2) $\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi t$

$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi t$

$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi t$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi t}{9}$

Ответ:

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi t}{9}$

№3 $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y/x^7} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y-2x)(x+y-4) = 0$$

1) $y = 2x$

$$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^7}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$(16 \cdot x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}} = (2x)^{\ln 2 - \ln x^6}$$

$$(\sqrt[3]{4} \cdot x)^{-6\ln x} = (2x)^{-6\ln x} \cdot (2x)^{\ln 2} \quad \Big| : (2x)^{-6\ln x}$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)^{-6\ln x} = (2x)^{\ln 2} = \left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)^{6 \cdot \ln x} = 4^{\ln x}$$

$$(2x)^{\ln 2} = 4^{\ln x}$$

Т.к. функция монотонная, то решение единственно

$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$

2) $y = 4 - x$

$$\left(x^2 \cdot (4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^7}}$$

решение единствено $\Rightarrow x = 2$

$$(4 \cdot 2^4)^{-\ln 2} = 2^{\ln \frac{2}{2^7}}$$

$$2^{-6\ln 2} = 2^{-6\ln 2}$$

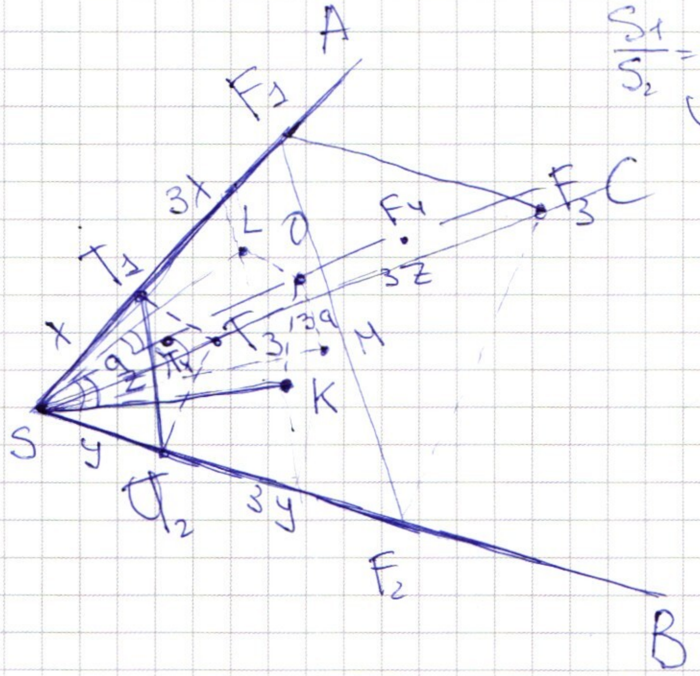
Ответ: $x = 2$
$y = 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16}$ $\triangle T_1T_2T_3 \sim \triangle F_1F_2F_3$ по 2 углам

с коэффициентом подобия 4

$$\frac{T_1T_2}{F_1F_2} = \frac{T_1T_3}{F_1F_3} = \frac{T_2T_3}{F_2F_3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{ST_1}{SF_1} = \frac{ST_2}{SF_2} = \frac{ST_3}{SF_3} = \frac{1}{4}$$

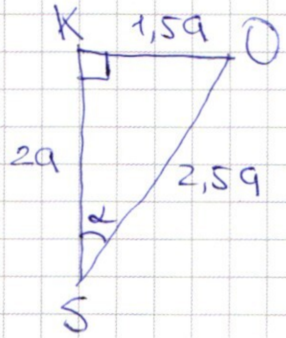
SO пересекает $\triangle$ в точках T_4 и F_4.

$ST_4 = a \Rightarrow T_4F_4 = 3a$

т.к. плоскости касаются сферы

$R = T_4O = OF_4 = 1{,}5a$

Рассмотрим $\triangle KSO$



$OK = R = 1{,}5a$

$OS = ST_4 + T_4O = a + 1{,}5a = 2{,}5a$

$\alpha = \angle KSO$

$$\sin\alpha = \frac{1{,}5a}{2{,}5a} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{3}{5}$$

~~SK = SL = SM~~
~~(KLM) || (T_1T_2T_3)~~

$$S_{LOK} = \frac{1}{2}\left(S_{T_1T_2T_3} + S_{F_1F_2F_3}\right) = \frac{1+16}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\cdot\sin 7x\cdot \cancel{2x}\sin 2x + 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

$2\cdot\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

$\sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$-\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\cdot\sin 7x - \sqrt{2}\cdot\cos 2x - \sqrt{2}\cdot\sin 2x) = 0$

1) $\cos 2x - \sin 2x = 0$

2) $2\cdot\sin 7x - \underbrace{\sqrt{2}\cdot(\cos 2x + \sin 2x)}_{\parallel} = 0$

$\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

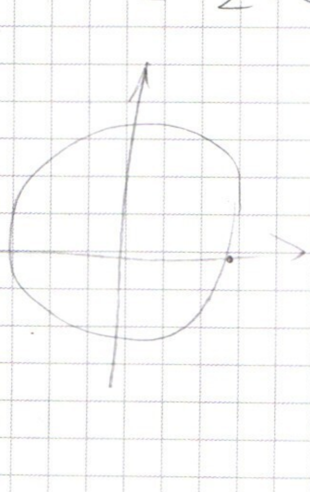
$2\cdot\sin 7x - 2\cdot\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\cdot\sin$ $\qquad$ $\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$2\cdot$

$= 2\cdot\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}$



$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\frac{2}{x^6}}$.

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2\cdot x^{-6}}$

$16^{-\ln x}\cdot x^{-6\ln x} = (2x)^{\ln 2} + (2x)^{-6\ln x}$

$-\ln x = -6\ln x$

$(2x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\frac{1}{x^6}} = -\ln x^{-6}$

$(x^2\cdot(2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\frac{2x}{x^7}}$

$4x^2 - 2x^2 - 2x^2 + 8x - 8x = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}} = y^{\ln\frac{y}{x^7}} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$\cancel{y^{\ln y}} - y^{\ln\frac{y}{x^7}}\cdot y^{4\cdot\ln x}\cdot x^{2\ln x} = 1$$

$$y^{\ln\frac{y}{x^7}}\cdot y^{\ln x^4} = y^{\ln\frac{y}{x^7}+\ln x^4} = y^{\ln\frac{y}{x^3}}$$

$$y^{\ln\frac{y}{x^3}}\cdot x^{\ln x^2} = 1$$

$x = y$

$$x^{6\cdot -\ln x} = x^{\cdot\ln\frac{1}{x^6}}$$

$$x^{-\ln x^6} = x^{\ln\frac{1}{x^6}}$$

$$\frac{x^{\ln\frac{1}{x^6}}}{x^{\ln x^6}} = 1$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$y^2 - 4y + 4$

$(y$

$$y^2 - 2xy + x^2 + xy - 3x^2 + 8x - 4y$$

$$(x-y)^2 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

$$(x-y^2)^2 - 3(x-y)^2 - 5xy + 3y^2 + 8x - 4y$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$-y^2 + 2xy - x^2 + 2y^2 - 3xy - x^2 + 8x - 4y$$

$$-(x-y)^2$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(x+y)^2 - 3x(y+x)$$

$$(x+y)(x+y-3x)$$

$$(x+y)(y-2x) - 4(y-2x) = 0$$

$$(x+y-4)(y-2x) = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 + 2xy + x^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y$$

$$(y+x)^2 - 3x(x+y)$$

$$(x+y)(x+y-3x)$$

$$(x+y)(y-2x) - 4(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)(x+y-4) = 0$$

$$y = 2x;$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\overline{a_1a_2a_3\ldots a_8}$

$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8 = 9261$

$9261 : 9 = 1029$

$1029 : 3 = 343$

$343 : 7 = 49$

$7\cdot 7\cdot 7\cdot 3\cdot 3\cdot 3$

$21 \cdot 21 = 441$

$441 \cdot 21 = 9261$

1) $3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot1\cdot1$

2) $9\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7\cdot1\cdot1\cdot1$

1) 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

$C_8^3\cdot C_5^3$

2) 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$

$C_8^3\cdot C_5^3\cdot 2$

$y + x + 5 \geq 0 \Rightarrow y \geq -x-5$

$y + 5 - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x-5$

$2\cdot\sin 7x(\sin 2x + \cos 2x)$

$2\cdot\sin7x\cdot\sin2x$

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cdot\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$2\cdot\sin7x\cdot\cos2x$

$x + y + 5 + y + 5 - x = 10$

$2y + 10 = 10$

$y^2 = 0$

$5600 \cdot 2 = 112$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$-\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} -$
$-\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} = \left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}$

$\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$

$\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} - 1 + 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha - \cos\beta$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

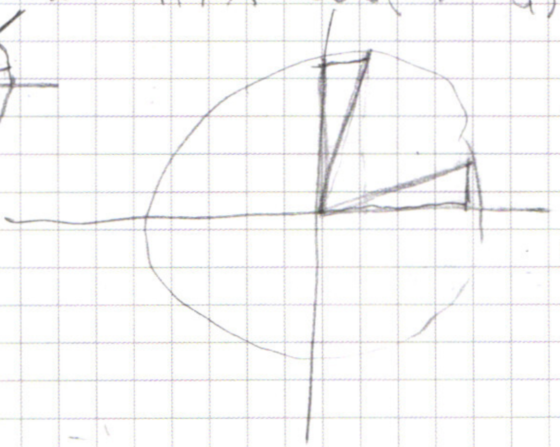
$\cancel{2\cdot\cos} - 2\cdot\sin 7x\cdot\sin 2x + 2\cdot\sin 7x\cdot\cos 2x$

$2\cdot\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cdot\cos 4x = 0$

$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\alpha - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\sin\alpha\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$2\sin 7x\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\cos 4x$

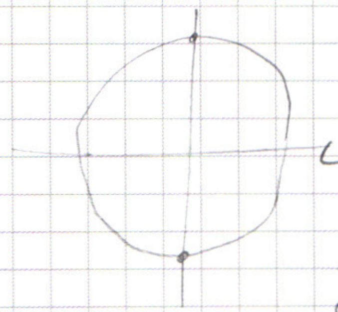
$2\cdot\sin 7x\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$



$2\cdot\sin 7x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-2x\right) = \cos 4x$

$2\cdot\sin 7x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = \cos 4x$

$\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$



$x + y + 5 - y - 5 + x = 10$

$2x = 10$

$x = 5$

$-x - y - 5 + y + 5 - x = 10$

$-2x = 10$

$x = -5$

$y < -x-5$

$y < x-5$

$-x - y - 5 - y - 5 + x = 10$

$-2y - 10 = 10$

$-2y = 20$

$y = -10$

$(x^2y^4)^{-\ln_e x} = y^{\ln_e\frac{y}{x^7}}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$4y^2 - 4y + 1 - ($

$\frac{1}{x^{2\cdot\ln x}}\cdot\frac{1}{y^{4\cdot\ln x}} = y^{\ln\frac{y}{x^7}}$

$\frac{1}{x^{2\cdot\ln x}} = y^{4\cdot\ln x}\cdot y^{\ln\frac{y}{x^7}} = y^{4\cdot\ln x + \ln\frac{y}{x^7}}$

$x^{-\ln x^2} = y^{\ln\frac{y}{x^3}}$

$\ln x^4 + \ln\frac{y}{x^7} =$

$= \ln\frac{y}{x^3}$

$\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$

$\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}$ 56

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y/x^7} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = y^2 + 2xy + x^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y =$

$= (x+y)^2 - 3x(x+y) + 8x - 4y = (x+y)(y-2x) - 4(y-2x) =$

$= (x+y-4)(y-2x) = 0$

1) $y = 2x$

$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^7}}$

$x = 1$

$\boxed{(16 \cdot x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}}$

$x = \frac{1}{2}$

$16 \cdot \frac{1}{2^6}$

$16^{-\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = (2x)^{\ln 2 - \ln x^6}$

$16^{-\ln x} \cdot \cancel{x^{-\ln x^6}} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2} \cdot 2^{-\ln x^6} \cdot \cancel{x^{-\ln x^6}}$

$2^{-\ln x^4} \cdot 2^{\ln x^6} = (2x)^{\ln 2}$

$2^{\ln x^2} =$

$(16 \cdot 1)^0 = 1$

$y = 4 - x$

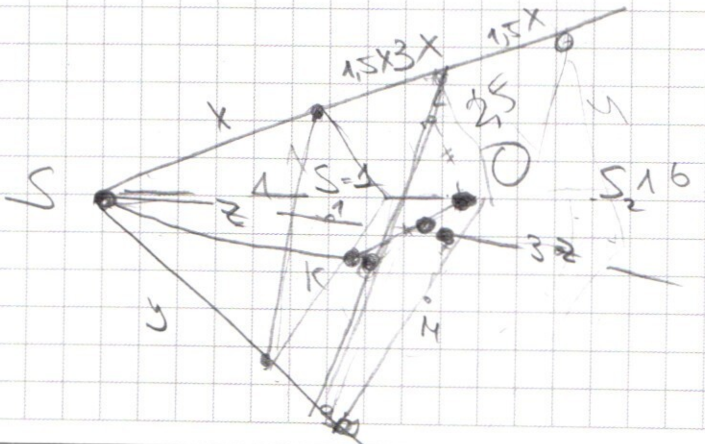
$(x^2(4-x)^4)^{\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^7}}$

$2 \cdot ^{\ln_e 2}$

$x = e$

$(16 \cdot e^6)^{-1} = 2 \cdot e^{\ln \frac{2}{e^6}}$

$k = 4$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x = e$

$\log_e \frac{2}{e_6}$

$(16 \cdot e^6)^{-1} = (2 \cdot e)^{\ln}$ a^{-9} $(a^{-3})^3$

$x = 2$

$(16 \cdot x^6)^{\ln x^{-1}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$

$2^4 \cdot x^6$

$(\sqrt[6]{2^4} \cdot x)^{6 \cdot \ln x^{-1}} = (2x)^{6 \cdot \ln \frac{\sqrt[6]{2}}{x}}$

$\sqrt[6]{16}$

$(\sqrt[3]{4} \cdot x)^{-6 \cdot \ln x} = (2x)^{-6 \cdot \ln \frac{x}{\sqrt[6]{2}}} =$

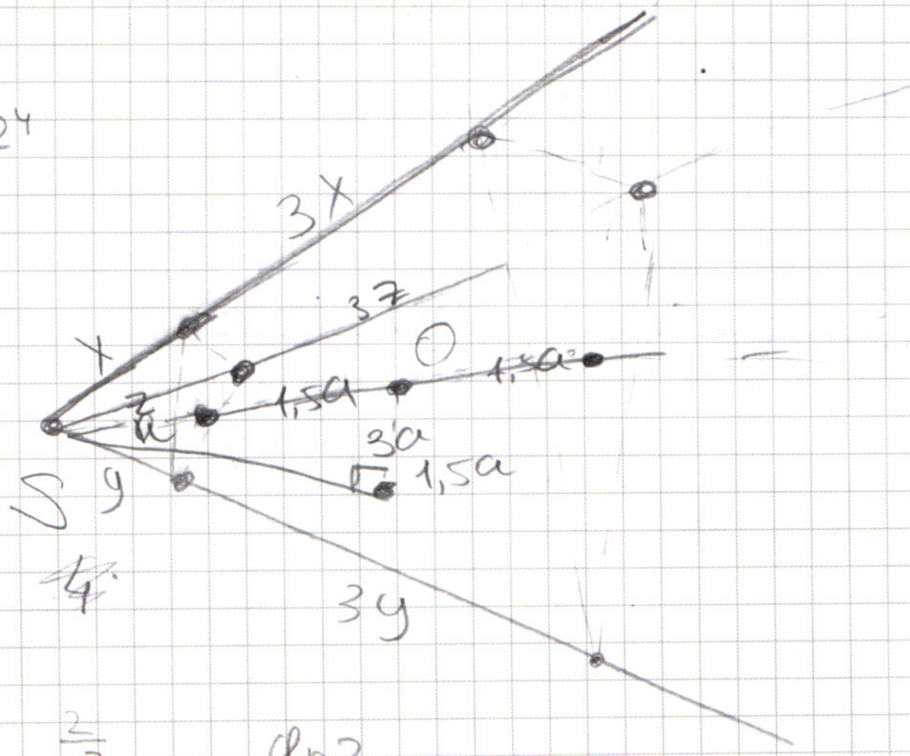
$= (2x)^{-6 \ln x + \ln 2}$

$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)^6$

$\frac{2^6}{\sqrt[3]{4^6}} = \frac{2^6}{2^2} = 2^4$

$\frac{2^6}{2^4}$

$(2x)^{\ln 2} = 2^{2 \ln x}$



$2^{\ln 2} \cdot 2$

$x = 2$

$(4 \cdot 2^4)^{\ln 2} = 2^{\ln \frac{2}{2^7}}$ $2^{-\ln 2}$

2^{-6}

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$y < 76 + 2^{33}x - 2x$

$y < 76 + 2^{33}\cdot x - 2x$

$y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

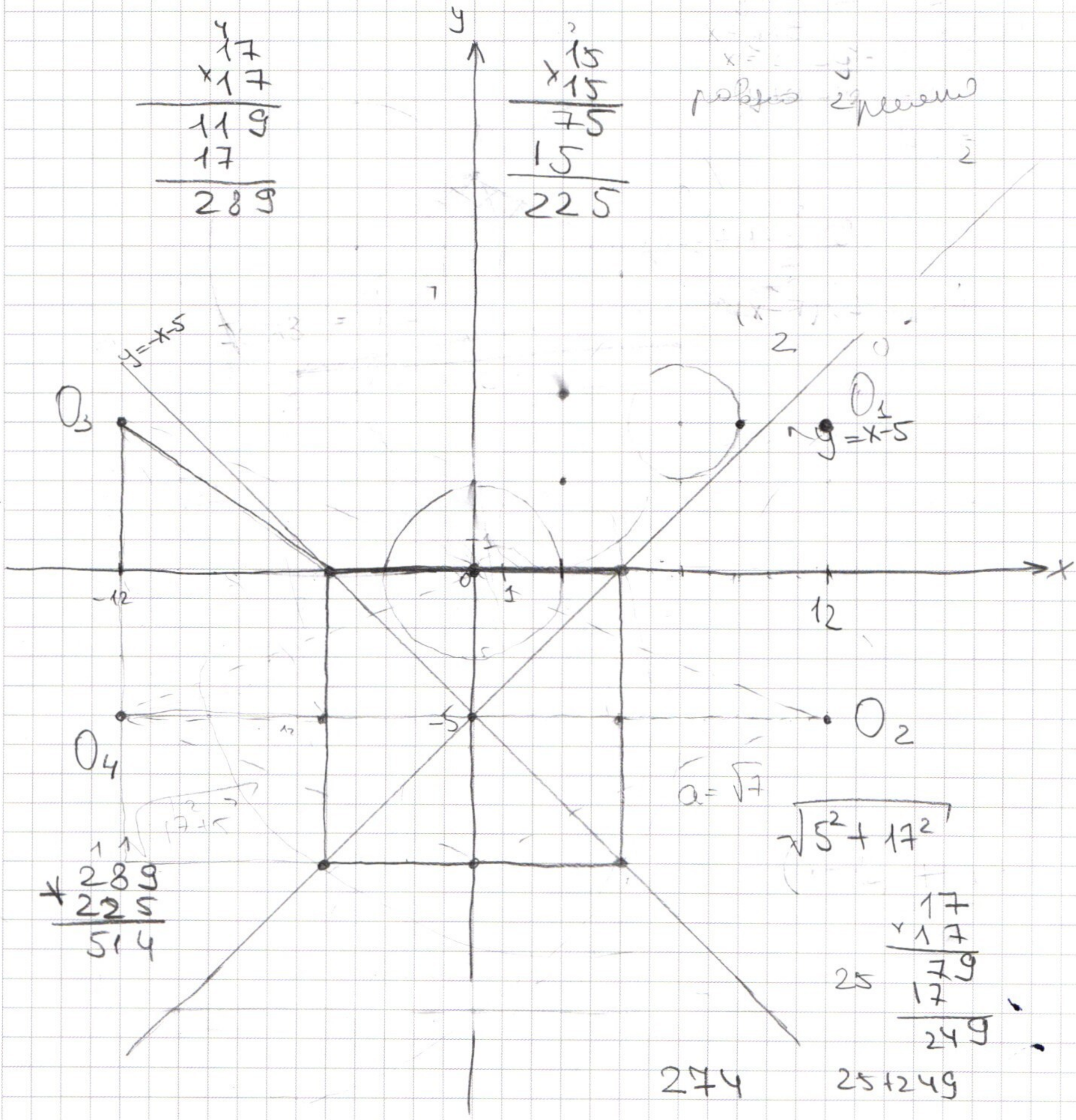
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y+5-x| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a = R^2 \end{cases}$$

2 решения

$a_1 = 49$

$17 \cdot 17$: 119, 17, 289

$15 \cdot 15$: 75, 15, 225



ровно 2 решения

$289 + 225 = 514$

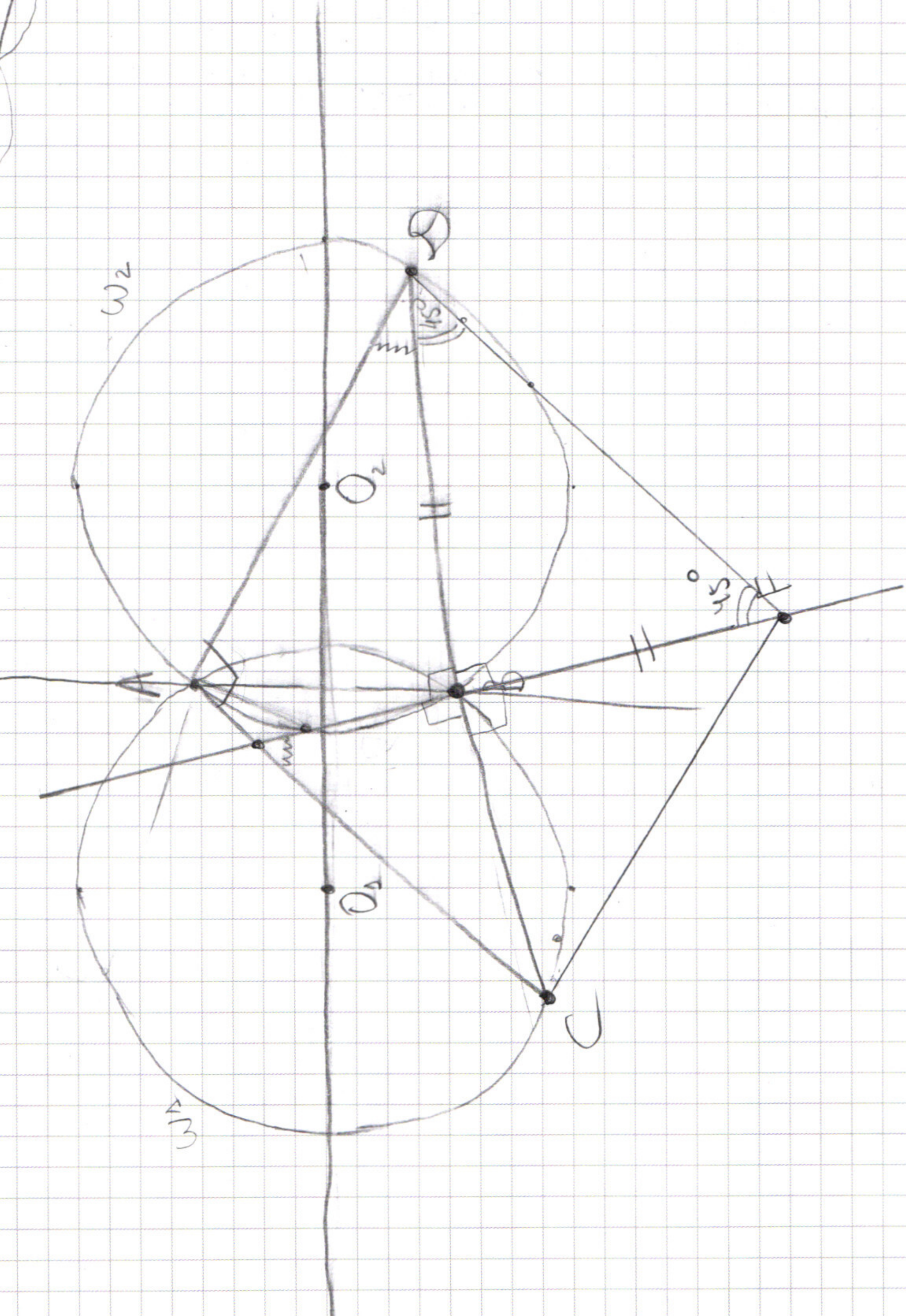
$\sqrt{5^2+17^2}$

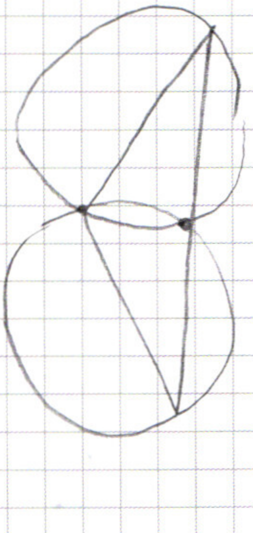
$17 \cdot 17$: 79, 17, 249

25

274

25+249





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)