

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

✎ [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✎ [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

✎ [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

✎ [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

✎ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✎ [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

Разложим 9261 на простые множители: $9261 = 7^3 \cdot 3^3$
Чтобы произведение восьми цифр равнялось $7^3 \cdot 3^3$, наши
цифры ~~должны~~ быть такими: 1) 7; 7; 7; 3; 3; 3; 1; 1 или
2) 7; 7; 7; 9; 3; 1; 1; 1

1) Таких чисел: $C_8^3 \cdot C_5^3$

2) Таких чисел: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = 2 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$

Итого: $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = 3 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{8!}{24} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 1680$

Отв: 1680

N 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2x + \sin 2x) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \quad (= \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)) \\ \sin 7x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \quad (= \sin(2x + \frac{\pi}{4})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pm(\frac{\pi}{2} - 2x) + 2\pi n \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Отв: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \end{cases}$

13

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y \ln y}{y^{\ln x}} \quad | \cdot y^{\ln x} (>0) \\ y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x} = y \ln y \\ (y-2x)(y+x-4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{3\ln y - 2\ln x} = y \ln y \\ y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

1) $y = 2x$:

$$\begin{aligned} x \ln \frac{8x^3}{x^2} &= (2x) \ln 2x \\ (2x) \ln 2x - x \ln 8x &= 0 \end{aligned}$$

$$x \ln 2x (2 \ln 2x - \ln 4) = 0 \quad | : x \ln 2x (>0)$$

$$2 \ln 2x = \ln 4$$

$$\ln 2x = \ln x^2$$

$$\begin{cases} x^2 = 2x \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ &\Rightarrow \\ y &= 4 \end{aligned}$$

2) $y = 4-x$:

$$x \ln \frac{(4-x)^3}{x^2} = (4-x) \ln(4-x)$$

Прологарифмируем обе стороны по основанию x :

$$\ln \frac{(4-x)^3}{x^2} = \ln(4-x) \log_x(4-x)$$

Возведем обе части на $\ln(4-x)$ ($\neq 0$, т.к. при $x=3$ равенство не выполняется)

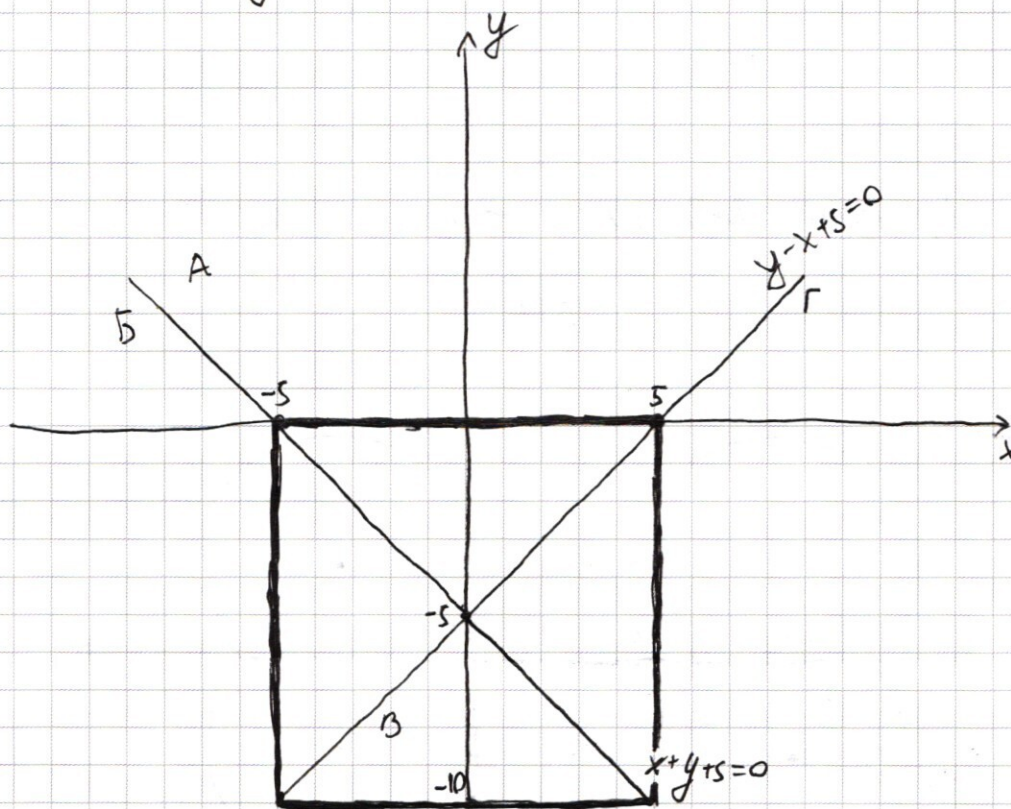
$$\log_{4-x} \frac{(4-x)^3}{x^2} = \log_x(4-x)$$

Продолжение см. на листе №7.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| = |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 25 \end{cases}$$

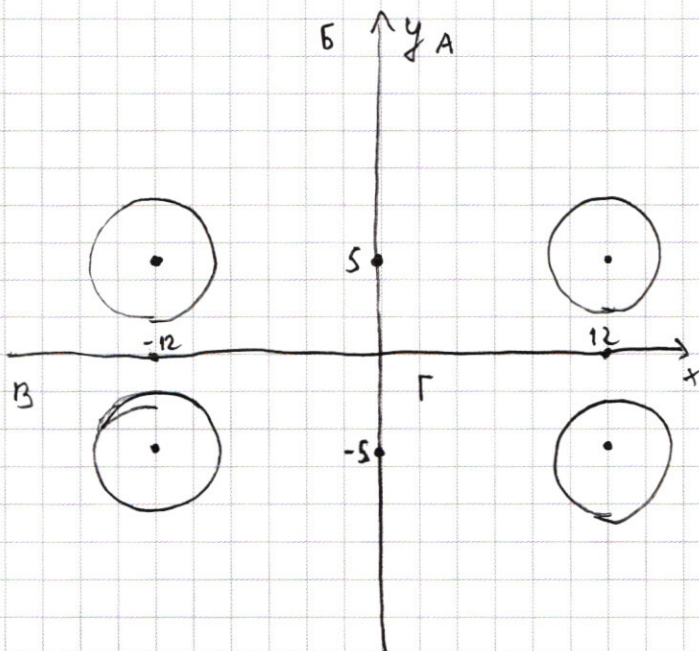


А: $x+y+5+y-x+5=10$
 $y=0$

Б: $-x-y-5+y-x+5=10$
 $x=-5$

В: $-x-y-5-y+x-5=10$
 $y=-10$

Г: $x+y+5-y+x-5=10$
 $x=5$



$$A: (x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

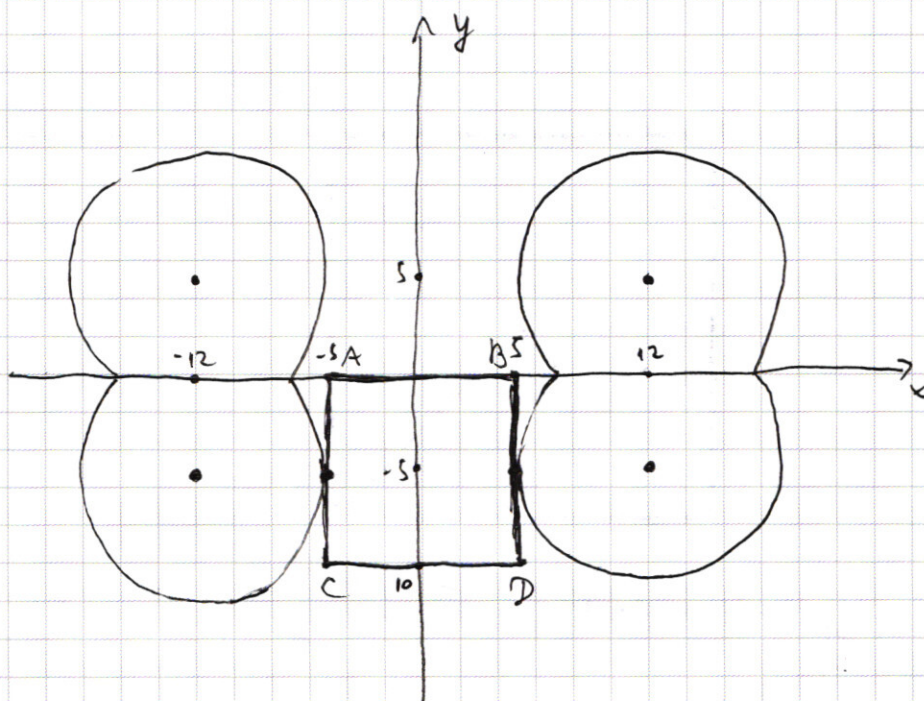
$$Б: (x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$B: (x+12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$Г: (x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

радиус каждой из
окр. = $\sqrt{a}$

Нарисуем все на одном чертеже:



При $0 \leq \sqrt{a} < 7$ окружности не пересекают квадрат, т.к. расстояние от ~~каждого~~ каждого из центров до квадрата $= 7$. При $\sqrt{a} = 7$ две нижние окр. касаются квадрата, т.е. у нас 2 решения. При $\sqrt{a} > 7$ две нижние окр. каждая пересекают AB и CD ^(или BD и AC), т.е. это 4 решения до момента, когда левая нижняя окр. пересечёт

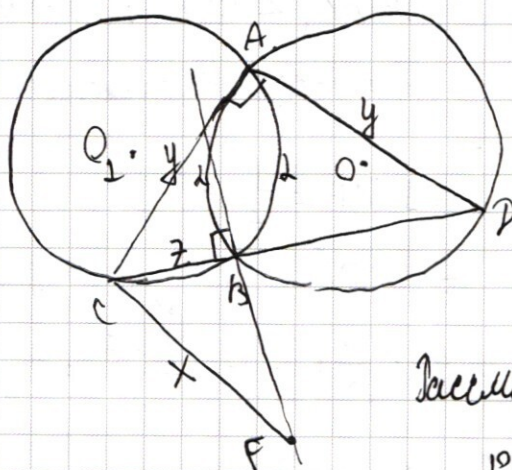
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

квадр. в $Вид$, а правая наклонная пересечёт квадрат.
в $АиС$. Стоит также учесть, когда точки пересечения
наклонных окр. с квадратом совпадают, из симметрии
относительно оси Oy одна из точек пересеч: $(0; 0)$,
тогда $\sqrt{a} = \sqrt{12^2 + 5^2} \approx 13$. Далее при увеличении
 $\sqrt{a}$ квадрат будет лежать внутри окружности,
т.е. решений не будет.

Итак, 2 решения при $\begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$

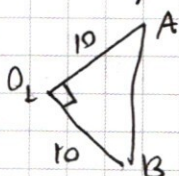
отв: $\begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$

№6 а



Из окр. одинакового радиуса,
то дуги AB обеих окр.
равны (пусть они равны α),
тогда $\angle C = \angle P = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ из $\triangle CAP$
 $\alpha = 90^\circ$, а $\angle C = \angle P = 45^\circ$

Рассмотрим $\triangle O_1AB$:



$\angle A O_1 B = \alpha = 90^\circ \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}$

Пусть $CF = x$; $CA = AP = y$; $CB = z$

из $\triangle CAP$ $2y^2 = (z + BP)^2 \Rightarrow BP = \sqrt{2}y - z = BF$

по т. косинусов из $\triangle CBA$: $AB^2 = 200 = z^2 + y^2 - 2zy \cdot \cos 45^\circ = z^2 + y^2 - \sqrt{2}zy$

из $\triangle CBF$: $x^2 = z^2 + (\sqrt{2}y - z)^2 = 2z^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}yz = 2AB^2$

$\Downarrow$
 $CF = x = \sqrt{2}AB = 20$

Отв: $CF = 20$

N 65

Используя обознач. из N64.

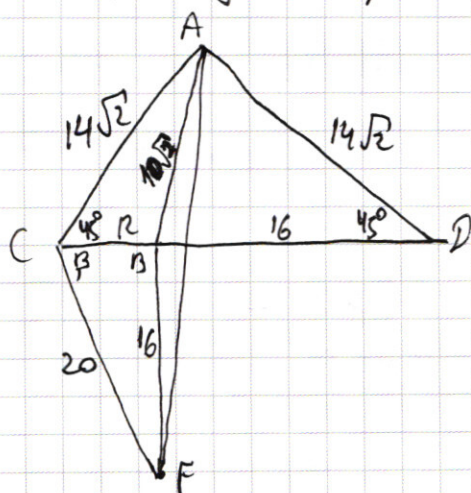
$z = 12 \Rightarrow 200 = (12)^2 + y^2 - 12\sqrt{2}y$

$y^2 - 12\sqrt{2}y - 56 = 0$

$y = \frac{12\sqrt{2} \pm 16\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 14\sqrt{2}$, т.к. $y > 0$

$BP = BF = \sqrt{2}y - z = 28 - 12 = 16$

Перенесем вертёх!



Пусть $\angle BCF = \beta$, тогда

~~sin β = 4/5, cos β = 3/5~~
 $\begin{cases} \sin \beta = \frac{4}{5} \\ \cos \beta = \frac{3}{5} \end{cases}$

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \beta) =$
 $= 140\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \beta \right) =$
 $= 140 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{140 \cdot 7}{5} = 196$

Отв: $S_{\triangle ACF} = 196$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(3 - 2 \log_{4-x} x) \log_{4-x} x - 1}{\log_{4-x} x} = 0 \quad \boxed{\text{N3 предположение}}$$

$$2 \log_{4-x}^2 x - 3 \log_{4-x} x + 1 = 0 \quad (\Rightarrow x \neq 1)$$

$$(\log_{4-x} x - 1)(2 \log_{4-x} x - 1) = 0$$

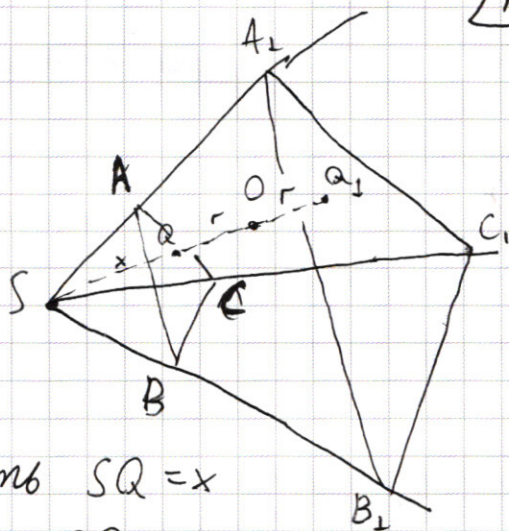
$$\begin{cases} \log_{4-x} x = 1 & (= \log_{4-x} 4-x) \\ \log_{4-x} x = \frac{1}{2} & (= \log_{4-x} \sqrt{4-x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4-x \\ x^2 = 4-x & (\Rightarrow x \neq 3) \\ 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — не подходит, т.к. } 0 < x < 4 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \Rightarrow y = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{отв: } \begin{cases} x = y = 2 \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

N 4



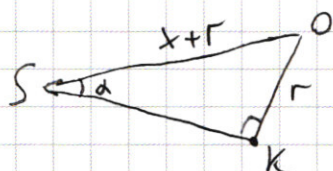
Пусть $SQ = x$
 $OQ = OQ_1 = r$

Пусть сечение, касающееся
 сферы и перпендик. SO -
 это ABC и $A_1B_1C_1$, а точки
 касания с сферой - Q и Q_1
 $SABC \sim SA_1B_1C_1$ с коэф $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

$$\frac{SQ}{SQ_1} = \frac{x}{x+2r} = \frac{1}{4}$$

$$3x = 2r \Rightarrow x = \frac{2r}{3}$$

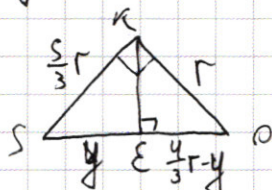
Рассм. плоскость SOQ :



$$\angle = \arcsin \frac{r}{x+r} = \arcsin \frac{3}{5}$$

Очевидно, что $(KLM) \perp SO$, т.к. $KL \perp SO$, $LM \perp SO$ и $KM \perp SO$.

Пусть E - точка пересечения (KLM) и SO . Рассм. (SKO) :



т.к. $((KLM) \perp SO)$, то $KE \perp SO$
 $\{ E \in (KLM) \}$

Пусть $SE = y$, тогда $EO = SO - SE = \frac{4}{3}r - y$

По 2-м и 3-м т. пер. в $\triangle SKE$ и $\triangle EKO$: $\frac{25}{9}r^2 - y^2 = r^2 - \frac{16}{9}r^2 - y^2 + \frac{8}{3}ry$

$$\frac{32}{9}r^2 = \frac{8}{3}ry \Rightarrow y = \frac{4}{3}r$$

Пусть сеч. трёхгран. угла плоскостью KLM есть

$\triangle K_1L_1M_1$, тогда $SABC \sim SK_1L_1M_1$ с коэф $\frac{\frac{2}{3}r}{\frac{4}{3}r} = \frac{1}{2}$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{K_1L_1M_1}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{K_1L_1M_1} = 4S_{ABC} = 4$$

Отв: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$; $S_{сеч.} = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

abcd

$$\begin{array}{r} a \cdot b \cdot c \cdot d = 9261 \mid 9 \\ 1029 \mid 3 \\ 48 \mid 7 \\ 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \mid 27 \\ 81 \mid 343 \\ 116 \mid 3 \\ 108 \mid 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 40 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 42 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad 49 \mid 7 \\ \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad 7 \mid 1 \end{array}$$

$$7^3 \cdot 3^3$$

$$1) \quad 777 \ 333 \ 11$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3$$

$$2) \quad 777 \ 93 \ 111$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\begin{aligned} -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + \\ + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \end{aligned}$$

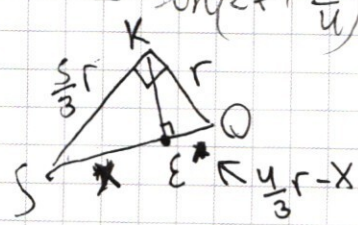
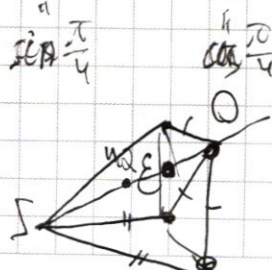
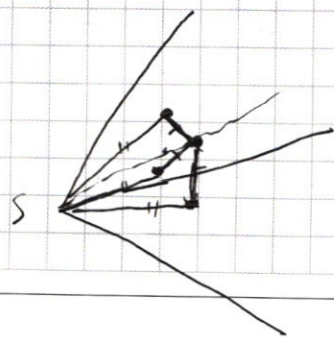
$$\begin{aligned} 3 \cdot C_8^3 - C_5^3 &= 3 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \\ &= \frac{8!}{24} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\begin{aligned} (\cos 2x - \sin 2x)(2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \\ - \sqrt{2} \sin 2x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \cos 4x &= \cos^2 2x - \sin^2 2x = \\ &= \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x = \sin 2x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ \sin 7x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$



$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$-2x(x-4) -$$

$$-2(x-2)^2 + 8 + (y-2)^2 - 4 = xy$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

1) ~~16x^6~~

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$x^{\ln \frac{1}{16x^6}} =$$

$$\ln \left(\frac{-x + 12x^2 - 48x + 64}{x^2} \right) =$$

$$2 \ln(-x+12) - \frac{48x+64}{x^2}$$

$$7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} \cdot y^{7\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot x^{3\ln y} = y^{\ln y}$$

$$x^{3\ln y - 2\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{\ln \frac{y^3}{x^2}} = y^{\ln y}$$

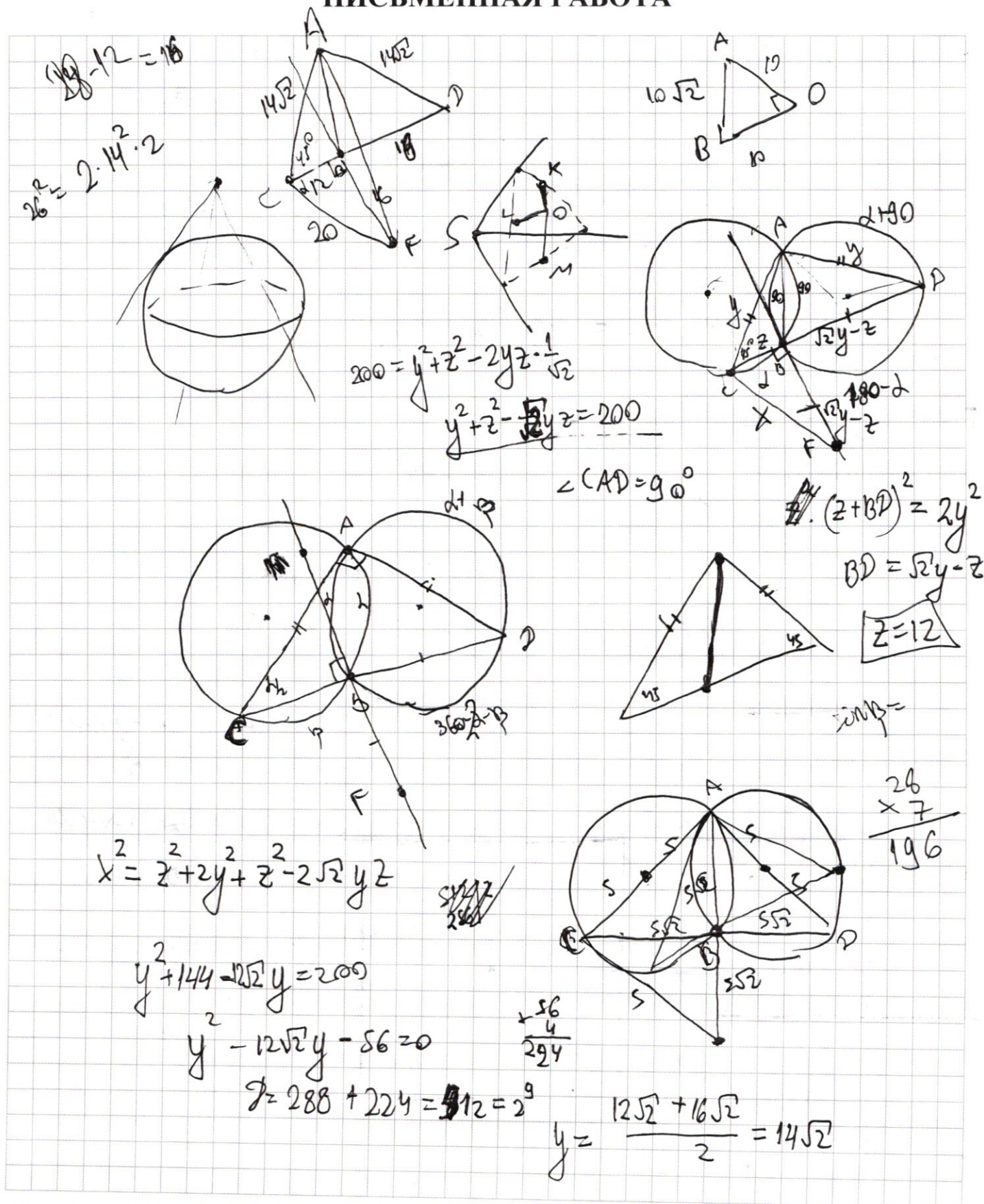
$$1) x^{\ln \frac{8x^3}{x^2}} = (2x)^{\ln 2x}$$

$$\frac{2x}{x^2} x^{\ln 8x} = (2x)^{\ln 2x}$$

$$(2x)^{\ln 2x} - x^{\ln 8x} = 0$$

$$x^{\ln 2x} (2^{\ln 2x} - x^{\ln 4}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x^{\ln \frac{y^3}{x^2}} = y^{\ln y}$$

$$x^{\ln \frac{y^3}{x^2}} = x^{\log_x (\ln y)}$$

$$\ln \frac{y^3}{x^2} = \log_x \ln y$$

$$\frac{\log_x \frac{y^3}{x^2}}{\log_x e} = \log_x \ln y$$

$$y^{3 \ln x} \cdot x^{-2 \ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2 \ln x} =$$

$$(4^5)^{-\ln 2} = 4^{\ln \frac{9}{2}}$$

$$4^{-\ln 32} = 4^{-\ln 32}$$

$$A: (x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$B: (x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$F: (x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$B: (x+12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$\log_x \frac{y^3}{x^2} = \log_x (\ln y) \cdot \log_x e$$

$$\log_x y^3 - 2$$

$$y = 4 - x$$

$$x + y + s = 0 \quad y - x + s = 0$$

$$y = -x - s$$

$$y = x - s$$

$$A: x + y + s + y - x + s = 10$$

$$y = 0$$

$$B: -x - y - s + y - x + s = 10$$

$$x = -5$$

$$B: -x - y - s - y + x - s = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

$$F: x + y + s - y + x - s = 10$$

$$x = 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 4 - x$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{-7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} \cdot y^{7\ln x} = y^{\ln y}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x} = y^{\ln y} = 0$$

$$x^{\ln x}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y^{\ln y} \left(x^{-2\ln x} \cdot y^{\ln \frac{x^3}{y-1}} \right) = 0$$

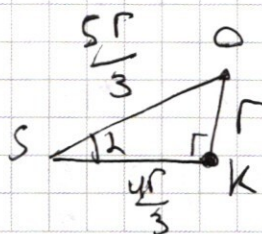
$$x^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x^3}{y}}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

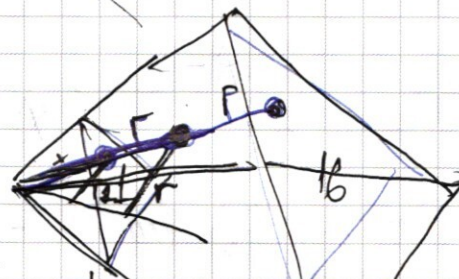
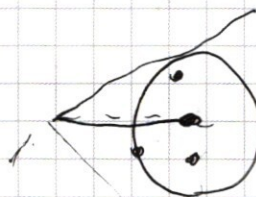
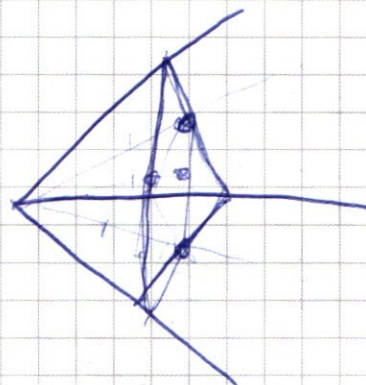
$$-y > -76 - 2^{33}x + 2x$$

$$0 > 2 + 3 \cdot 2^{34} - 2^{33}x + 2x - 76$$

$$x^{2\ln(4-x)} = x^{2\ln(4-x)}$$



$$\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$$



$$\frac{x}{x+2r} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 2r$$

$$3x = 2r \Rightarrow x = \frac{2r}{3}$$

$$x \ln \frac{(4-x)^3}{x^2} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x \approx 1,5 = \frac{3}{2}$$

$$y \approx \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\left(\frac{9}{4} \cdot \frac{625}{16}\right)^{\ln \frac{3}{2}}$$

$$\ln \frac{5}{2} \cdot \frac{2^7}{3^3}$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\ln}$$

$$4-x = \cancel{x}^{\frac{1}{\ln(4-x)}} \times \log_{4-x} \frac{(4-x)^3}{x^2}$$

$$4-x = x^{3-2 \log_{4-x} x}$$

$$x=2$$

$$2^{\ln 2} = 2^{\ln 2}$$

$$2^{-6 \ln 2} = 2^{\ln \frac{1}{2^6}}$$

$$\left((4-x)^{\ln(4-x)}\right)' = -1 \cdot \ln(4-x) \cdot (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$x^{\ln}$$

$$\log_x x^{\ln \frac{(4-x)^3}{x^2}} = \log_x \left((4-x)^{\ln(4-x)}\right)$$

$$\log_{4-x} \frac{(4-x)^3}{x^2} = \log_x (4-x)$$

$$\frac{\log_{4-x} \frac{(4-x)^3}{x^2} \log_{4-x} x - 1}{\log_x 4-x} = 0$$

$$\ln \frac{(4-x)^3}{x^2} = \log_x (4-x)$$

$$\ln \frac{(4-x)^3}{x^2} = \ln(4-x) \log_x (4-x)$$

$$\log_{4-x} x = \log_{4-x} \sqrt{4-x}$$

$$(3-2 \log_{4-x} x) \log_{4-x} x - 1 = 0$$

$$2l^2 - 3l + 1 = 0 \quad (l=1)(2l-1)=0 \quad \begin{cases} l=1 \\ l=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{aligned} x^2 &= 4-x \\ x^2+x-4 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$