

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1 Разложим 9261 на простые множители

$$9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Какие цифры могут быть там?

7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1

↓

Како чисел = $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$

||

$$\frac{8!}{72} = \frac{7!}{9}$$

7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1

↓

Како чисел равно

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

||

$$\frac{8!}{36}$$

Не пересекаются, т.е. тут есть дублирование, а тут нет

Всего: $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{93} + \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{36 \cdot 93} =$

$$= 560 + 560 \cdot 2 = 3 \cdot 560 = 1680$$

Ответ: 1680

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} (\cos(9x-5x)) + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \sqrt{2} \cos 9x \cos 5x - \cos 5x + \sin 9x - \sqrt{2} \sin 9x \sin 5x + \sin 5x = 0 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 9x - 2 \cos 9x \cos 5x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 9x - 2 \sin 9x \sin 5x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$$

$$\cos^2 9x - 2 \cos 9x \cos 5x + \cos^2 5x + \sin^2 9x - 2 \sin 9x \sin 5x + \sin^2 5x + \sqrt{2} (\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x) - \cos^2 9x - \sin^2 9x - \cos^2 5x - \sin^2 5x = 0$$

$$(\cos 9x - \cos 5x)^2 + (\sin 9x - \sin 5x)^2 + \sqrt{2} (\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x) - 2 = 0$$

$$2(\sin^2 9x + \cos^2 9x) + 2(\sin^2 5x + \cos^2 5x) + \sqrt{2} (\sin 9x - \sin 5x) + \sqrt{2} (\cos 9x - \cos 5x) - 2 = 0$$

$$2\sin^2 9x + \sqrt{2} \sin 9x (\sin 9x + \cos 9x) - 1 = 0$$

$$\sin^2 9x - \cos^2 9x + \sqrt{2} \sin 9x (\sin 9x + \cos 9x) = 0$$

$$(\sin 9x + \cos 9x)(\sin 9x - \cos 9x + \sqrt{2} \sin 9x) = 0$$

$$\sin 9x + \cos 9x = 0$$

$$\sin 9x - \cos 9x + \sqrt{2} \sin 9x = 0$$

$$\sin 9x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos 9x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 9x = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos 9x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \sin(9x + \varphi) = -\sqrt{2} \sin 9x$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \varphi = -9x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \varphi = \pi - (-9x) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -3,5x + 20\pi n - \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3,5x + \pi t - \frac{\pi}{2}, t \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3}{4}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(2x + \varphi) = -\sin 9x$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{5}\pi n - \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{5}\pi n + \frac{\pi}{36}, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{5}\pi t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0$
 $y > 0$

$$x^3 (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= e^{2\ln x} \\ y^4 &= e^{4\ln y} \\ y &= e^{\ln y} \end{aligned}$$

$$x^2 y^4 = e^{2\ln x + 4\ln y}$$

$$e^{(2\ln x + 4\ln y) - \ln x} = e^{\ln y \cdot \ln \frac{y}{x^2}}$$

$$e^{-2\ln^2 x - 4\ln x \ln y} = e^{\ln y (\ln y + \ln \frac{1}{x^2})}$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln y = \ln^2 y - 2\ln y \ln x$$

$$\ln y^2 - 3\ln y \ln x + 2\ln^2 x = 0 \quad (\ln y - \ln x)(\ln y - 2\ln x) = 0$$

$$\ln y = \ln x \quad \ln y = 2\ln x \quad \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Подставляем во второе уравн.}$$

1) $y = x$

$$x^3 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$x^3 - 2x = 0 \quad (x-2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ в ответ.}$$

2) $y = x^2$

$$\begin{aligned} x^3 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 &= 0 & x^3 - 6x^2 - x^3 + 8x &= 0 \\ x^3/v^3 - x^2/v^3 - 6x + 8 &= 0 & \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 6x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

Угадываем корень $x=2$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$\begin{matrix} x=2 \\ y=4 \end{matrix} \quad \text{— } \boxed{\text{в ответе}}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \text{ т.к. } x > 0$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \quad y = x^2 = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} =$$

$$= \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{matrix}} \quad \text{в ответе.}$$

Ответ: $x=2; y=2$

$$x=2; y=4$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}; y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓5 $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

1) $x+y+5 \geq 0$ $x-y+5 + y-x+5 = 10$
 $y-x+5 \geq 0$ $y = 0$

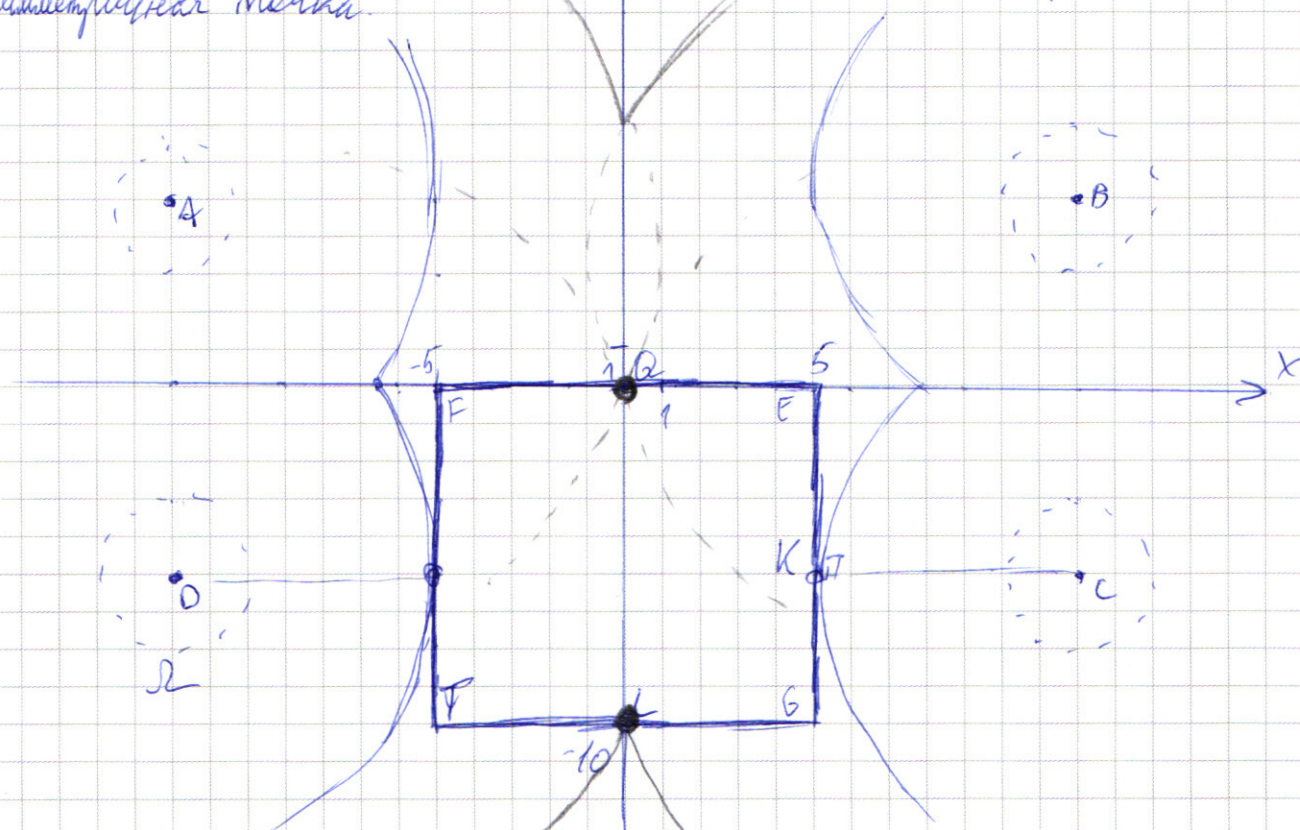
2) $x+y+5 \geq 0$ $x+y+5 - y-x+5 = 10$
 $y-x+5 < 0$ $x = 5$

3) $x+y+5 < 0$ $-x-y-5 + y-x+5 = 10$
 $y-x+5 \geq 0$ $x = -5$

4) $x+y+5 < 0$ $-x-y-5 - y+x-5 = 10$
 $y-x+5 < 0$ $y = -10$

График: График $\rightarrow$ четырехугольник
 * График же $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$
 4 окружности с центрами в
 $(12; 5)$ $(-12; 5)$ $(-12; -5)$ $(12; -5)$ и $r = \sqrt{a}$
 Каждая из окружностей ограничена:
 $(12; 5)$: $x \geq 0$ $y \geq 0$
 $(12; -5)$ $x \geq 0$; $y < 0$ и т.д.
 Нарисуем же график.

Из соображений симметрии графика относительно оси y если слева есть точка пересечения, то и справа будет симметричная точка.



Из за симметрии (TG) и (FE) отн. (DC) - если на FA есть точка пересечения (R) , то и на TL есть симметричная «
слева точек $\rightarrow$ всю точку (L) - не подходит.

2 варианта. 1) точка пересечения на FT - касание т.к. $BE \perp CK$, то вершины окруж. не пересекают! EF отн. FL

2) или же 2 точки пересечения - (R) и (L)

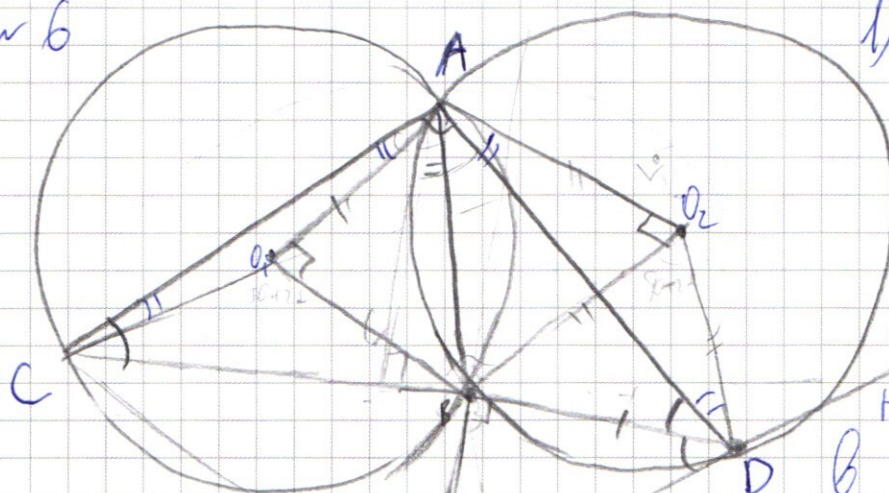
1) $R = 12 - 5 = 7 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 49$

2) $R = CL = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 169$

Ответ: $a = 49; 169$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



1) Так как $R_1 = R_2$,
то дуги AB
равны $\Rightarrow$
 $\angle ADB = \angle ACB$
как опирающиеся
на равные дуги
в равных окружн.

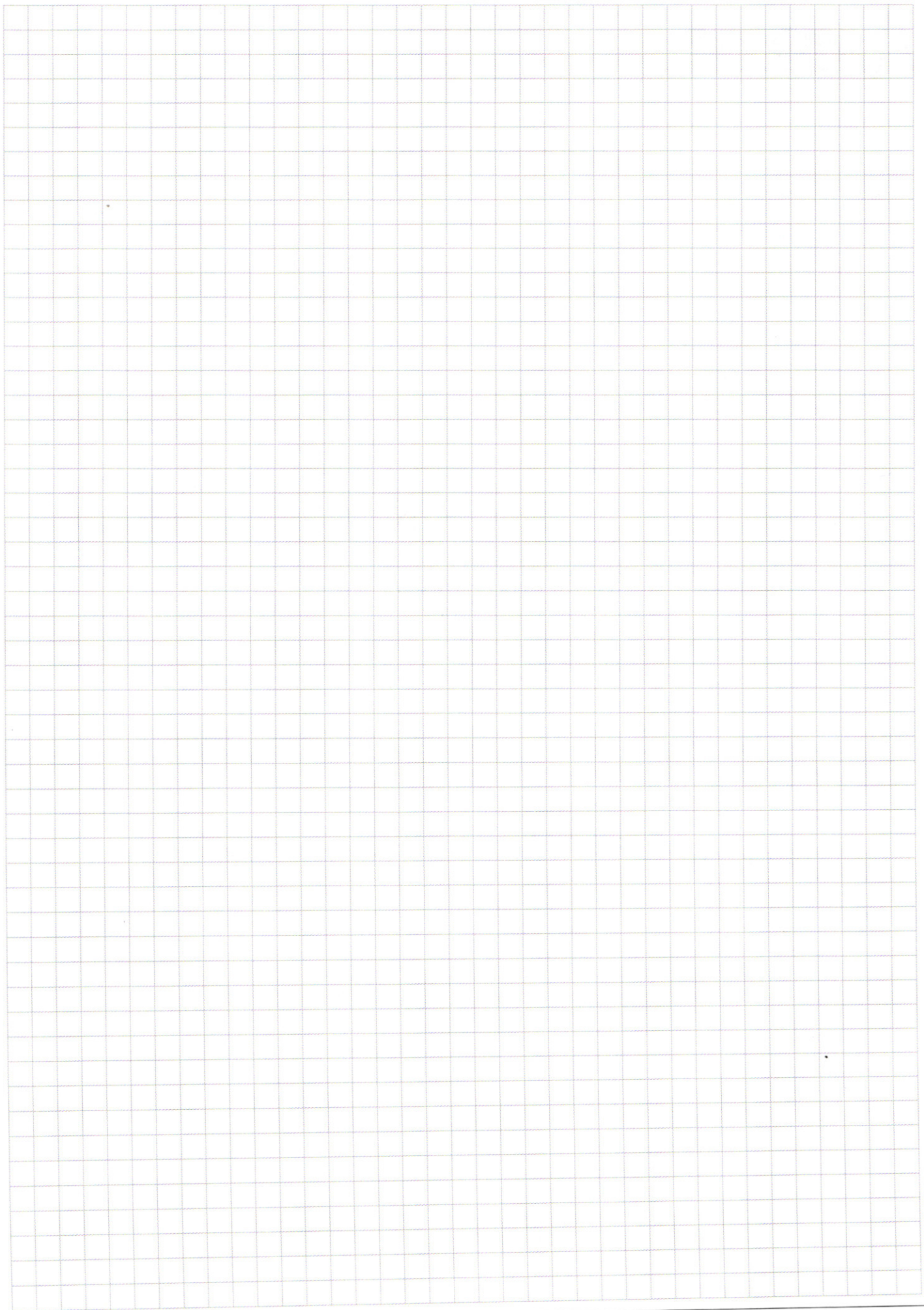
По $\triangle ADC$ $\angle A = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$

$\angle AO_2B = \angle AO_1B = 90^\circ (2 \cdot \angle ADB)$ т.к. опирается
на дугу AB и O -центр.

$O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = R \Rightarrow AO_1BO_2$ - квадрат
 $\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$

$\angle O_2AO_1 = 90^\circ$
 $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow \angle CAO_1 = \angle DAO_2$ т.к.

$\angle O_1AB = \angle O_2AB$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



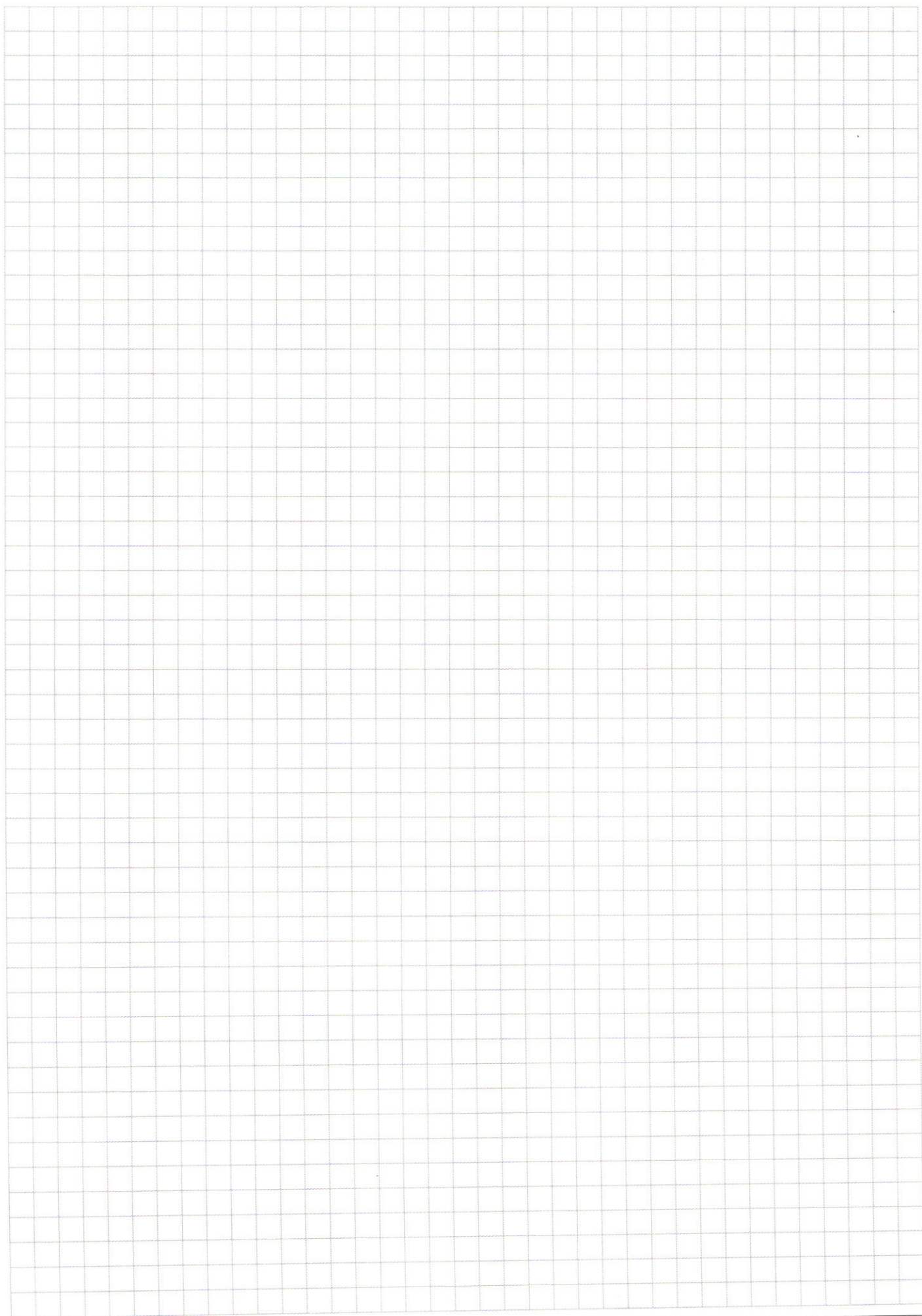
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = e^a \quad \frac{1}{x^b} = e^b$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 - 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 = 2x^2 - 8x + 4$$

$$(y-2)^2 - 4 = 2(x-2)^2 - 4$$

$$x^2 = e^{2\ln x}$$

$$y^4 = e^{4\ln y}$$

$$x^2 y^4 = e^{2\ln x + 4\ln y}$$

$$e^{-2\ln x - 4\ln y \ln x} = e^{\ln y \ln \frac{y}{x^2}}$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln y \ln x = \ln y (\ln y + \ln \frac{1}{x^2})$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln y \ln x = \ln y^2 - 2\ln x \ln y$$

$$\ln y^2 - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - 2\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\begin{cases} \ln y = 2\ln x & [y = x^2] \\ \ln y = \ln x & [y = x] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - 6x^2 - x^3 + 8x = 0 \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

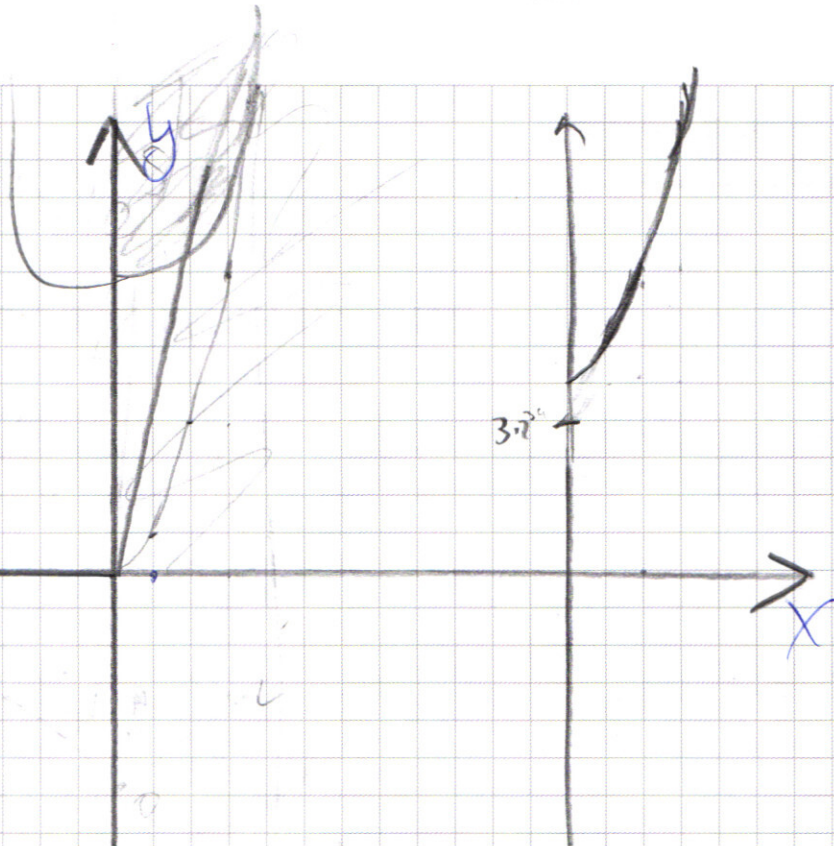
②

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \mid x-2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 3x^2 - 6x \\ \underline{3x^2 - 6x} \\ 8 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-4) =$$

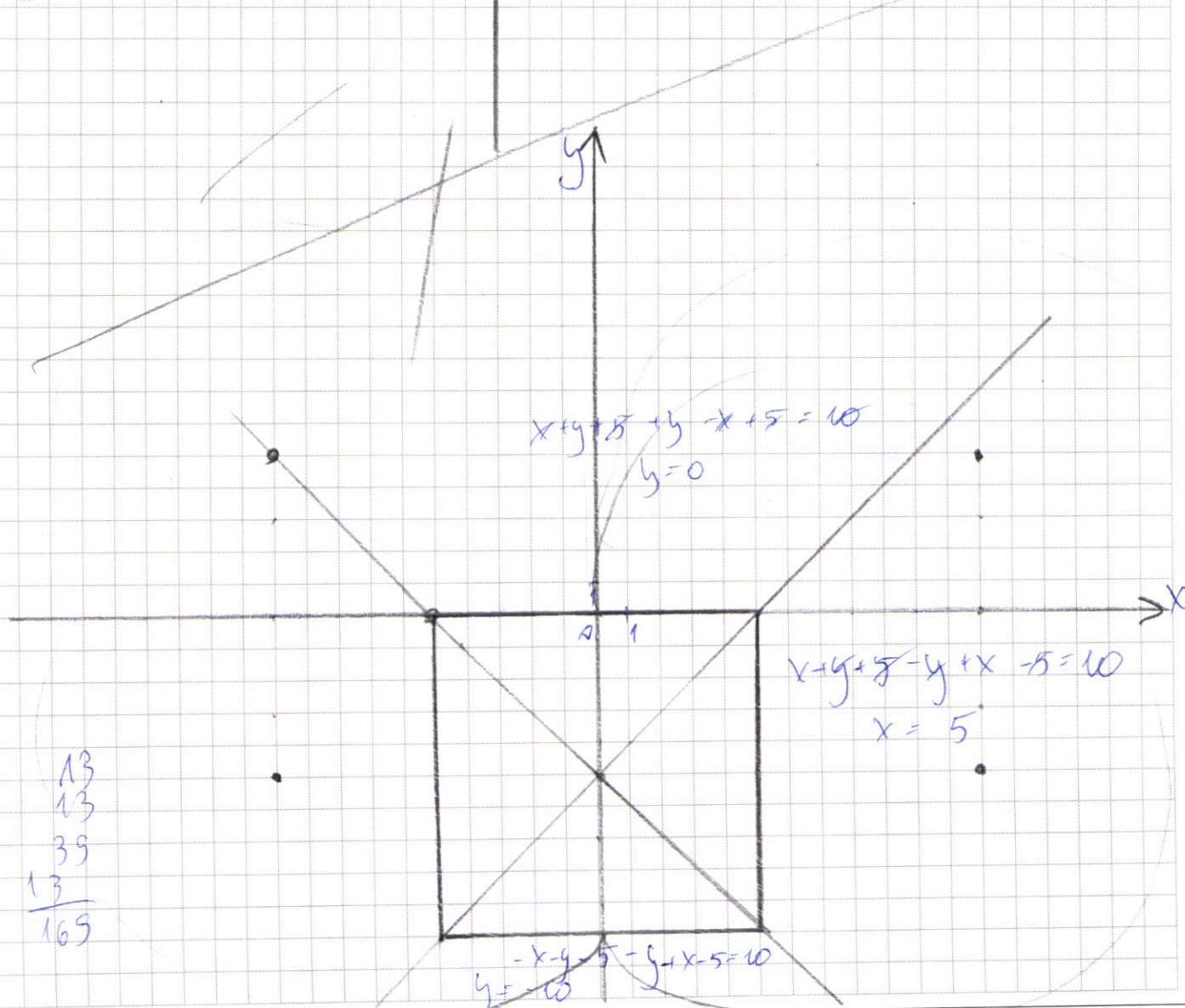
$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 26 + (2^{33} - 2)x$$



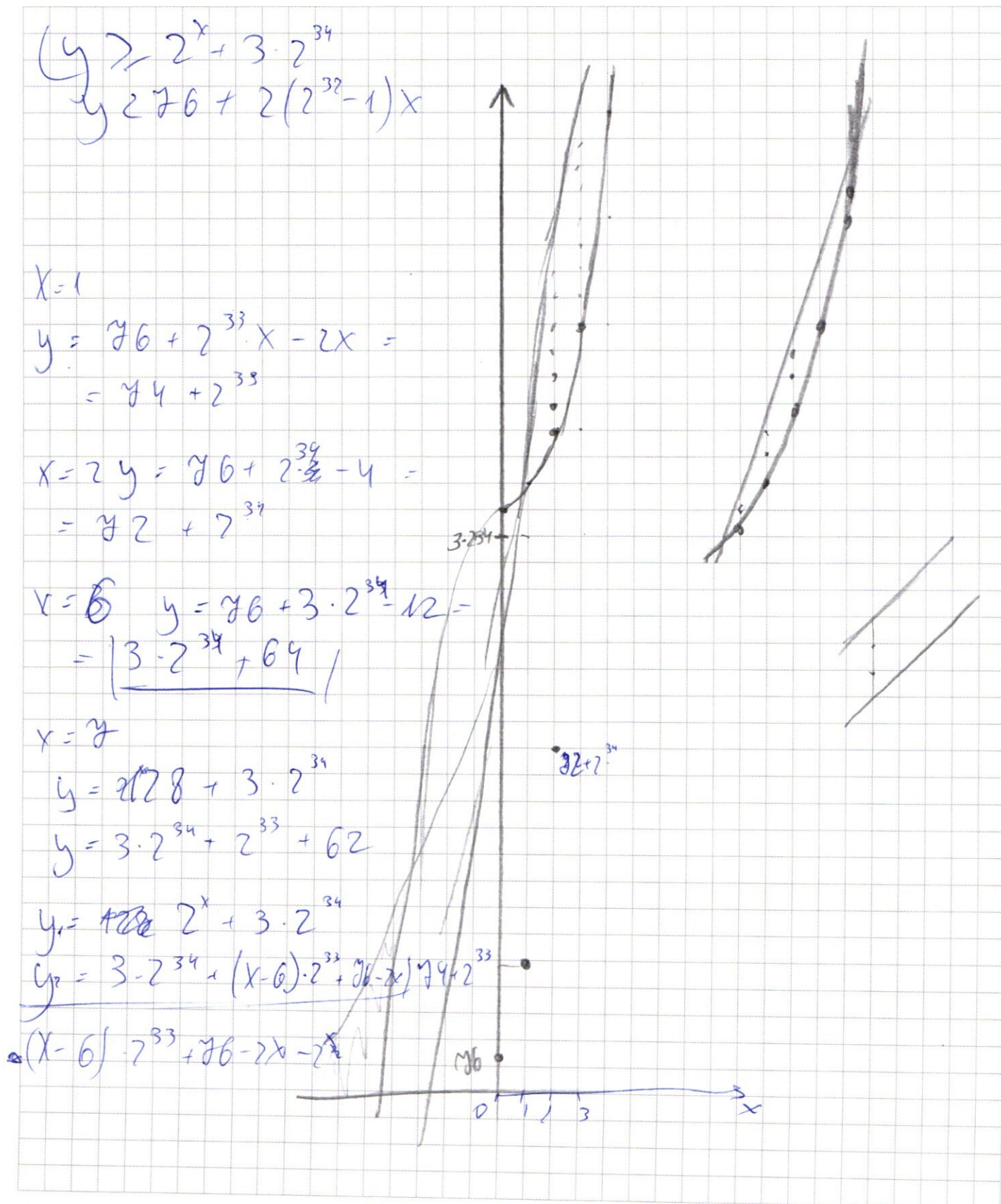
$$x + y = 10$$

$$y = 0$$



$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ 39 \\ \hline 13 \\ 165 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



16.5 =



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

7.80 = 560

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$\begin{array}{r} 9261 \text{ (3)} \\ 9 \\ \hline 026 \\ 24 \\ \hline 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3084 \text{ (3)} \\ 1029 \text{ (3)} \\ 5 \\ \hline 11 \\ 09 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \text{ (7)} \\ 28 \\ \hline 03 \end{array} \quad \begin{array}{r} 49 \text{ (7)} \\ 49 \end{array}$$

$$\sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$$

$$\rightarrow \sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{b-a}{2} - \sin\frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$$

$$= 2 \sin\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b$$

$$9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 3 & 11 > \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 3 & 1 & 1 & 1 > \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{72} = \frac{7!}{9}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{36} =$$

~2

$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \cdot \cos\frac{b-a}{2} + \sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{b-a}{2}$$

$$= -2 \sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{a-b}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$\sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) = \cos 2x (\cos 2x - \sqrt{2} \sin 7x)$$

$$2 \cos^2 2x = 1 \quad \cos 5x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} (\cos(9x-5x)) + \sin 5x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} (\cos 9x \cos 5x + \sin 9x \sin 5x) + \sin 5x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \sqrt{2} \cos 9x \cos 5x - \cos 5x + \sin 9x - \sqrt{2} \sin 9x \sin 5x + \sin 5x = 0$$

$$(\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x - \sin 5x) + \sqrt{2} (\cos 9x - \cos 5x) + \sqrt{2} (\sin 9x - \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 9x - 2 \cos 5x + 2 \sin 9x - 2 \sin 5x + \sqrt{2} (2 \cos 9x - 2 \cos 5x) + \sqrt{2} (2 \sin 9x - 2 \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 9x - 2 \cos 5x + 2 \sin 9x - 2 \sin 5x + \sqrt{2} (2 \cos 9x - 2 \cos 5x) + \sqrt{2} (2 \sin 9x - 2 \sin 5x) = 0$$

$$2 \sin^2 2x + \sqrt{2} \sin 2x \cdot \sin 7x + \sqrt{2} \sin 7x \cdot \cos 2x = 1$$

$$\sin^2 2x - \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin 7x (\sin 2x + \cos 2x) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x)(\sin 2x - \cos 2x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

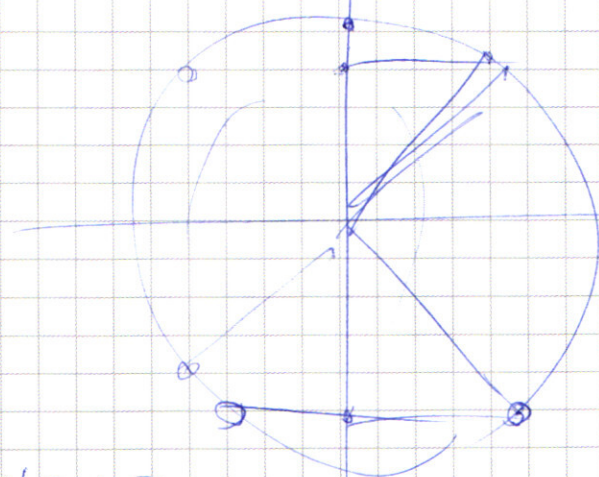
$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 2x = 0 \\ \sin 2x - \cos 2x + \sqrt{2} \sin 7x = 0 \end{cases}$$

$$\sin 2x - \cos 2x + \sqrt{2} \sin 7x = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 2x = \dots \\ \sqrt{2} \sin(7x + \varphi) = \sqrt{2} \dots \end{cases}$$

$$(x-1)^3 = (x^2 - 2x + 1)(x-1) =$$

$$= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$



$$\pi - 7x$$

$$-\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4}$$

$$\begin{array}{r} 26 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 38} \end{array}$$

$$4.19$$

$$-\frac{\pi}{4 \cdot 5} - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{20} (1 + 4) =$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$