

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

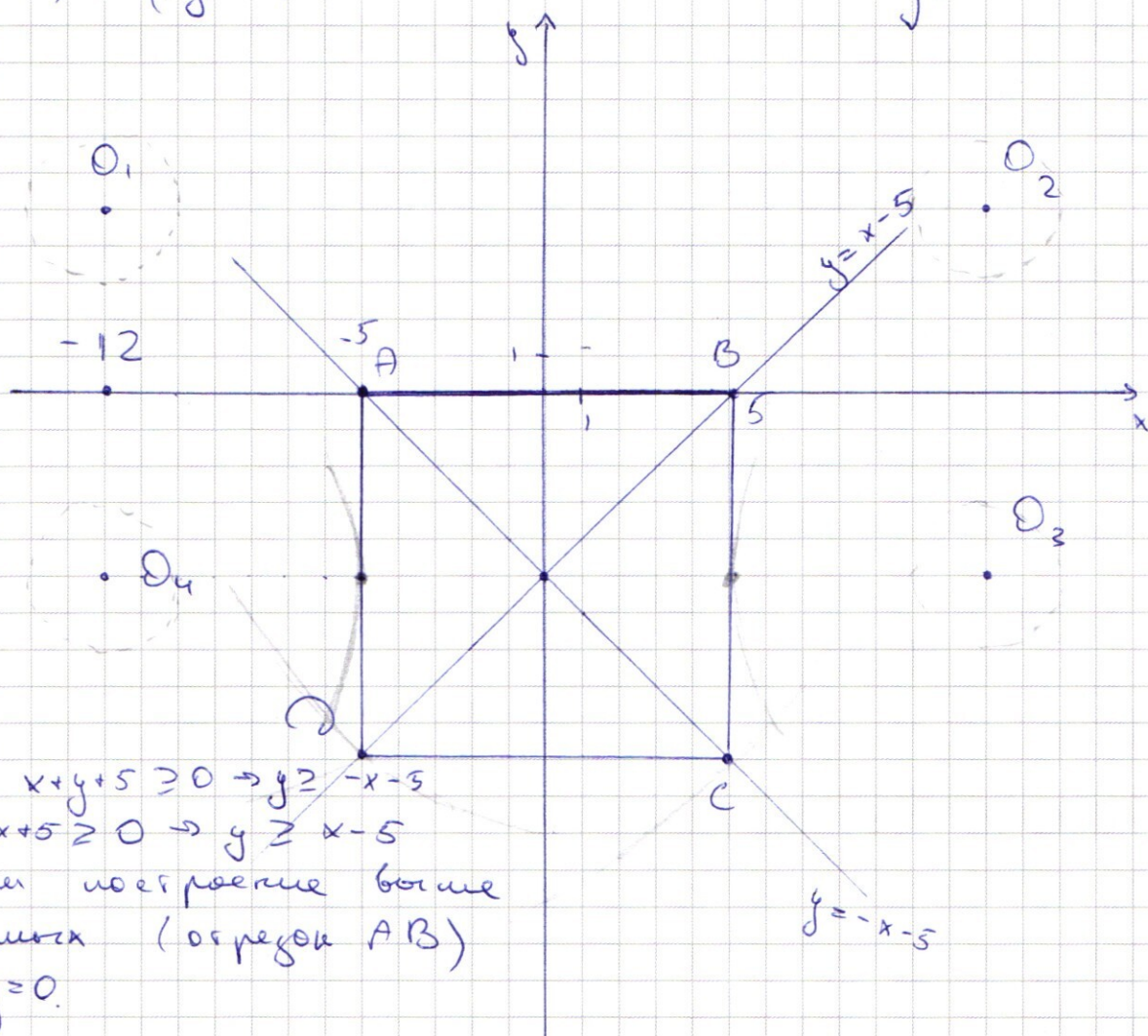
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

Построим
прямые

$$\begin{aligned} y &= -x-5 \\ y &= x-5 \end{aligned}$$



при $x+y+5 \geq 0 \rightarrow y \geq -x-5$
и $y-x+5 \geq 0 \rightarrow y \geq x-5$
ведем построение выше
прямых (отрезок AB)
 $y=0$.

при $y < x-5$ и $y \geq -x-5$ ведем построение
выше первой, но выше второй

$x=5$ (отрезок BC)

Аналогично строится

CD и DA.

$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ - окружность с центром
изображение которой зависит относительно
Ox и Oy

O_1, O_2, O_3 и O_4 - центры окружностей
с $r = \sqrt{a}$

По графику видно, что получается два
решения, когда окружности с центрами

O_3, O_4 касаются BC и DA соответственно

$$\sqrt{a} = |-12 - (-5)| = 7 \rightarrow a = 49 \quad (OA = \sqrt{49} \rightarrow r = 7)$$

тогда окр. с ц. O_1 и O_2 не касаются квадрата)

По графику видно, что возможно два
решения, когда окружности с ц. O_1
и O_2 проходят через точки C и D
соответственно.

$$O_1(-12; 5), C(5; -10)$$

$$O_1C = \sqrt{(17)^2 + (15)^2} = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514}$$

$$a = O_1C^2 = 514$$

$$O_4B = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314} \Rightarrow \text{окружности с центрами}$$

O_3 и O_4 не пересекают квадрат.

Ответ: 49; 514

~1

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

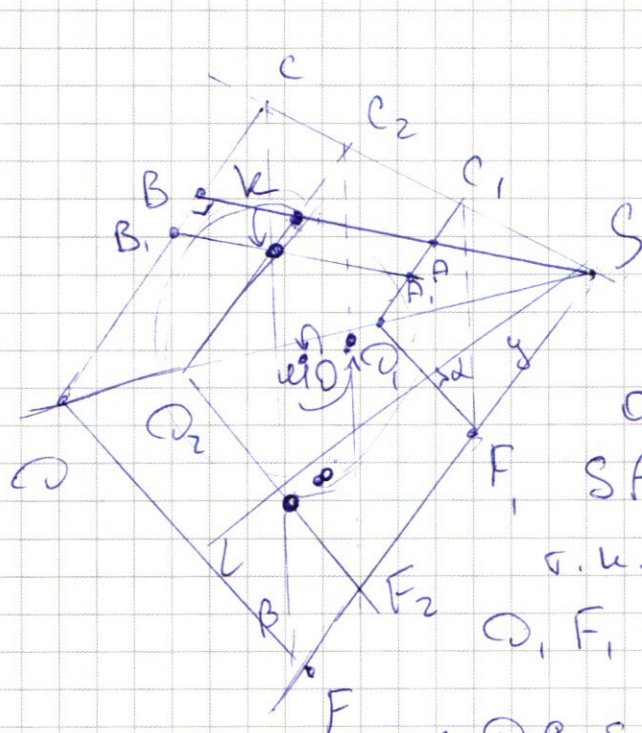
$$3(3 \text{ шт.}) \cdot 7(3 \text{ шт.}) \cdot 1(2 \text{ шт.}):$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8^4}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 560.$$

$$3(1 \text{ шт.}) \cdot 7(3 \text{ шт.}) \cdot 1(3 \text{ шт.}):$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120 \quad \text{Ответ: } 1680$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~ 4

SB — высота в $\triangle SCD$.

т.к. $\angle \perp SO$ и

$B \perp SO$ то $\angle \parallel B$.

из (1) о высоте

ок. $B, k = A, k = r$.

$SA = x$.

т.к. $\angle \parallel B$: $O, C, \parallel CD$.

$O, F, \parallel OF$ и $F, C, \parallel FC$,

$\triangle OCS \sim \triangle O, C, S$ $k = \frac{SA}{SB} =$

$$= \frac{SA}{SA + B, A} = \frac{r}{x + 2r} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{2}{3}r$$

т.к. $KO \perp SK$, то в $\triangle SKO$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{KO}{KS} = \frac{r}{x + r} = \frac{r}{\frac{5}{3}r} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \varphi = \arctg \frac{3}{5}$$

Проведем через точку K, L, M

$C_2 O_2 \parallel CD$, $O_2 F_2 \parallel OF$ и $F_2 C_2 \parallel FC$, тогда

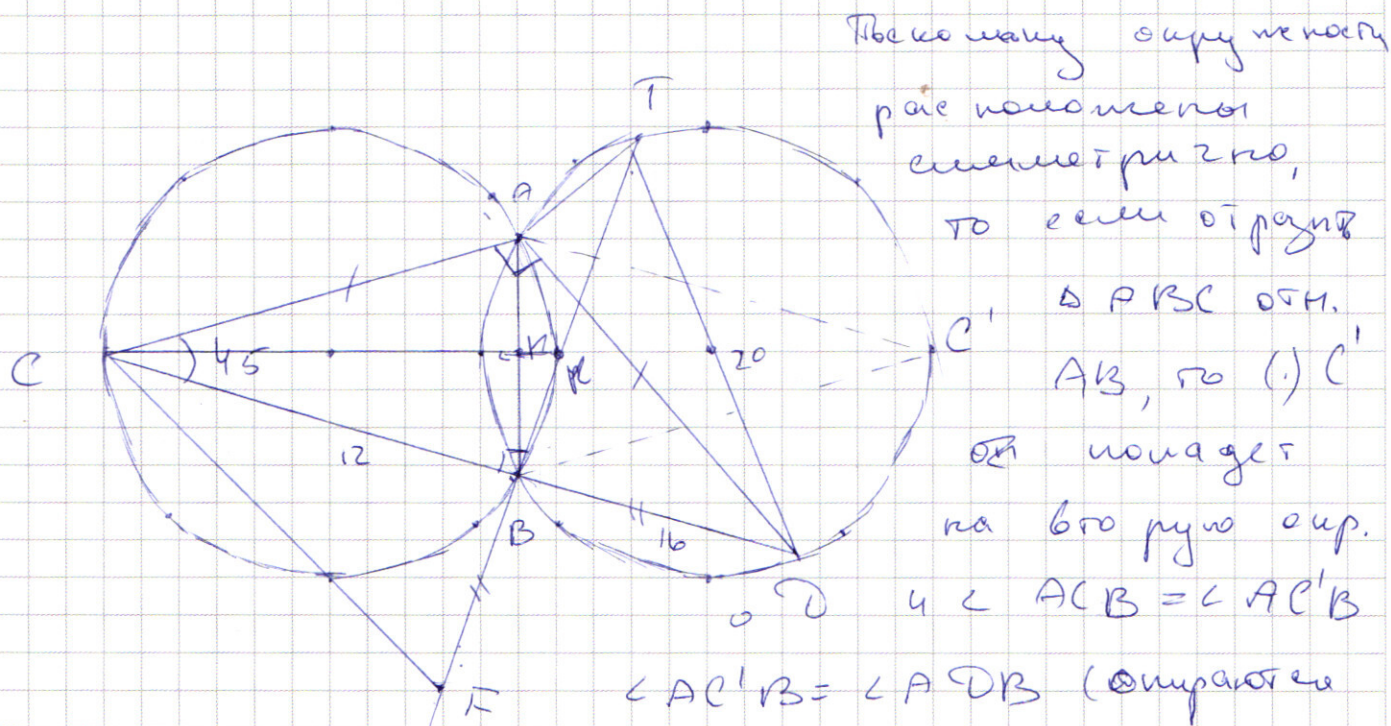
$$\triangle SC_2 O_2 \sim \triangle S O, C, \quad k_1 = \frac{x}{x + r} = \frac{3}{5} \quad S_{\triangle SC_2 O_2 F_2} = S_{\triangle SC, O, F} \cdot k_1^2$$

$$\triangle S O_2 F_2 \sim \triangle S O, F, \quad k_2 = k_1 = \frac{3}{5}$$

$$\triangle S F_2 C_2 \sim \triangle S F, C, \quad k_3 = k_1$$

Ответ: $\frac{3}{5}$; $\frac{25}{9}$

16



Поскольку окружности
равны и симметричны,
то если отразить
 $\triangle ABC$ отн.
AB, то (.) C'
опадет
на вторую окр.
и $\angle ACB = \angle AC'B$

$\angle AC'B = \angle ADB$ (отражение

на одну хорду) $\angle ADB = \angle ACB \Rightarrow$

$\triangle ADC$ - равнобедренный. Проведем FB

до пересечения со второй окр. 2-й раз (.) T

$\angle ATB = 45^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$ и $\angle CBT = 90^\circ \Rightarrow$

(.) A $\in$ CT и CB = BT

т.к. $\angle TBC = 90^\circ = \angle CBF$, $BF = BC$ и

$CB = BT$, то $\triangle CBF = \triangle BTD$, $\Rightarrow CF = TD$

т.к. $\angle TBC = 90^\circ$, то $TD = d = 2 \cdot 10 = 20$.

б) Проведем высоту KB $\triangle ABC$ из (.) C

разсмотрим $\triangle ANB$ и $\triangle AK'$

$\angle BAK$ т.к. По теореме о высоте

проведенной к хорде из центра окружности.

$BK = KA \Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 (продолжение)

~~ЕВК~~ $\Rightarrow CA = CB = BT = AD \Rightarrow$
 $\triangle CBT = \triangle CAD$ по 2-м сторонам и углу равным катетам.

В $\triangle BTD$: $BT = CB = 12$, $TD = 2r = 20$.

$$BD = \sqrt{TD^2 - BT^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

$$\sin \angle BTD = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF, \quad \angle PCF = 45^\circ$$

$$= \angle ACD + \angle BCF = 45^\circ + \arcsin \frac{4}{5}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \sin \left(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5} \right) =$$

$$= 120 \sin \left(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5} \right)$$

Отвеч: $TD = 20$; $S_{\triangle} = 120 \sin \left(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5} \right)$

№ 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x \quad | : 2^{32}$$

$$\frac{2^x}{2^{32}} + 3 \cdot 2^2 = \frac{76}{2^{32}} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{32}} \right) x$$

$$\frac{76}{2^{32}} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{32}} \right) x > \frac{76}{2^{32}} + 2x$$

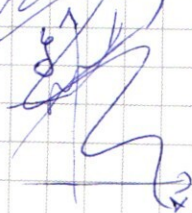
найдем значение (x, y) для

$x > 0$ (т.к. при $x < 0$ решений

будет столько же)

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} \geq 0$$

функция ~~прямая~~
пересекается
на $x > 0$



$\frac{76}{2^{32}} + 2x > \frac{2^x}{2^{32}} + 3 \cdot 2^2$ неравенство принимает
выполняется в целых числах при $x = 6$.

при $x = 32$

$$\frac{2^x}{2^{32}} = 1$$

на $x > 32$

$$\frac{76}{2^{32}} \approx 0$$

$x = 35$!

$$70 \approx ? \quad 8 + 12 = 20$$

$$70 > 20$$

$$6 \leq x \leq 38.$$

$x = 36$!

$$72 > 16 + 12$$

$x = 37$!

$$74 > 32 + 12$$

$x = 38$

$$76 = 64 + 12 = 76$$

$x = 39$

$$78 < 128 + 12$$

при $x = 6$.

$$\frac{76}{2^{32}} + 12 \approx \frac{2^6}{2^{32}} + 3 \cdot 2^2 < 1$$

$x = 7$

$$2 + \left(\frac{76}{2^{32}} - \frac{2^7}{2^{32}} \right) < 0 + 12 \quad (0 \text{ реш.})$$

$x = 8$

$$4 + \left(\frac{76}{2^{32}} - \frac{2^8}{2^{32}} \right) < 0 + 12 \quad (3 \text{ реш.})$$

$x = 32$

$$64 + 12 + \frac{76}{2^{32}} - 1 < 12 + 12 \quad (54 \text{ реш.})$$

$x = 31$

$$62 + \frac{76}{2^{32}} - 2^{-1}$$

$x = 33$

$$66 + \frac{76}{2^{32}} - 2 < 12 + 12 \quad (62 \text{ реш.})$$

$x = 34$

$$68 + \frac{76}{2^{32}} - 4 < 12 + 12 \quad (64 \text{ реш.})$$

$x = 35$

$$70 - 8 < 12 + 12 \quad (62 \text{ реш.})$$

реш. на границах
с $x =$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x = 36$$

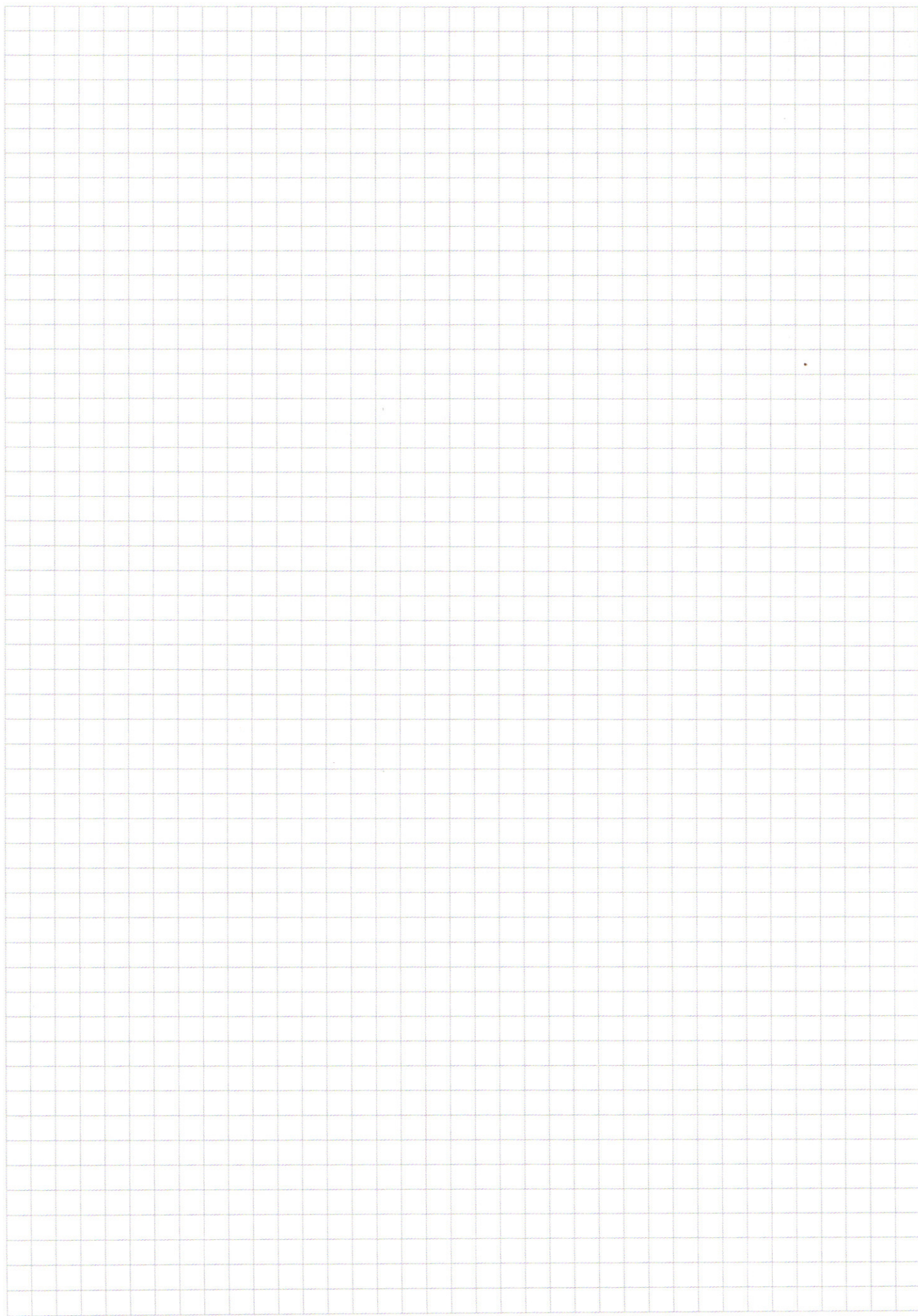
$$x = 37$$

$$x = 38$$

$$x = 39$$

~ 7 (продел.)

$$\begin{array}{r} 72 - 16 = 56 \text{ реш.} \\ - 12 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 74 - 32 = 42 \text{ реш.} \\ - 12 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 74 - 64 = 10 \text{ реш.} \\ - 12 \\ \hline \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$x + \cancel{y} + 5 - \cancel{y} + x - 5 = 10$$

$$2$$

$$x = 5$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ x \ 17 \\ x \ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 514 \overline{) 2} \\ 257 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ + 25 \\ \hline 314 \end{array}$$

$$\sqrt{2^2 + 15^2}$$

$$x + 12$$

$$(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ x \ 17 \\ x \ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 225 \\ 514 \end{array}$$

$$5^2 + 7^2$$

$$\begin{array}{r} 628 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \overline{) 2} \\ 38 \overline{) 2} \\ 19 \overline{) 19} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ + 25 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$2^x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$36$$

$$\frac{2^{x-32}}{2^{32}} + 3 \cdot 2^2 = \frac{76}{2^{32}} + 2 \left(1 - \frac{1}{2^{32}} \right) x$$

$$\sin^a \sin b = 4 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}$$

$$6$$

$$2^6 \cdot 12$$

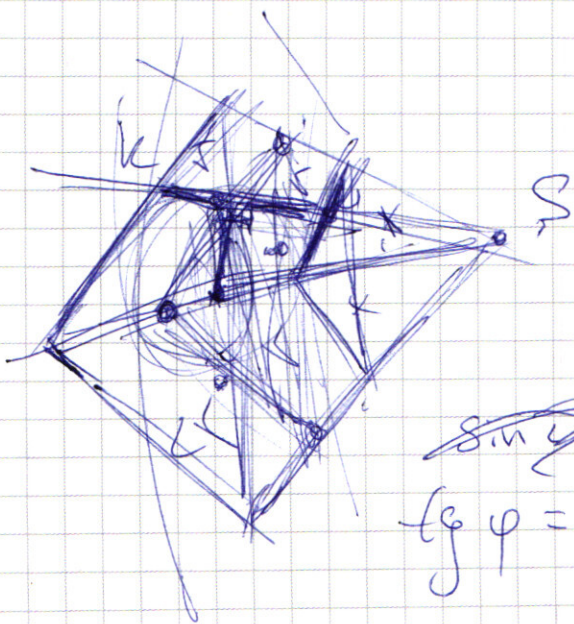
$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x) + \sin 5x (\cos 4x - 1) - \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$(\cos 4x - 1)(\cos 5x + \sin 5x) + \sin 4x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$\cos 5x (\sin 4x - 1) - \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 4x - 1)(\cos 5x + \sin 5x) - 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos 4x$$



$$k = \sqrt{\frac{S}{S_1}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{x}{x+2r} \rightarrow 4x = x + 2r$$

$$r = \frac{3}{2}x$$

$$x = \frac{2}{3}r$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{r+x}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7 \cdot 49 = 3^3 \cdot 7^3$$

$\$ \quad 3 \times 3 \quad 7 \times 3 \quad 1 \times 2 :$

$$1 \cdot \dots \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4} = 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

112.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 224$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 48 \\ \times 35 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 35 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 40 \\ \hline 1520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 35 \\ \hline 210 \\ \times 16 \\ \hline 35 \\ \times 7 \\ \hline 560 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 16 \cdot 35$$

$$20 \cdot 28 \cdot \frac{40}{28} \cdot \frac{4}{4}$$

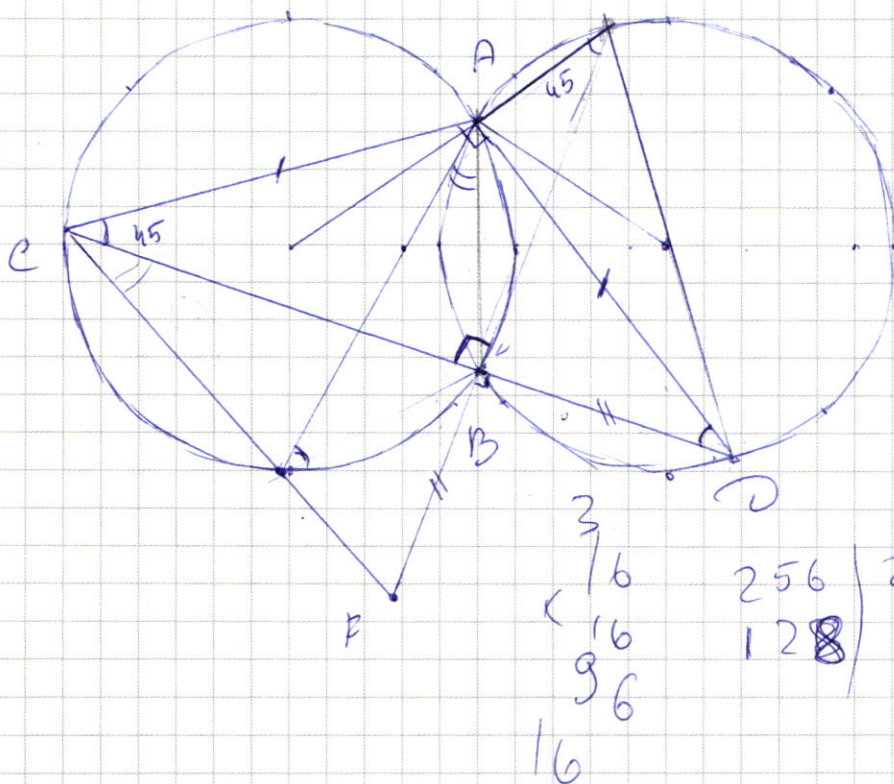
$$9 \times 1, 3 \times 1, 7 \times 3, 1 \times 3 \quad 7 \cdot 46$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 40 \cdot 28 = 1520$$

$$\sin 9x + \cos 9x - (\sin 5x + \cos 5x) \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 5x - (\cos 5x + \sin 9x)$$

~~$$\sin a \sin b$$~~



3
6
16
96
16

256 | 2
128

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0.$$

$$(y-2)^2 - (2x-2)^2 + 4 = xy.$$

$$(y-2)^2 - (2x-2)^2 = xy.$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln(y/x^2)$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = (y/x^2) \ln y.$$

$$x^{-2 \ln x} - 4 \ln x = \frac{y \ln y}{x^2 \ln y}$$

$$x^{-2 \ln x} - 4$$

$$x^{-2 \ln x} = (x^{\ln x})$$

$$\frac{1}{x^{\ln x}}$$

$$\frac{1}{x^{\ln x}}$$

$$2 \log_3 2 = 2 \frac{\log_2 2}{\log_2 3}$$

$$\frac{1}{\log_2 3}$$

$$\frac{\log_2 e}{e}$$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 e}$$

$$\frac{1}{\log_2 3} = x$$

$$2 = x^{\log_2 3}$$

$$\log_3 2 = \log_2 x \cdot \log_2 x$$

$$y-2 = \sqrt{y}$$

$$y - \sqrt{y} - 2 = 0$$

$$\sqrt{y} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} \quad \sqrt{y} = 2$$

$$y = 4$$

$$x = 1$$

$$\log_2 3 \log_2 x - 2 = 0.$$

$$x^{2 \ln y - 2 \ln x} = y \ln y + 4 \ln x.$$

$$64$$

$$12$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a.$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$+ x \geq -(y+5)$$

$$\begin{cases} x \geq -(y+5) \\ x \leq y \end{cases}$$

$$2y+10 \geq 0$$

$$y \geq -5$$

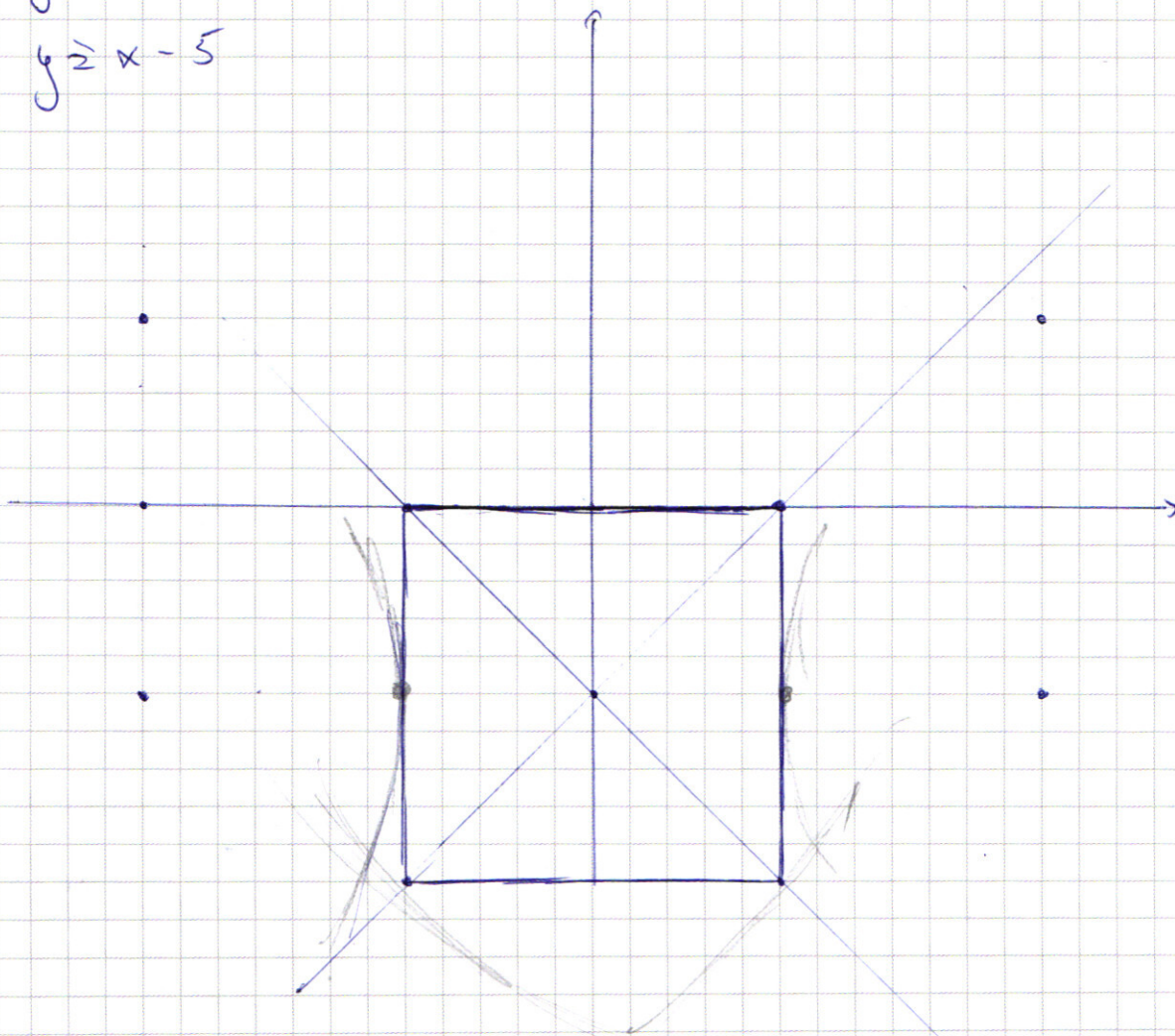
$$x \geq 0$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -(y+5) \\ x > (y+5) \end{cases}$$

$$y \geq -x-5$$

$$y \geq x-5$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\sin 4x \sin 5x$$

$$\cos 5x \cos 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x +$$

$$\cos 9x - (\cos 9x \cos 4x + \sin 9x \sin 4x) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$+ \sin 9x + \sin 9x \cos 4x - \sin 4x \cos 9x = 0$$

$$\cos 9x (1 - \cos 4x) + \sin 9x (\sin 4x + 1)$$

$$\sin 4x (\sin 9x + \cos 9x) - \cos 4x$$

$$x^2 y^4 = \frac{-\ln y x^2}{\ln x} = y^{-\log_x y} = y^{-\log_x y + 7}$$

$$x^2 = y^{-\log_x y + 3}$$

$$x^2 = y^{-\log_x y + 3}$$

36.

16

$$\frac{76}{2^{32}} + 2x$$

$$x \approx 32$$

3

3

6

$$\sqrt{x}$$

10

74

37.

$$2 \quad 3 \cdot 2^{34} + 2^x \cdot 2^{33} \cdot x + (76 - x)$$

$$32 \quad \underline{74}$$

$$128 + 10$$

$$36 \quad 72$$

$$64 + 12$$

$$\cancel{37} \mid 70$$

$$32 + 12$$

$$5$$

$$2^{26} \geq 64 \geq 2^6$$

~~77~~