МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

V 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

✓5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

✓7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Представим число 9261 в виде произведения простых множителей: $9261 = 7^3 \cdot 3^3$.

$7 \cdot 7 = 49$ не однозначное
$7 \cdot 3 = 21$ не однозначное
$3 \cdot 3 = 9$ однозначное $\Rightarrow$ может содержаться в восьмизначном числе.

Разобьём задачу на два случая:

1. В восьмизначном числе нет девятки; число содержит три семёрки, три тройки и две единицы; кол-во таких чисел: $N = C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{\cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot \cancel{8}}{\cancel{24} \cdot \cancel{8}} \cdot 10 = 560$ шт.
2. В восьмизначном числе есть девятка; число содержит три семёрки, одну девятку, одну тройку и три единицы; кол-во таких чисел: $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$ шт.

В числе не может быть две девятки, т.к. $3^3 < 9 \cdot 9 = 3^4$, также в числе не может быть и других цифр, отличных от 1, 3, 7, 9.

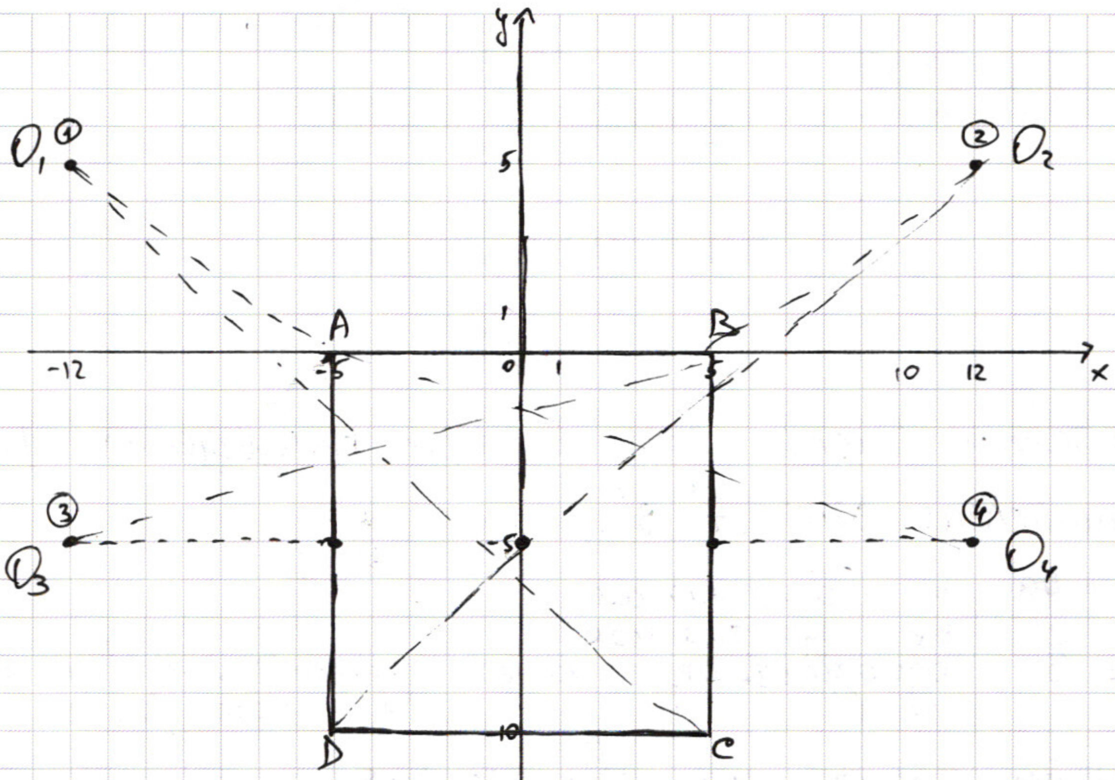
Ответ: 1680

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) – ур-е квадрата со стороной 10 и центром $(0;-5)$

(2) – ур-е 4^x окр-тей с центрами $(12;5)$; $(12;-5)$; $(-12;5)$; $(-12;-5)$ и радиусами $\sqrt{a}$ каждая, $a > 0$



1) 2 решения, если окр-ти ③ и ④ касаются сторон AD и BC соотв.

$\underline{a} = 7^2 = \underline{49}$

окр-ти ① и ② не имеют общих точек с квадратом, т.к. $74 = O_1A^2 > a = 49$ и $74 = O_2B^2 > a = 49$, т.е. квадрат лежит вне кругов ① и ②.

2) 2 решения, если окр-ти ① и ② проходят через точки C и D соотв. $a = 17^2 + 15^2 = 289 + 225 = 514$

окр-ти ③ и ④ не имеют общих точек с квадратом, т.к. ~~$O_3A = O_3D = O_4$~~ $O_3B^2 = O_3C^2 = O_4A^2 = O_4D^2 = 314 < a = 514$, т.е квадрат лежит внутри кругов ③ и ④.

3) При $a \neq 49$ и $a \neq 514$ система имеет 4 и более решений ввиду симметричности отн. оси Oy.

Ответ: при $a = 49$ и $a = 514$ система имеет ровно 2 решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Перепишем систему в виде двойного нер-ва:

$2^x + 3\cdot 2^{34} \le y < 76 + 2^{33}\cdot x - 2x$

Решая при усл. $x \in Z$, ур-е $2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 - 2x + \frac{x}{2}\cdot 2^{34}$ имеет ед. решение $x = 38$.

При $x \ge 39$ и $x \in Z$ $76 - 2x + \frac{x}{2}\cdot 2^{34} < 2^x + 3\cdot 2^{34}$, т.е. нет решений для „y", что не подходит.

Найдём нижнюю границу для „x":

$\frac{x}{2}\cdot 2^{34} + 2(36-x) > 2^{34}(3 + 2^{x-34})$

$2^{34}\underbrace{\left(\frac{x}{2} - 3 - 2^{x-34}\right)}_{>0 \text{ при } x\ge 7,\ x\in Z \text{ т.к. } \frac{1}{2} > \frac{1}{2^{27}}} > -2(36-x)$ при $x = 6$ $-64 > -60$, что неверно

т.к. $2^{34} \gg 2(36-x)$ при $x < 38$, то решением нер-ва является $x \ge 7$

Исходя из всех написанных рассуждений, $7 \le x \le 37$

Для того чтобы найти кол-во возможных y, а значит и кол-во пар, из суммы всех возм. знач. $76 + 2^{34}\cdot\frac{x}{2} - 2x$ (1) вычтем сумму всех возм. знач. $2^x + 3\cdot 2^{34}$ (2).

$\Sigma_{1} = \frac{2+62}{2}\cdot 31 + 2^{34}\cdot\left(\frac{3,5 + 18,5}{2}\cdot 31\right) = 992 + 341\cdot 2^{34}$

$\Sigma_{2} = 2^{34}\left(3\cdot 31 + \frac{8(1 - \frac{1}{2^{27}})}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 2^{34}\left(93 + 16 - \frac{1}{2^{23}}\right) = 109\cdot 2^{34} - 2048$

$\Sigma_{1} - \Sigma_{2} = 341\cdot 2^{34} + 992 - 109\cdot 2^{34} + 2048 = 232\cdot 2^{34} + 3040$ пар.

Ответ: $232\cdot 2^{34} + 3040$

№3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$(2):\ (y^2 - 4y + 4) - (4x^2 - 8x + 4) + 2x^2 - xy = 0$

$(y-2)^2 - (2x-2)^2 + x(2x-y) = 0$

$(y-2-2x+2)(y-2+2x-2) + x(2x-y) = 0$

$-(2x-y)(2x+y-4) + x(2x-y) = 0$

$(2x-y)(x-2x-y+4) = 0$

$(2x-y)(4-x-y) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4-x \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Перепишем систему в виде двойного нер-ва:

$2^x + 3\cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2^{33}\cdot x - 2x$

Решая при усл. $x \in \mathbb{Z}$, уравнение $2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}\cdot x - 2x$ имеет ед. решение $x = 38$.

При $x \geq 39$ и $x \in \mathbb{Z}$ $76 - 2x + 2^{33}\cdot x < 2^x + 3\cdot 2^{34}$, т.е. нет решений для „y", что нам не подходит.

Найдём нижнюю границу для x:

$\frac{x}{2} \cdot 2^{34} + 2(36 - x) > 2^{34}(3 + 2^{x-34})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^{34}\cdot 3\frac{1}{2^{26}} \le y < 60 + 8\cdot 2^{33}$

$x = 8$

(22)	18,5	11	$11\cdot 3^{4}9 - \cancel{2}\cdot k$
	18	7	$11 - 2^2 3 + 4$
	17,5	5	$11 - 2^2 - 2^1 \quad 3+2$
	17	4	$11 - 2^2 - 2^1 - 2^0 \quad 3+1$
	16,5	$3\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2}$
(17)	16	$3\frac{1}{4}$	
(15)	15		
	...		
(1)	8		

$k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \dots$

$11 \; 7 \; 5 \; 4 \; 3{,}5 \; 3{,}25$

$4 \; 2 \; 1 \; 0{,}5 \; \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

$1 \; 2 \; 4 \; 8$

$\frac{1\cdot(q^4-1)}{q-1} = \frac{15}{1} = 15$

$\frac{8+9}{2}\cdot 3 =$

$\frac{8+18{,}5}{2}\cdot 22 = \boxed{26{,}5\cdot 11}$

$66 + \frac{8}{\frac{1}{2}} = 66 + \cancel{16}$

$$\frac{8\left(\frac{1}{2^{22}}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}$$

$$16\left(1-\frac{1}{2^{22}}\right)$$

$$\begin{array}{r} 26{,}5 \\ \times\; 11 \\ \hline 265 \\ 265\; \\ \hline 291{,}5 \end{array}$$

$$291{,}5 - 66 - 16\left(1-\frac{1}{2^{22}}\right) = \left(225{,}5 - 16\left(1-\frac{1}{2^{22}}\right)\right)\cdot 2^{34}$$

$$225{,}5\cdot 2^{34} - 2^{34}\cdot 2^4 + \frac{2^{34}}{2^{22}} = 209{,}5\cdot 2^{34} + 4096$$

$60 \dots 2 \qquad \frac{2+60}{2}\cdot 30 = 30\cdot 31 = 930$

$35\cdot 2^{34} < -2 + 2^{34}\cdot 19{,}5$

$\frac{x}{2}\cdot 2^{34} + 2(36-x) > 2^{34}(3 + 2^{x-34})$

$\frac{x}{2} > 3 + 2^{x-34}$

$x > 6 + 2^{x-33}$

$y \ge 2^{34}(3 + 2^{-27})$

$y < 35$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times\; 31 \\ \hline 32 \\ 96\; \\ \hline 992 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times\; 11 \\ \hline 31 \\ 31\; \\ \hline 341 \end{array}$$

$\sin x - \sin x = 2\sin 0\cos x = 0$

~~$\cos x + \cos x = 2\cos x \sin x$~~

$\sin x + \sin x = 2\sin x\cos 0$ (+)

$\cos x + \cos x = 2\cos x\cos 0$

$\cos x - \cos x = 2\sin x\sin 0$

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\cancel{y/x^7})}$

$\cancel{-\log_{16x^6} 2x}$ $\quad - \log_{2x} 16x^6 \ln x = \ln\left(\cancel{8}\, \frac{2}{x^6}\right)$

$\ln$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

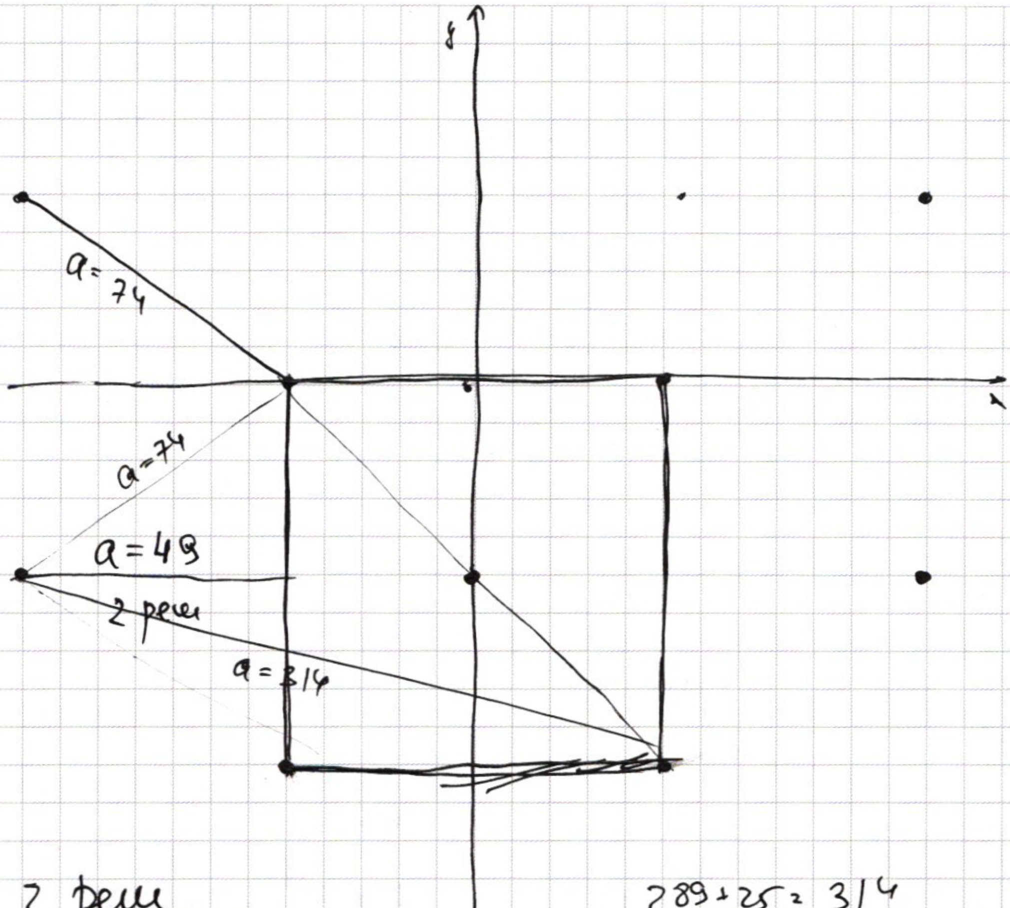
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$a = 49$ 2 реш

$49 < a < 74$ 4 реш

$289 + 25 = 314$

$225 + 49 < 314$

$225 + 289 = 514$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$(y^2 - 4y + 4) - (4x^2 - 8x + 4) + 2x^2 - xy = 0$

$(y-2)^2 - (2x-2)^2 + 2x^2 - xy = 0$

$(y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2) + (x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) - y^2 - 3{,}25x^2 = 0$

$(y - 2 - 2x + 2)(y - 2 + 2x - 2) + x(2x - y) = 0$

$-(2x - y)(y + 2x - 4) + x(2x - y) = 0$

$(2x - y)(x - y - 2x + 4) = 0$

$(2x - y)(x + y - 4) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4 - x \end{array}\right.$

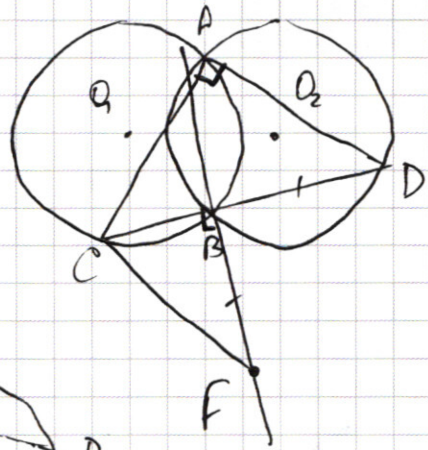
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

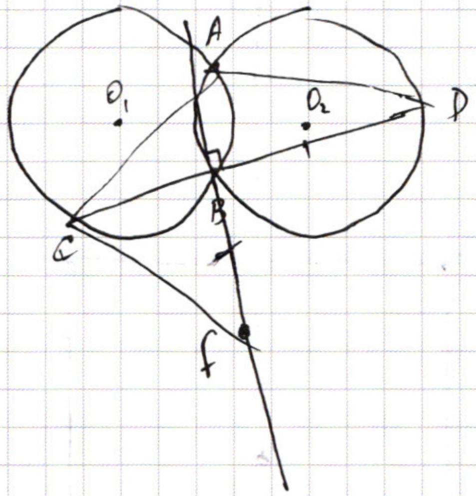
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\left[\begin{array}{l} y=2x \quad (1) \\ y=4-x \end{array}\right.$

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$

$\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$





$2^x + 3\cdot 2^{34} \le y < 76 + 2x(2^{32}-1)$

$2^x + 3\cdot 2^{34} \le y < 76 + x\cdot 2^{33} - 2x$

$x = 34$

$2^{36} \le y < 76 + 17\cdot 2^{34} - 68$

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + x\cdot 2^{33} - 2x$

$2^{33}(6-x) = 76 - 2x - 2^x$

$x = 38$

$19\cdot 2^{34} \le y < 76\cdot 2^{32}$

$35\cdot 2^{34} \le y < 39\cdot 2^{33} - 2$

$11\cdot 2^{34} \le y < 37\cdot 2^{33} + 2$

125

$37\cdot 2^{33} + 2 - 11\cdot 2^{34}$

$\boxed{7{,}5\cdot 2^{34} + 2 \quad x = 37}$

$2^{34}\cdot 7 \le y < 36\cdot 2^{33} + 4$ $\quad 18\cdot 2^{34} + 4 - 7\cdot 2^{34} = \boxed{11\cdot 2^{34} + 4}$ $\quad x = 36$

$\boxed{12{,}5\cdot 2^{34} + 6}$ $\quad x = 35$

$13\cdot 2^{34} + 8 \quad x = 34$

$5\cdot 2^{34} \le y < 6 + 35\cdot 2^{33}$

$4\cdot 2^{34} \le y < 8 + 34\cdot 2^{33}$

$3{,}5\cdot 2^{34} \le y \le 10 + 33\cdot 2^{33}$

$2^{34}\cdot 3\frac{1}{2^{31}} \le y \le 70 + 3\cdot 2^{33}$

$3 + x = \frac{x}{2}$

$6 + 2x = x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261 | 9 $3\cdot3$
1029 | 3
343 | $7\cdot7\cdot7$

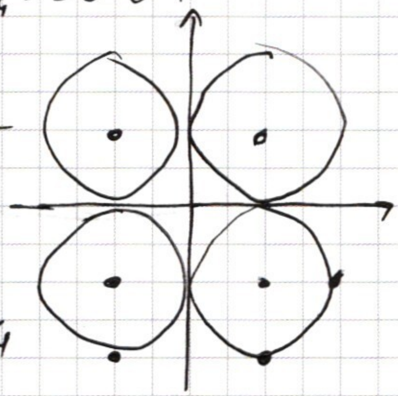
343×27: $2401 + 686 = 9261 = 3^3\cdot 7^3$

а) 3 «3», 3 «7», 2 «1» $C_7^3 \cdot C_4^3 = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{24}\cdot 4 = 140$

а) 3 «7», 3 «3», 2 «1»: $C_8^3\cdot C_5^3 = \frac{\cancel{4\cdot5}\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot\cancel{4\cdot5}}\cdot 10 = 560$

б) 3 «7», 1 «9», 1 «3», 3 «1»: $C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^1 = 56\cdot5\cdot4$

$56 \times 30 = 1680$



$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2=4$

$\sin x + \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin^2 x + 2\sin x\sin y + \sin^2 y$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$2\sqrt{\left(\frac{1+\cos(x+y)}{2}\right)\left(\frac{1-\cos(x-y)}{2}\right)} = \sqrt{(1+\cos(x+y))(1-\cos(x-y))} =$

$= \sqrt{1-\cos(x-y)+\cos(x+y)-\cos(x+y)\cos(x-y)} =$

$= 1 - (\cos x\cos y + \sin x\sin y) + (\cos x\cos y - \sin x\sin y) - \cos(x+y)\cos(x-y)$

$= 1 - 2\sin x\sin y - \cos(x+y)\cos(x-y) =$

$= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) = \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y =$

$= (\sin x\sin y - 1)^2 - \cos^2 x\cos^2 y =$

$= (\sin x\sin y - \cos x\cos y - 1)(\sin x\sin y + \cos x\cos y - 1) =$

$= (\cancel{\sin x \sin y}\ (\sin(x-y)-1)(\sin(x+y)-1)$

$\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = \cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right) = \cos y$

$\sin 9x + \cos 9x = \sin\alpha + \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$|-5+x| + |-5-x| = 10$

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$|y+x+5|+|y-x+5|=10$

$y \geq 5+x$

$y+x+5+y-x+5=10$

$y=0$

$y \geq 5-x$

$y=0$

$|10+y|+|y|=10$

$\leq y \leq$

$-y-x-5+y-x+5=10$

$-2x=10$

$x=-5$

$729=3^6$

$\leq y \leq$

$y+x+5-y+x-5=10$

$x=5$

$x \geq 0$

$5-x \quad 5+x$

$y \leq$

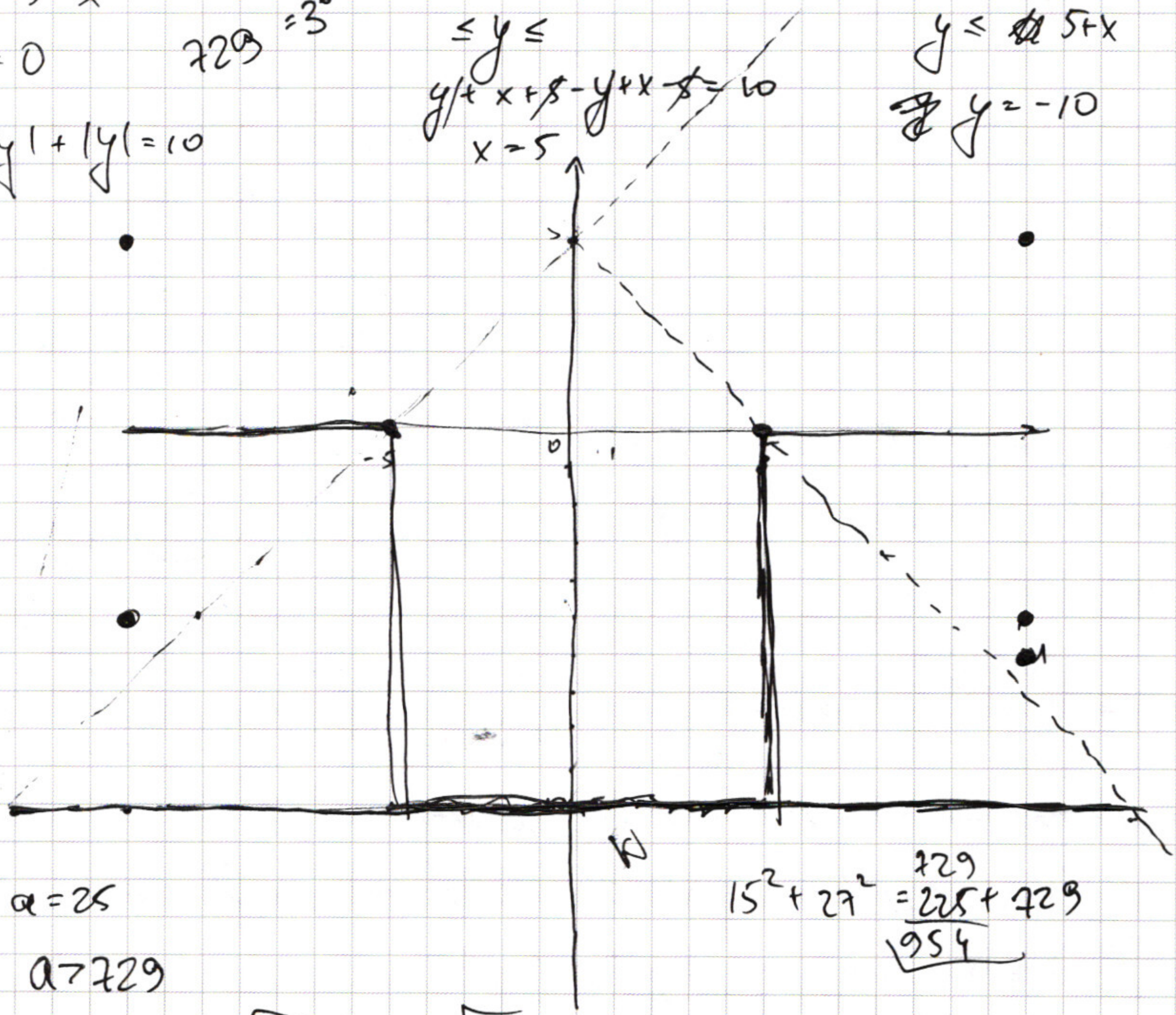
$-y-x-5-y+x-5=10$

$-2y=20$

$y=-10$

$y \leq 5+x$

$y=-10$



$a=25$

$a>729$

$15^2+27^2=225+729$, 729, 954

$\sqrt{225+9}=\sqrt{234}<16$

$[5;0]$

$5-x \geq 0$

$01-=h$

$02=h2-p$

$01=5-x+h-5-x-h-$

$5-x=h$

$01=5-x+h-5+x+h$

$a>h\geq 01-$ $5-x\geq h\geq 5-x-$

$01=|(5-x)-h|+|(5-x)-h|$

$(0;520)$

$5-x<0$

$0=h$

$01=5+x-h+5+x+h$

$5-x<h$

$a<x$

$01=|(5+x-)+h|+|5+x+h|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)